Claude Deschamps | François Moulin | Yoann Gentric
Maxime Bourrigan | Emmanuel Delsinne | François Lussier
Chloé Mullaert | Serge Nicolas | Jean Nougayrède
Claire Tête | Michel Volcker

MATHS
MPSI - MP2I

TOUT-EN-UN

j'intègre

7e édition

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

Retrouvez nos ouvrages pour les prépas scientifiques ici

http://dunod.link/prepassc

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-087412-5

Table des matières

Partie II : Techniques de calcul

Partie III : Analyse

Partie V : Probabilités

Partie VI : Vers la deuxième année

Avant-propos

Comme la précédente, cette édition du Tout-en-un de mathématiques est adaptée au programme entré en vigueur en classe préparatoire MPSI en septembre 2021. Suite aux précieux retours ayant été faits par nos lecteurs, des améliorations ont été apportées par rapport à l'édition précédente.

Rappelons l'ambition de ce livre : faire tenir, en un seul volume, cours complet et exercices corrigés.

Lors de l'élaboration de cet ouvrage, l'équipe d'auteurs ne s'est pas contentée d'adapter l'ancien livre au nouveau programme, mais a repensé chaque chapitre en profondeur, dans un souci permanent de clarté et de concision.

Il nous tient à cœur de préciser quelques éléments clés de la structure du livre :

- Plutôt que de faire figurer systématiquement, à la suite de l'énoncé d'une proposition ou d'un théorème, sa démonstration entièrement rédigée, nous préférons parfois donner un principe de démonstration (la démonstration complète étant alors reléguée en fin de chapitre). L'objectif est double :
  - rendre l'exposé du cours plus concis et plus facile à lire lorsque l'étudiant ne souhaite pas s'attarder sur les démonstrations ;
  - l'étudiant, ayant à sa disposition un principe de démonstration, peut soit (en cas de première lecture) tenter de réfléchir par lui-même à la manière d'élaborer la preuve complète, soit (en cas de lecture ultérieure) se souvenir rapidement de cette preuve.
- Chaque chapitre se conclut par une série d'exercices permettant à l'étudiant de s'entraîner. Chacun de ces exercices est entièrement corrigé.
  - Certains de ces exercices ont pour mission de faire appliquer de manière ciblée un théorème ou une méthode ; sous le numéro de l'exercice est alors indiqué le numéro de la page du cours associée. Inversement, ces exercices sont signalés dans la marge, à l'endroit concerné du cours.

    S'il n'est pas totalement indispensable de traiter ces exercices lors d'une première lecture du cours, leur lien étroit avec celui-ci les rend particulièrement intéressants pour assimiler les nouvelles notions et méthodes.
  - L'étudiant trouvera également des exercices d'entraînement un peu plus ambitieux, demandant plus de réflexion. Certains, plus difficiles, sont étoilés.

Bien entendu nous sommes à l'écoute de toute remarque dont les étudiants, nos collègues, tout lecteur… pourraient nous faire part (à l'adresse électronique ci-dessous). Cela nous permettra, le cas échéant, de corriger certaines erreurs nous ayant échappé et surtout ce contact nous guidera pour une meilleure exploitation des choix pédagogiques que nous avons faits aujourd'hui dans cet ouvrage.

François Moulin et Yoann Gentric
touten1maths@gmail.com

« Mode d'emploi » d'un chapitre

Une introduction présente le sujet traité.

Calculs algébriques et trigonométrie

Nous introduisons dans ce chapitre des outils de calculs algébriques (les symboles $\sum$ et $\prod$, les coefficients binomiaux et la formule du binôme, les systèmes linéaires et la méthode du pivot), ainsi que des notions de trigonométrie.

Les encadrés correspondent soit à des théorèmes, propositions ou corollaires, qui partagent le même système de numérotation, soit à des définitions, qui ont leur propre numérotation.

Proposition 2

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $\operatorname{Re} z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ $\operatorname{Im} z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ et $\overline{\bar{z}} = z$.

Corollaire 3

Un complexe z est réel si, et seulement si, $z = \bar{z}$. Un complexe z est imaginaire pur si, et seulement si, $z = -\bar{z}$.

Définition 3

Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe défini par $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

La démonstration de chaque résultat encadré, lorsqu'elle ne suit pas directement celui-ci, est indiquée par un renvoi.

Proposition 6

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on a $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$. De plus, $|z| = 1$ équivaut à $\dfrac{1}{z} = \bar{z}$.

Démonstration page 185

Les points de méthode apparaissent sur fond grisé.

Point méthode Les règles de calcul précédentes permettent de calculer des conjugués souvent bien plus efficacement qu'en utilisant les parties réelle et imaginaire.

Les points auxquels il faut faire particulièrement attention sont signalés par un filet vertical sur la gauche.

> **Attention** Quand on utilise la relation de Chasles, il faut bien prendre garde à ne pas compter deux fois le terme a_r !

Des renvois vers des exercices peuvent apparaître en marge au sein du cours.

Exo 28.3

Exo 28.4

Proposition 9

Si A et B sont des ensembles finis, alors $A \cup B$ est fini et l'on a :

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B).$$

Démonstration page 1068

Les exemples sont repérés par deux coins.

Ex. 1. La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto x$ donc les primitives sur $\mathbb{R}$ de f sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + C$ avec $C \in \mathbb{K}$.

Des exercices sont proposés en fin de chapitre, avec éventuellement un rappel du numéro de la page de cours où se trouve la notion dont l'exercice est une application.

S'entraîner et approfondir

18.1 Soit X un ensemble possédant au moins deux éléments distincts a et b. Construire deux $\rightarrow^{679}$ applications f_a et f_b de X dans X telles que $f_a \circ f_b \neq f_b \circ f_a$.

Certains exercices bénéficient d'indications, et les plus difficiles sont étoilés.

⋆ **11.28** Soit f l'application définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Démontrer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in [0, 1[$, que $f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

Indication. *On pourra chercher une relation entre f' et f, puis une seconde relation donnant $f^{(n+1)}$ en fonction des $f^{(k)}$ avec $k \leqslant n$.*

Tous les exercices sont entièrement corrigés.

Solutions des exercices

20.1 Le polynôme P est la différence de deux polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$, donc $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

Le coefficient en X^n de chacun de ces deux polynômes vaut 1, donc le coefficient en X^n de P est nul et P est de degré au plus $n-1$.

Le coefficient en X^{n-1} de P est $-2n-5n = -7n$ d'après la formule du binôme. Ce coefficient étant non nul, on obtient $\deg P = n-1$.

Chapitre 0 : Vocabulaire, notations

Vocabulaire, notations 0

I Ensembles de nombres

Parmi les nombres que nous utilisons, nous pouvons distinguer les catégories suivantes.

Les entiers naturels : 0, 1, 2, $\ldots$.

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

Les entiers relatifs : il s'agit des entiers naturels et de leurs opposés.

L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

Les décimaux : il s'agit des nombres de la forme $\frac{k}{10^n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Les rationnels : ce sont les quotients d'entiers $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Les réels : nous supposons connu l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, ainsi que ses opérations usuelles $+$, $-$, $\times$ et $/$.

Nous étudierons les principales propriétés de $\mathbb{R}$ aux chapitres 3 et 9.

158

Les complexes : nous étudierons au chapitre 5 l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, c'est-à-dire l'ensemble des nombres qui s'écrivent $a+ib$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, où i est un nombre (non réel !) dont le carré vaut -1.

Ces ensembles privés de 0 sont respectivement notés $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{D}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{C}^*$.

II Comparaison des réels

Inégalités

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni des relations de comparaison $\leqslant$ et $<$. Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on dispose de :

- la relation $x \leqslant y$, qui se lit « x est **inférieur** (ou égal) à y » ou « x est **plus petit** que y » ; on peut aussi écrire $y \geqslant x$ qui se lit « y est **supérieur** (ou égal) à x » ou encore « y est **plus grand** que x » ;
- la relation $x < y$, qui se lit « x est **strictement inférieur** à y » ou « x est **strictement plus petit** que y » ; on peut aussi écrire $y > x$ qui se lit « y est **strictement supérieur** à x » ou encore « y est **strictement plus grand** que x »

On a naturellement $x < y$ si, et seulement si, $x \leqslant y$ et $x \neq y$.

Il y a une terminologie propre à la comparaison avec 0 :

- un réel x est **positif** (respectivement **strictement positif**) si $x \geqslant 0$ (respectivement $x > 0$) ;
- un réel x est **négatif** (respectivement **strictement négatif**) si $x \leqslant 0$ (respectivement $x < 0$).

Notations

- $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{Q}_+$ désignent respectivement les ensembles des réels positifs et des rationnels positifs.
- $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{Q}_+^*$ désignent respectivement les ensembles des réels strictement positifs et des rationnels strictement positifs.
- $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{Q}_-$ et $\mathbb{Z}_-$ désignent respectivement les ensembles des réels négatifs, des rationnels négatifs et des entiers négatifs.
- $\mathbb{R}_-^*$, $\mathbb{Q}_-^*$ et $\mathbb{Z}_-^*$ désignent respectivement les ensembles des réels strictement négatifs, des rationnels strictement négatifs et des entiers strictement négatifs.

Intervalles de $\mathbb{R}$

Soit a et b deux réels tels que $a \leqslant b$. On note [1] :

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x \leqslant b\} \qquad [a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x\}$$
$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x < b\} \qquad]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \leqslant b\}$$
$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \leqslant b\} \qquad]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x\}$$
$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\} \qquad]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < b\}$$

Ces ensembles, ainsi que $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$, sont appelés **intervalles** de $\mathbb{R}$.

Remarques

- L'ensemble $\mathbb{R}$ est aussi appelé la **droite réelle** ou **droite numérique**.
- L'ensemble vide est un intervalle puisque, par exemple, $\varnothing =]2,2[$.
- Les quatre intervalles de la colonne de droite sont appelés **demi-droites**.
- Dans chacun des cas précédents, le réel a (respectivement b) est appelé **extrémité inférieure** (respectivement **extrémité supérieure**) de l'intervalle.

  Si I est la demi-droite $[a,+\infty[$ ou la demi-droite $]a,+\infty[$, alors $+\infty$ est l'extrémité supérieure de I.

  De même, $-\infty$ est l'extrémité inférieure des demi-droites $]-\infty,b]$ et $]-\infty,b[$.

  Si $I = \mathbb{R}$, alors ses extrémités sont $-\infty$ et $+\infty$.
- Si $a \leqslant b$, l'intervalle $[a,b]$ est appelé **segment** $[a,b]$.

1. Une double inégalité du type $a \leqslant x \leqslant b$ signifie $a \leqslant x$ et $x \leqslant b$.

- Par définition, les **intervalles ouverts** de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de la forme :

$$]a,+\infty[, \qquad]-\infty,a[\quad \text{ou} \quad]a,b[\qquad \text{avec} \qquad a<b,$$

ainsi que $\mathbb{R}$ et l'ensemble vide.

- Les **intervalles fermés** sont les intervalles de la forme $[a,+\infty[$ et $]-\infty,a]$ avec $a \in \mathbb{R}$, les segments, ainsi que $\mathbb{R}$ et l'ensemble vide.

  On remarque que $\mathbb{R}$ et $\varnothing$ sont à la fois ouverts et fermés et que ce sont les seuls intervalles qui vérifient cette propriété.

- Les intervalles de la forme $[a,b[$ ou $]a,b]$, avec $a<b$ sont dits **semi-ouverts** ou **semi-fermés**.

- L'**intérieur** d'un intervalle I est l'intervalle ouvert qui a les mêmes extrémités que I. Ainsi, pour $a \leqslant b$, l'intérieur des intervalles $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$ est l'intervalle ouvert $]a,b[$.

  Un *point intérieur* d'un intervalle I est donc un point de l'intérieur de I.

  Dans la suite de ce livre, on utilisera souvent l'expression : « soit I un intervalle d'intérieur non vide ». Cela signifie que les extrémités de I sont distinctes, et permet de dire que I contient deux points distincts ou encore que I contient une infinité d'éléments. Dans ce cas, on dit aussi qu'il s'agit d'un intervalle « **non trivial** ».

Partie entière

Définition 1

La **partie entière** d'un réel x est le plus grand entier relatif n tel que $n \leqslant x$. On le note $\lfloor x \rfloor$.

L'existence et l'unicité d'un tel entier sera prouvée à la page 313.
On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \qquad \text{ou encore} \qquad x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

Remarque On peut parfois rencontrer la notation $\lceil x \rceil$ qui désigne le plus petit entier relatif n tel que $x \leqslant n$, appelé aussi **partie entière supérieure**.

- Pour $x \in \mathbb{Z}$, on a naturellement $\lceil x \rceil = x = \lfloor x \rfloor$.
- Sinon, on a $\lfloor x \rfloor < x < \lceil x \rceil$ et $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$.

Droite numérique achevée

Définition 2

On appelle **droite numérique achevée** l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$.

On étend la relation $\leqslant$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$ pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Remarque L'ensemble $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ se note aussi $[0,+\infty]$.

III Le cas particulier des entiers

Propriétés

Nous admettons les propriétés fondamentales suivantes des entiers.

- Si a et b sont deux entiers (relatifs), on a $a < b$ si, et seulement si, $a \leqslant b-1$.
- Toute partie non vide A de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément a, c'est-à-dire un élément a de A tel que $a \leqslant n$ pour tout n dans A.

Une partie A de $\mathbb{Z}$ est dite **minorée** s'il existe a dans $\mathbb{Z}$ tel que $a \leqslant n$ pour tout n de A. On définit de même les parties **majorées**. La deuxième propriété ci-dessus se généralise :

- toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément ;
- toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.

Intervalles d'entiers

Soit a et b deux entiers relatifs vérifiant $a \leqslant b$. On note :

$$[\![a,b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \,:\, a \leqslant n \leqslant b\},$$

$$[\![a,+\infty[\![= \{n \in \mathbb{Z} \,:\, a \leqslant n\},$$

$$]\!]-\infty,a]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \,:\, n \leqslant a\}.$$

Remarques

- Pour a et b entiers relatifs, on a :

$$[\![a,b]\!] = [a,b] \cap \mathbb{Z}, \quad [\![a,+\infty[\![= [a,+\infty[\cap \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad]\!]-\infty,b]\!] =]-\infty,b] \cap \mathbb{Z}.$$

- On n'a pas donné de notation pour des intervalles ouverts d'entiers, car, par exemple, pour a et b entiers, on a :

$$\{n \in \mathbb{Z} \,:\, a < n \leqslant b\} = [\![a+1,b]\!].$$

- Lorsque $a > b$, l'intervalle $[\![a,b]\!]$ est vide. Ainsi, par exemple, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intervalle $[\![1,n]\!]$ est vide si, et seulement si, $n = 0$.

Chapitre 1 : Logique et raisonnement

Logique et raisonnement

I Assertions et modes de raisonnement

1 Assertions

La notion d'**assertion** est une notion première. Intuitivement, une assertion est une phrase mathématique qui est soit vraie soit fausse.

Ex. 1. « 2 est un entier impair » est une assertion (fausse).

Ex. 2. « Tout entier naturel pair supérieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers » est une assertion dont on ne sait pas actuellement si elle est vraie ou fausse [1].

Une assertion peut dépendre de paramètres.

Ex. 3. L'assertion « n est premier » est une assertion dont la véracité dépend de n.

Remarque Pour souligner la dépendance en n de cette assertion, on peut la noter $P(n)$.

Ex. 4. L'assertion « $f(x) = 3$ » dépend de f et de x.

Ex. 5. L'assertion « $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ » est vraie pour tout réel x.

Ex. 6. L'assertion « $\sqrt{x^2} = x$ » est vraie pour tout réel x positif et fausse pour tout réel x strictement négatif.

Convention Soit P une assertion. On écrit la plupart du temps :

« supposons P » au lieu de « supposons que P soit vraie »

« montrons P » au lieu de « montrons que P est vraie ».

1. On pense néanmoins qu'elle est vraie (conjecture de Goldbach).

2 Connecteurs

Définition 1

Soit P et Q deux assertions. On appelle :

- **négation** de P, et l'on note NON P, toute assertion qui est vraie lorsque P est fausse et fausse sinon ;
- **conjonction** de P et Q, et l'on note P ET Q, toute assertion qui est vraie lorsque les assertions P, Q sont toutes les deux vraies, et fausse sinon ;
- **disjonction** de P et Q, et l'on note P OU Q, toute assertion qui est vraie lorsqu'au moins l'une des deux assertions P, Q est vraie, et fausse sinon ;
- **équivalence** entre P et Q, et l'on note $P \Leftrightarrow Q$, toute assertion qui est vraie lorsque les assertions P, Q sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses, et fausse sinon ;
- **implication** de Q par P, et l'on note $P \Rightarrow Q$, toute assertion qui est fausse lorsque P est vraie et Q est fausse, et vraie dans tous les autres cas.

Remarque On peut visualiser ces définitions à l'aide de tables de vérité :

P	Q	NON P	P ET Q	P OU Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$
fausse	fausse	vraie	fausse	fausse	vraie	vraie
fausse	vraie	vraie	fausse	vraie	fausse	vraie
vraie	fausse	fausse	fausse	vraie	fausse	fausse
vraie	vraie	fausse	vraie	vraie	vraie	vraie

Notation Dans le texte de ce chapitre nous noterons les trois premiers connecteurs « NON », « ET », « OU », pour les distinguer de ceux du langage courant, mais dans les chapitres suivants nous utiliserons les graphismes classiques « non », « et », « ou ».

Attention Le connecteur OU n'est pas exclusif comme il l'est parfois dans le langage courant (dans la locution « fromage ou dessert » par exemple).

Remarques

- Lorsque l'on a $P \Leftrightarrow Q$, on dit que les assertions P et Q sont **équivalentes**.
- Lorsque l'on a $P \Rightarrow Q$, on dit que P **implique** Q.
- Par abus on dit « la » négation de P ; bien qu'une assertion puisse avoir plusieurs négations, toutes ces négations sont équivalentes. Par exemple, si x est un réel, alors la négation de « $x = 0$ » peut s'écrire « $x \neq 0$ », mais aussi « $x^2 > 0$ ».

Ex. 7. Soit x un réel.

- La négation de « $x \geqslant -1$ » est « $x < -1$ ».
- La négation de « $x \leqslant 1$ » est « $x > 1$ ».
- L'assertion « $x^2 - 1 = 0$ » est équivalente à « $(x = 1)$ OU $(x = -1)$ ».
- L'assertion « $-1 \leqslant x \leqslant 1$ » est équivalente à « $(-1 \leqslant x)$ ET $(x \leqslant 1)$ ».

Propriétés élémentaires sur les conjonctions et les disjonctions

Soit P, Q et R trois assertions. On a les propriétés intuitives suivantes qui peuvent se vérifier facilement à l'aide d'une table de vérité :

- l'assertion P ET (NON P) est fausse ;
- l'assertion P OU (NON P) est vraie (*principe du tiers exclu*) ;
- si deux assertions sont équivalentes, alors leurs négations le sont aussi ;
- les assertions NON (NON P) et P sont équivalentes ;
- les assertions NON (P ET Q) et (NON P) OU (NON Q) sont équivalentes ;
- les assertions NON (P OU Q) et (NON P) ET (NON Q) sont équivalentes ;
- les assertions (P ET Q) ET R et P ET (Q ET R) sont équivalentes ;
- les assertions (P OU Q) OU R et P OU (Q OU R) sont équivalentes.

Les deux dernières propriétés nous permettent de noter P ET Q ET R sans parenthèses et de même pour P OU Q OU R.

Ex. 8. Soit x, y et z trois réels.

- Comme l'assertion $x = y = z$ est équivalente à $(x = y)$ ET $(y = z)$, sa négation est $(x \neq y)$ OU $(y \neq z)$.
- De même, comme l'assertion $x < y \leqslant z$ est équivalente à $(x < y)$ ET $(y \leqslant z)$, sa négation est $(y \leqslant x)$ OU $(z < y)$.

Proposition 1

Soit P, Q et R trois assertions.

- Les assertions P ET (Q OU R) et (P ET Q) OU (P ET R) sont équivalentes.
- Les assertions P OU (Q ET R) et (P OU Q) ET (P OU R) sont équivalentes.

Exo 1.1

Démonstration. Il suffit de faire une table de vérité à 8 lignes. □

Propriétés élémentaires sur l'implication et l'équivalence

Soit P et Q deux assertions :

- l'assertion $P \Rightarrow Q$ est équivalente à (NON P) OU Q ;
- la négation de $P \Rightarrow Q$ est donc P ET (NON Q) ;
- les assertions $P \Rightarrow Q$ et (NON Q) $\Rightarrow$ (NON P) sont équivalentes ;
- les assertions $P \Leftrightarrow Q$ et $Q \Leftrightarrow P$ sont équivalentes ;
- les assertions $P \Leftrightarrow Q$ et (NON P) $\Leftrightarrow$ (NON Q) sont équivalentes ;
- les assertions $P \Leftrightarrow Q$ et ($P \Rightarrow Q$) ET ($Q \Rightarrow P$) sont équivalentes.

Remarque Par définition, l'assertion $P \Rightarrow Q$ est fausse lorsque P est vraie et Q fausse, et uniquement dans ce cas. Donc :

- si P est fausse alors $P \Rightarrow Q$ est vraie ;
- si $P \Rightarrow Q$ est vraie et si P est vraie, alors Q est vraie, ce qui donne le sens intuitif habituel de l'implication : si P est vraie, alors Q est vraie.

Ainsi, pour démontrer $P \Rightarrow Q$:

- si P est fausse, alors il n'y a rien à faire ;
- si P est vraie, alors on doit prouver que Q est vraie.

Point méthode (pour démontrer $P \Rightarrow Q$)

Pour montrer que l'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie, on peut commencer par supposer P et essayer de prouver Q, ce qui se rédige : *« Supposons P et montrons Q »*.

Ex. 9. Soit P, Q et R trois assertions telles que $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$. Montrons que $P \Rightarrow R$. Pour cela, supposons P et montrons R. Comme $P \Rightarrow Q$ et que P est vraie, on en déduit que Q est vraie. Puis, comme $Q \Rightarrow R$, on en déduit que R est vraie.

Remarques

- L'assertion $P \Rightarrow Q$ peut donc être vraie même lorsque Q est fausse. Cela peut paraître bizarre à première vue, surtout si l'on a la mauvaise habitude d'utiliser ce symbole « $\Rightarrow$ » comme une abréviation pour un « donc ».
- Écrire « P donc Q » ou « P implique Q » ne signifie pas la même chose. Dans la première version l'assertion P est vraie alors que dans la seconde, elle ne l'est pas forcément.

Ex. 10. L'assertion « $(1 = 2) \Rightarrow (6 = 8)$ » est vraie puisque « $1 = 2$ » est fausse.

Attention

- Ne jamais utiliser le symbole $\Rightarrow$ comme abréviation d'un « donc ».
- Écrire « On a $P \Rightarrow Q$ » ne prétend pas que P est vraie, mais que si P est vraie, alors Q aussi.

Autre formulations Soit P et Q deux assertions.

- Au lieu de dire « on a $P \Rightarrow Q$ », on peut dire indifféremment :
  - pour que Q soit vraie, il suffit que P le soit ;
  - pour que P soit vraie, il faut que Q le soit ;
  - P est une condition suffisante pour que Q soit vraie ;
  - Q est une condition nécessaire pour que P soit vraie.
- Au lieu de dire « on a $P \Leftrightarrow Q$ », on peut dire indifféremment :
  - P est vraie si et seulement si Q l'est ;
  - pour que Q soit vraie, il faut et il suffit que P le soit ;
  - P est une condition nécessaire et suffisante pour que Q soit vraie.

3 Modes de raisonnement

Raisonnement par contraposée

Définition 2

Soit P et Q deux assertions. L'assertion NON $Q \Rightarrow$ NON P est appelée la **contraposée** de l'implication $P \Rightarrow Q$.

On a vu dans les propriétés élémentaires de la page 10 qu'une implication et sa contraposée sont équivalentes.
Pour montrer qu'une implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, il suffit donc de montrer sa contraposée. On dit alors que l'on raisonne **par contraposée**.

Ex. 11. Soit n un entier. Montrons que si n^2 est pair, alors n l'est aussi.
Pour cela, raisonnons par contraposée : montrons que (n impair) $\Rightarrow$ (n^2 impair).
Supposons n impair et montrons que n^2 l'est aussi. Puisque n est impair, il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. On a alors :

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1$$

donc n^2 est impair. D'où le résultat.

Raisonnement par double implication

Pour montrer que deux assertions P et Q sont équivalentes, on peut montrer $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. On dit alors que l'on raisonne par **double implication**.

Ex. 12. Soit n un entier. Montrons que n^2 est pair si, et seulement si, n l'est.

- On a déjà prouvé l'implication (n^2 pair) $\Rightarrow$ (n pair). Montrons sa réciproque.
- Si n est pair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k$. On a alors $n^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$ qui est pair.

Ainsi, n^2 est pair si, et seulement si, n l'est aussi, autrement dit n et n^2 ont la même parité.

Terminologie $Q \Rightarrow P$ est appelée l'**implication réciproque** de $P \Rightarrow Q$.

Raisonnement par disjonction de cas

Exo 1.2

Pour démontrer un résultat, il peut être intéressant d'étudier séparément les différents cas de figure.

Ex. 13. Redémontrons que n et n^2 ont la même parité en raisonnant par disjonction de cas selon la parité de n.

- Si n est pair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k$. On a alors $n^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$ qui est pair.
- Si n est impair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k+1$. On a alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ qui est impair.

Cela conclut car, dans les deux cas, on a obtenu que n et n^2 ont la même parité.

Remarque Nous avons utilisé ici les mêmes arguments que dans l'exemple 12. Ce n'est que la façon de les présenter qui est différente.

Ex. 14. Soit P, Q et R trois assertions. Montrons que les assertions :

$$A = (P \text{ ET } (Q \text{ OU } R)) \qquad \text{et} \qquad B = (P \text{ ET } Q) \text{ OU } (P \text{ ET } R)$$

sont équivalentes, sans faire de table de vérité à 8 lignes.
Procédons par disjonction de cas sur la véracité de P :

- si P est vraie, alors A et B sont toutes les deux équivalentes à $(Q \text{ OU } R)$;
- sinon, A et B sont toutes les deux fausses.

Dans les deux cas, A et B sont équivalentes.

Raisonnement par l'absurde

Pour prouver qu'une assertion P est vraie, on peut supposer qu'elle est fausse et en déduire une contradiction.

Ex. 15. Montrons que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.
Raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ est rationnel. Il existe alors deux entiers p et q, avec q non nul, tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.
Quitte à simplifier la fraction, on peut supposer que p et q ne sont pas tous les deux pairs.
En élevant au carré l'égalité précédente, on obtient :

$$2\,q^2 = p^2.$$

Par suite, l'entier p^2 est pair et il en est donc de même de p. On peut ainsi trouver un entier k tel que $p = 2\,k$. En remplaçant dans l'égalité $2\,q^2 = p^2$, on obtient $2\,q^2 = 4\,k^2$ et donc :

$$q^2 = 2\,k^2,$$

ce qui prouve que q^2 est pair. On en déduit que q est pair, ce qui contredit le fait que p et q ne sont pas tous les deux pairs.
L'hypothèse de départ est donc fausse, ce qui montre que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Raisonnement par analyse-synthèse

Lorsque l'on cherche l'ensemble des éléments x de E vérifiant une propriété $P(x)$, on peut procéder par analyse-synthèse.

- Dans la phase d'analyse, on considère un élément x de E vérifiant $P(x)$ et l'on en déduit des propriétés sur x. Grâce à ces conditions nécessaires, on limite la liste des candidats.
- Dans la synthèse, on détermine, parmi les candidats obtenus dans l'analyse, lesquels vérifient $P(x)$.

Ex. 16. Déterminons les réels x tels que $1 + x \geqslant 0$ et $1 - x^2 = \sqrt{1+x}$.

Analyse. Supposons que x soit un réel vérifiant $1 + x \geqslant 0$ et $1 - x^2 = \sqrt{1+x}$.
Alors $(1-x^2)^2 = 1 + x$, ce qui s'écrit aussi $(1+x)^2(1-x)^2 = 1 + x$, ou encore :

$$(1+x)\left((1+x)(1-x)^2 - 1\right) = 0 \quad \text{et enfin} \quad (1+x)x(x^2 - x - 1) = 0.$$

On en déduit que $x \in \left\{-1, 0, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Synthèse.

- On vérifie facilement que -1 et 0 sont solutions.
- Si $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, alors en remontant les calculs ci-dessus, on obtient $(1-x^2)^2 = 1+x$. Donc, comme $1+x \geqslant 0$ et $1-x^2 \geqslant 0$, on a $1-x^2 = \sqrt{1+x}$, *i.e.* x est solution.
- Si $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors $1-x^2 < 0$ donc x n'est pas solution.

Conclusion. Il y a 3 solutions : -1 et 0 et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

II Quantificateurs

Les notions d'**ensemble** et d'**élément** sont ici considérées comme des notions premières ; un ensemble correspond intuitivement à une « collection d'objets » qui sont les « éléments » de cet ensemble. Cette notion sera détaillée au chapitre suivant.
Si a est un élément et E un ensemble :

- l'assertion $a \in E$, qui se lit « a appartient à E » ou « E contient a », est vraie si a est un élément de E, et fausse dans le cas contraire ;
- lorsque a n'est pas élément de E, on écrit $a \notin E$.

On admet qu'il existe un ensemble, appelé **ensemble vide** et noté $\varnothing$, qui ne contient aucun élément.

1 Quantificateurs universel et existentiel

Définition 3

Soit $P(x)$ une assertion dépendant d'une variable x appartenant à un ensemble E.

- On note « $\forall x \in E \quad P(x)$ » l'assertion qui est vraie si, pour tout élément x de E, l'assertion $P(x)$ est vraie.
- On note « $\exists x \in E \quad P(x)$ » l'assertion qui est vraie s'il existe un élément x appartenant à E tel que l'assertion $P(x)$ soit vraie.
- On note « $\exists\,! x \in E \quad P(x)$ » l'assertion qui est vraie s'il existe un *unique* élément x appartenant à E tel que l'assertion $P(x)$ soit vraie.

Terminologie Le symbole « $\forall$ » est appelé **quantificateur universel** et le symbole « $\exists$ » est appelé **quantificateur existentiel**.

Remarques

- L'assertion « $\forall x \in E \quad P(x)$ » se lit « pour tout x dans E, on a $P(x)$ ».
- L'assertion « $\exists x \in E \quad P(x)$ » se lit « il existe x dans E tel que $P(x)$ soit vraie ».
- L'assertion « $\exists\,! x \in E \quad P(x)$ » se lit « il existe un unique x dans E tel que $P(x)$ soit vraie » et est équivalente à :

$$\exists x \in E \quad \Big(P(x) \text{ ET } \big(\forall y \in E \quad P(y) \;\Rightarrow\; y = x\big)\Big).$$

Convention Si E est l'ensemble vide, alors l'assertion « $\forall x \in E \quad P(x)$ » est vraie.

Ex. 17. $\exists x \in \mathbb{R} \quad 2x+1=0$ est une assertion vraie.

Ex. 18. $\exists n \in \mathbb{Z} \quad 2n+1=0$ est une assertion fausse.

Ex. 19. L'assertion $\forall n \in \mathbb{Z} \quad (n>3 \Leftrightarrow n \geqslant 4)$ est vraie.

Ex. 20. L'assertion $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x>3 \Leftrightarrow x \geqslant 4)$ est fausse.

Attention

- Malgré les apparences, l'assertion « $\forall x \in E \quad P(x)$ » ne dépend pas de x.

  La lettre x figurant dans cette assertion a le statut de **variable muette**. En effet cette assertion peut aussi être écrite : « $\forall y \in E \quad P(y)$ », ou encore « $\forall z \in E \quad P(z)$ », sans en modifier le sens et peut d'ailleurs être énoncée sans la moindre lettre x, y ou z : « tous les éléments de E vérifient P ».
- Il en est de même des assertions « $\exists x \in E \quad P(x)$ » et « $\exists ! x \in E \quad P(x)$ ».

Ex. 21. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- L'assertion « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant 0$ » signifie que la fonction f est positive.
- L'assertion « $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x)=0$ » signifie que la fonction f s'annule.

Dans les deux cas, la traduction en français ne fait pas intervenir la variable muette x.

Ex. 22. À partir de l'assertion « $x+y^2=0$ » on peut en former d'autres :

- « $\forall x \in \mathbb{R} \quad x+y^2=0$ » est une assertion qui ne dépend que de la variable y. On peut la noter $P(y)$. Cette assertion n'est vérifiée pour aucune valeur de y car s'il existait un réel y tel que $P(y)$ soit vraie, on aurait $1+y^2=0$, ce qui est absurde.
- « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x+y^2=0$ » est une assertion qui dépend de la variable y, et qui est vraie pour toute valeur de y (il suffit de prendre $x=-y^2$).
- « $\exists y \in \mathbb{R} \quad x+y^2=0$ » est une assertion qui dépend de la variable x, et qui est vraie si, et seulement si, la variable réelle x est négative.

Notation Par abus, et lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on note « $\forall x \geqslant 0 \quad P(x)$ » au lieu de « $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad P(x)$ ».
De même, on note « $\forall n \geqslant 1 \quad P(n)$ » au lieu de « $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(n)$ ».

Méthodes et rédaction

Pour démontrer une assertion du type : $\forall x \in E \quad P(x)$
La façon la plus élémentaire de procéder est de fixer un élément x quelconque dans E puis de démontrer que $P(x)$ est vraie.
La rédaction est alors : « *Soit* $x \in E$. *Montrons* $P(x)$ ».

Ex. 23. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=x^2+x+1$.
Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)>0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $f(x)>0$. On a :

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4},$$

et donc $f(x) \geqslant \frac{3}{4}>0$. D'où le résultat.

Remarque Dans le cas particulier où $E = \mathbb{N}$, pour prouver une assertion du type :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n),$$

on peut évidemment penser à utiliser une démonstration par récurrence. Ce type de raisonnement est détaillé à la fin de ce chapitre.

Pour démontrer une assertion du type : $\exists x \in E \quad P(x)$

- Si l'on dispose d'un candidat évident, alors il suffit de l'exhiber.
- Si un tel élément n'est pas évident à trouver, on peut commencer par une phase d'analyse. L'idée est de supposer qu'un tel élément x existe, d'en déduire certaines de ses propriétés pour déterminer un élément qui convienne. À ce stade, on trouve donc des conditions nécessaires pour qu'un élément vérifie P. Cette phase d'analyse peut rester au brouillon.

  On vérifie ensuite si le(s) élément(s) obtenu(s) vérifie(nt) bien P. Dès que l'un d'entre eux convient, l'assertion est démontrée.

Ex. 24. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + x + 1$. Pour démontrer l'assertion $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 2$, il suffit de constater qu'en prenant $x = 1$, on a $f(x) = 3 > 2$.

Ex. 25. Montrons qu'il existe un rationnel x tel que $3x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$.

Analyse (formellement non nécessaire, mais permettant de cerner les solutions éventuelles).

Soit x un tel rationnel que l'on écrit sous forme de fraction irréductible $x = \frac{p}{q}$.

En multipliant par q^3 la relation $3x^3+4x^2+4x+1 = 0$, on obtient $3p^3+4p^2q+4pq^2+q^3 = 0$, ce qui peut s'écrire :

$$p(3p^2 + 4pq + 4q^2) = -q^3 \qquad \text{et} \qquad 3p^3 = -q(4p^2 + 4pq + q^2).$$

Le caractère irréductible de la fraction $\frac{p}{q}$ et le fait que p divise q^3 et q divise $3p^3$ nous laissent penser que $p = \pm 1$ et $q = \pm 1$ ou $q = \pm 3$ (ce que l'on pourrait montrer rigoureusement à l'aide des résultats du chapitre 17 d'arithmétique). D'autre part, il est clair qu'un tel x est nécessairement négatif. Il ne reste donc plus que deux candidats -1 et $-\frac{1}{3}$.

Synthèse. Il est facile de voir que -1 n'est pas solution (malheureusement, c'était le premier qu'on avait envie d'essayer !) et un calcul rapide montre que $-\frac{1}{3}$ convient.

Bien entendu, cette toute dernière vérification suffirait pour obtenir le résultat souhaité, la partie d'analyse pouvant rester au brouillon.

Pour démontrer une assertion du type : $\exists ! \, x \in E \quad P(x)$

- Pour démontrer la partie « unicité », on peut considérer deux éléments a et b tels que $P(a)$ et $P(b)$ soient vraies, et montrer que $a = b$.
- Pour la partie existence, si l'on n'a pas de candidat évident, on peut toujours faire une analyse-synthèse dans laquelle, la plupart du temps, la partie « analyse » permettra d'identifier un unique candidat et donc de montrer l'unicité.

Exo 1.3

Ex. 26. Soit a, b, c et d quatre réels tels que $a \neq b$.

Montrons qu'il existe une unique fonction affine f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a) = c$ et $f(b) = d$.

Analyse. Supposons que f soit une fonction affine telle que $f(a) = c$ et $f(b) = d$. Il existe alors deux réels α et β tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \alpha(x - a) + \beta$.

En évaluant f en a et en b, on obtient $\beta = c$ et $\alpha(b-a)+\beta = d$. Comme $a \neq b$, on en déduit que $\alpha = \dfrac{d-c}{b-a}$ et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c.$$

Cela montre l'unicité : il y a au plus une fonction affine valant c et a et d en b.

Synthèse. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c.$$

La fonction f est clairement affine et vérifie évidemment $f(a) = c$ et $f(b) = d$.

Conclusion. Il existe une unique fonction affine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(a) = c$ et $f(b) = d$.

Pour utiliser une hypothèse du type : $\forall x \in E \quad P(x)$

Si l'on sait que « $\forall x \in E \quad P(x)$ » est vraie, alors on peut évidemment utiliser $P(x)$ avec n'importe quel élément $x \in E$. La plupart du temps, il suffit de choisir un bon élément, dépendant du but que l'on veut atteindre.

Ex. 27. Soit a et b deux réels et f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = a\,x^2 + b$.
Montrons que si l'on a $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$, alors on a $a = b = 0$.
Supposons donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$.

- En utilisant cette hypothèse avec $x = 0$, on obtient $b = 0$.
- Puis, en utilisant alors l'hypothèse avec $x = 1$, on obtient $a = 0$.

On en déduit $a = b = 0$, ce qui termine la démonstration.

Remarque Parmi l'infinité des valeurs possibles pour x, on n'en a utilisé que deux ; mais cela a suffi pour établir ce que l'on voulait !

Pour utiliser une hypothèse du type : $\exists x \in E \quad P(x)$

Si l'on sait que « $\exists x \in E \quad P(x)$ » est vraie, alors on peut prendre un élément $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vraie, mais il est indispensable d'introduire un tel élément par une phrase du type *« Prenons $x \in E$ tel que $P(x)$ »* ; il faut alors faire avec cet élément qui nous est donné, et l'on ne peut pas, sans justification supplémentaire, lui attribuer d'autres propriétés.

Ex. 28. Soit a et b deux réels non nuls et f : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax^2 + b. \end{array}$

Montrons que si la fonction f s'annule, alors les réels a et b vérifient $a\,b < 0$.
Supposons que f s'annule. Autrement dit : $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$.
On peut alors fixer un réel x tel que $f(x) = 0$, *i.e.* $ax^2 + b = 0$.

- Comme $b \neq 0$, on a $x \neq 0$.
- En multipliant par a l'égalité $ax^2 + b = 0$, on obtient $(ax)^2 + ab = 0$, *i.e.* $ab = -(ax)^2$.

Or $a \neq 0$ et $x \neq 0$, donc $ax \neq 0$. Par suite, on a $(ax)^2 > 0$, d'où $ab < 0$. Cela termine la démonstration.

Remarque Le nombre réel x fourni par l'hypothèse « $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$ » étant, *a priori*, quelconque, nous avons dû justifier $x \neq 0$ pour pouvoir affirmer $(ax)^2 > 0$.

Ex. 29. Soit a et b deux entiers naturels. On suppose :

$$(\exists n \in \mathbb{N} \quad a = b\,n) \quad \text{et} \quad (\exists n \in \mathbb{N} \quad b = a\,n). \qquad (*)$$

Montrons que $a = b$.

- L'assertion $\exists n \in \mathbb{N} \quad a = b\,n$ est vraie. Prenons donc $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $a = b\,n_1$.
- On peut, de même, prendre $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $b = a\,n_2$.

On en déduit immédiatement $a = a\,n_2\,n_1$. Raisonnons maintenant par disjonction de cas.

- Si $a = 0$, alors la relation $b = a\,n_2$ donne $b = 0$, et donc $a = b$.
- Sinon, on peut alors simplifier $a = a\,n_2\,n_1$ par a, ce qui donne $1 = n_2\,n_1$. Comme n_1 et n_2 sont entiers naturels, on en déduit $n_1 = n_2 = 1$, et donc $a = b$.

Dans les deux cas, on a $a = b$.

Remarque L'hypothèse $(*)$ ci-dessus nous dit qu'il existe un entier n tel que $a = b\,n$ et qu'il existe un entier n tel que $b = a\,n$, mais rien ne dit qu'il s'agit du même entier. La variable n figurant dans $(*)$ est muette, et $(*)$ aurait pu aussi s'écrire :

$$(\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad a = b\,n_1) \quad \text{et} \quad (\exists n_2 \in \mathbb{N} \quad b = a\,n_2).$$

On ne peut donc pas commencer la résolution de l'exercice précédent en disant : « Fixons un entier n tel que $a = b\,n$ et $b = a\,n$ ».

2 Propriétés élémentaires sur les quantificateurs

Négation de quantificateurs

Ex. 30. L'assertion « $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 1 = 0$ » peut se traduire en français par la phrase : « pour tout réel x, on a $x^2 - 1 = 0$ ». Elle est évidemment fausse.

Sa négation, « on peut trouver un réel x tel que $x^2 - 1 \neq 0$ », qui est donc vraie (par exemple $x = 0$), s'écrit mathématiquement « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 1 \neq 0$ » .

Ex. 31. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Pour écrire que f est la fonction nulle, on écrit « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$ ».
- La négation de cette affirmation est « la fonction f prend au moins une valeur non nulle », ce qui s'écrit « $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0$ ».
- Attention à ne pas confondre cette assertion avec « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0$ »
  - qui exprime que f ne s'annule pas,
  - dont la négation, « f s'annule », s'écrit « $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$ ».

Plus généralement, si $P(x)$ est une assertion dépendant d'une variable $x \in E$, alors :

- la négation de « $\forall x \in E \quad P(x)$ » est « $\exists x \in E \quad \text{NON}\, P(x)$ » ;
- la négation de « $\exists x \in E \quad P(x)$ » est « $\forall x \in E \quad \text{NON}\, P(x)$ ».

Ex. 32. La négation de « $\forall x \in E \quad A(x) \Rightarrow B(x)$ » est :

$$\exists x \in E \quad A(x) \text{ ET } \big(\text{NON}\, B(x)\big).$$

puisque l'assertion $A(x) \Rightarrow B(x)$ s'écrit $\big(\text{NON}\, A(x)\big)$ OU $B(x)$.

Ex. 33. La négation de $\forall x \in E \quad \big(A(x) \Leftrightarrow B(x)\big)$ est :

$$\exists x \in E \quad \Big(A(x) \text{ ET } \big(\text{NON } B(x)\big)\Big) \text{ OU } \Big(B(x) \text{ ET } \big(\text{NON } A(x)\big)\Big).$$

Ex. 34. Soit x un réel positif tel que $\forall \varepsilon > 0 \quad x \leqslant \varepsilon$. Montrons que $x = 0$.
Raisonnons par l'absurde : supposons $x > 0$. En prenant $\varepsilon = \dfrac{x}{2}$ (qui est un réel strictement positif), on obtient, en utilisant l'hypothèse, $x \leqslant \dfrac{x}{2}$, ce qui donne $x \leqslant 0$ et contredit le fait que x soit strictement positif. D'où le résultat.

Action des quantificateurs sur une conjonction ou une disjonction

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux assertions dépendant d'une variable $x \in E$. On a les équivalences suivantes :

- $\big(\forall x \in E \quad P(x) \text{ ET } Q(x)\big) \iff (\forall x \in E \quad P(x)) \text{ ET } \big(\forall x \in E \quad Q(x)\big)$,
- $\big(\exists x \in E \quad P(x) \text{ OU } Q(x)\big) \iff \big(\exists x \in E \quad P(x)) \text{ OU } (\exists x \in E \quad Q(x)\big)$.

On a aussi les implications suivantes :

Exo 1.4

- $\big(\forall x \in E \quad P(x)\big) \text{ OU } \big(\forall x \in E \quad Q(x)\big) \implies \big(\forall x \in E \quad P(x) \text{ OU } Q(x)\big)$,
- $\big(\exists x \in E \quad P(x) \text{ ET } Q(x)\big) \implies \big(\exists x \in E \quad P(x)\big) \text{ ET } \big(\exists x \in E \quad Q(x)\big)$.

mais leurs réciproques ne sont pas forcément vraies ; elles sont par exemple fausses si l'on prend $E = \mathbb{R}$, avec $P(x)$: « $x \leqslant 0$ » et $Q(x)$: « $x > 0$ ».

Succession de quantificateurs

Lorsqu'une assertion dépend de plusieurs variables, on peut quantifier successivement chacune de ces variables.

Ex. 35. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
L'assertion $f(x) \geqslant f(a)$ dépend des deux variables réelles a et x.

- Soit a un réel donné.
  - Pour exprimer « f présente un minimum en a », on écrit :
  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant f(a).$$
  - L'assertion « f ne présente pas de minimum en a » est la négation de l'assertion précédente, et s'écrit « $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) < f(a)$ ».
- Si l'on veut exprimer « f possède un minimum », c'est-à-dire « il existe (au moins) une valeur de a telle que $f(a)$ soit minimum », on écrit :
$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant f(a).$$
- Pour exprimer « f ne possède pas de minimum », on peut dire en français « il n'existe aucun point où f présente un minimum » ou encore « en a, réel quelconque, f ne présente pas de minimum », ce qui s'écrit :
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) < f(a).$$

Remarques

- L'assertion « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant f(a)$ », où l'on a quantifié x (*i.e.* on a fait précéder x d'un quantificateur), nous donne une assertion de la seule variable a, exprimant que « f présente un minimum en a ».
- L'assertion « $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant f(a)$ » utilise une succession de deux quantificateurs (ce qui a rendu muettes les deux variables x et a) et exprime le fait que « f possède un minimum ».

Exo 1.5

Exo 1.6

Ex. 36. L'assertion « tout entier naturel est le carré d'un entier naturel » s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad n = p^2.$$

- Sa négation est donc : $\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad n \neq p^2$.
- Pour démontrer que l'affirmation initiale est fausse, autrement dit que sa négation est vraie, on peut par exemple remarquer que $n = 2$ n'est le carré d'aucun entier (on a même prouvé à l'exemple 15 de la page 13 que ce n'était le carré d'aucun rationnel).

Inversion de quantificateurs

Soit $P(x, y)$ une assertion dépendant de deux variables $x \in E$ et $y \in F$. On a les équivalences suivantes :

- $\big(\forall x \in E \quad \forall y \in F \quad P(x,y)\big) \iff \big(\forall y \in F \quad \forall x \in E \quad P(x,y)\big)$;
- $\big(\exists x \in E \quad \exists y \in F \quad P(x,y)\big) \iff \big(\exists y \in F \quad \exists x \in E \quad P(x,y)\big)$.

On dit que deux quantificateurs $\forall$ successifs commutent et que deux quantificateurs $\exists$ successifs commutent.

Attention En général, on ne peut pas intervertir deux quantificateurs différents. Plus précisément, l'implication suivante est vraie mais sa réciproque ne l'est pas forcément :

$$\big(\exists x \in E \quad \forall y \in F \quad P(x,y)\big) \implies \big(\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad P(x,y)\big).$$

Dans le membre de gauche, on cherche un x qui convient pour tous les y, alors qu'à droite on demande simplement que pour chaque y on puisse trouver un x (qui dépende éventuellement de y).

Ex. 37.

- L'assertion « $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y = x + 1$ » est fausse. En effet, s'il existait un réel x_0 tel que $\forall y \in \mathbb{R} \quad y = x_0 + 1$, on aurait en particulier $0 = x_0 + 1$ et $1 = x_0 + 1$, ce qui est absurde.
- En revanche, l'assertion « $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad y = x + 1$ » est vraie car pour tout réel y, le réel $x = y - 1$ vérifie $y = x + 1$.

III Récurrence

- Les nombres entiers naturels, et leur ensemble $\mathbb{N}$, sont à la base de toutes les mathématiques, la première activité mathématique des humains ayant certainement été de compter. C'est pourquoi la plupart des propriétés de $\mathbb{N}$ paraissent naturelles et n'ont, jusqu'à une période relativement récente, soulevé aucune question, même parmi les plus grands mathématiciens.
- Il a fallu attendre le XIX$^{\text{e}}$ siècle pour que le problème de la construction de $\mathbb{N}$ soit abordé. Une construction rigoureuse de l'ensemble des entiers sort du cadre de ce cours et nous ferons comme le mathématicien Kronecker qui disait : « Dieu nous a donné les entiers et l'homme a fait le reste ».

Nous admettons en particulier la propriété suivante :

Proposition 2

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

1 Raisonnement par récurrence

Dans ce qui suit, nous dirons que P est une propriété définie sur $\mathbb{N}$ pour signifier que $P(n)$ est une assertion pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 3

Soit P une propriété définie sur $\mathbb{N}$. Si $P(0)$ est vraie et si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \Rightarrow P(n+1), \tag{$*$}$$

alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Démonstration.

Raisonnons par l'absurde en supposant que P ne soit pas vérifiée sur tout $\mathbb{N}$.

L'ensemble A des entiers n pour lesquels $P(n)$ est fausse est alors une partie non vide de $\mathbb{N}$, qui admet donc un plus petit élément n_0.

- Comme $P(0)$ est vraie, on a $0 \notin A$ et donc $n_0 > 0$, *i.e.* $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$.
- L'entier $n_0 - 1$ n'appartient donc pas à A, ce qui prouve que $P(n_0 - 1)$ est vraie. La relation $(*)$ entraîne alors que $P(n_0)$ est vraie et contredit donc l'appartenance de n_0 à A.

L'hypothèse que P n'est pas vérifiée sur tout $\mathbb{N}$ est donc absurde. □

Point méthode Un raisonnement par récurrence se déroule en trois temps :

1. on explicite la propriété $P(n)$ faisant l'objet de la récurrence ;
2. on prouve que $P(0)$ est vraie ; cette phase s'appelle **initialisation** ;
3. on prouve que $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$; cette phase s'appelle **hérédité**.

Attention Ne pas oublier, dans une démonstration par récurrence, de vérifier l'initialisation. À titre d'exemple, en oubliant de vérifier $P(0)$, on peut « montrer » que tous les entiers naturels sont égaux, puisque la propriété $P(n)$: « $n = n+1$ » vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \Rightarrow P(n+1).$$

Ex. 38. Soit f une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) \geqslant n$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété « $f(n) \geqslant n$ ».
Initialisation. $P(0)$ est vraie puisque, par hypothèse, on a $f(0) \in \mathbb{N}$ et donc $f(0) \geqslant 0$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a donc $f(n) \geqslant n$.
Comme f est strictement croissante, on a $f(n+1) > f(n) \geqslant n$.
Étant donné que $f(n+1) \in \mathbb{N}$, on en déduit $f(n+1) \geqslant n+1$, ce qui prouve $P(n+1)$ et termine la récurrence.

Remarque Dans l'hérédité, on préfère parfois, pour simplifier certains calculs ou certaines expressions, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(n-1) \ \Rightarrow \ P(n).$$

Ex. 39. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + n + 1.$$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$; notons $P(n)$ cette propriété au rang n.
Initialisation. Comme $\dfrac{0(0+1)}{2} = 0 = u_0$, la propriété $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n-1)$ soit vraie. Montrons $P(n)$. On a, en utilisant le fait que $P(n-1)$ est vraie :

$$u_n = u_{n-1} + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

ce qui montre $P(n)$ et termine la récurrence.

L'objet de ce qui suit est de présenter quelques variantes du raisonnement par récurrence.

Récurrence à partir d'un certain rang

Corollaire 4

Soit n_0 un entier et P une propriété définie sur $[\![n_0, +\infty[\![$. Si $P(n_0)$ est vraie et si :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad P(n) \ \Rightarrow \ P(n+1),$$

alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Démonstration. Appliquer le théorème 3 de la page précédente à la propriété $P(n_0+n)$. □

Ex. 40. Montrons qu'à partir d'un certain rang, on a $n! \geqslant 2^{n+1}$.

- En calculant les premiers termes, il semble que, pour les entiers supérieurs ou égaux à 5, on ait bien $2^{n+1} \leqslant n!$. Montrons-le par récurrence.
- Notons $P(n)$ la propriété « $n! \geqslant 2^{n+1}$ » et montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 5$.
  Initialisation. On a $5! = 120$ et $2^6 = 64$ donc $P(5)$ est vraie.
  Hérédité. Soit $n \geqslant 5$ tel que $P(n)$ soit vraie.
  D'après $P(n)$, on a $2^{n+1} \leqslant n!$ et comme on a aussi $2 \leqslant n+1$ (puisque $n \geqslant 5$), on obtient $P(n+1)$ par produit d'inégalités entre nombres positifs.
  On a donc prouvé que $P(n)$ est vraie à partir du rang $n = 5$.

2 Récurrence double

Il arrive parfois que la justification de $P(n)$ nécessite l'utilisation de $P(n-1)$ et de $P(n-2)$. On fait alors ce que l'on appelle une **récurrence double**, ou encore **récurrence d'ordre 2**, fondée sur le résultat suivant.

Corollaire 5 (Récurrence double)

Soit P une propriété définie sur $\mathbb{N}$. Si $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies et si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \big(P(n) \text{ ET } P(n+1)\big) \Rightarrow P(n+2),$$

alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exo 1.7

Démonstration. Appliquer le théorème 3 à la propriété $H(n)$: « $P(n)$ ET $P(n+1)$ ». □

Ex. 41. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

On peut calculer les premières valeurs prises par cette suite :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	2	3	5	9	17	33	65

Ce tableau nous suggère que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n + 1$.
Pour le prouver, posons $P(n)$: « $u_n = 2^n + 1$ » et montrons par récurrence double que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initiatlisation. $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies puisque $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $P(n)$ et $P(n+1)$. Alors d'après la définition de la suite :

$$u_{n+2} = 3 \times (2^{n+1} + 1) - 2 \times (2^n + 1) = 2^{n+2} + 1.$$

Cela prouve $P(n+2)$ et achève la récurrence.

Attention Dans le cas d'utilisation d'une récurrence double, ne surtout pas oublier de procéder à la double initialisation $P(0)$ et $P(1)$.

3 Récurrence forte

Il arrive parfois que la justification de $P(n)$ nécessite l'utilisation de toutes les propriétés $P(k)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. On fait alors une **récurrence forte**.

Corollaire 6 (Récurrence forte)

Soit P une propriété définie sur $\mathbb{N}$. Si $P(0)$ est vraie et si :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \big(P(0) \text{ ET } \cdots \text{ ET } P(n-1)\big) \Rightarrow P(n),$$

alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. On montre, par une récurrence simple à partir du rang 1 que la propriété :

$$H(n) \ : \ \text{« } \forall k \in [\![0, n]\!] \quad P(k) \text{ »}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. □

Remarque Comme l'illustre l'exemple suivant, on peut bien sûr faire une récurrence forte à partir d'un certain rang.

Ex. 42. Démontrons que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 possède (au moins) un diviseur premier. Pour tout $n \geqslant 2$, posons $P(n)$: « n possède un diviseur premier ».

Montrons par récurrence forte que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.

Initialisation. La propriété $P(2)$ est vraie, puisque 2 est premier.

Hérédité. Soit $n \geqslant 3$. Supposons $P(2), \ldots, P(n-1)$ vraies, et montrons $P(n)$. Procédons par disjonction de cas selon le caractère premier ou non de n.

- Si n est premier, alors n est un diviseur premier de lui-même.
- Si n n'est pas premier, alors il possède un diviseur d compris entre 2 et $n-1$. Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $P(d)$ est vraie. Ainsi, d possède un diviseur premier, qui est aussi un diviseur premier de n.

Exo 1.8

Cela montre $P(n)$ et achève par récurrence.

Ex. 43. Soit u une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Montrons que u est constante.

Posons $P(n)$: « $u_n = u_0$ », et montrons par récurrence forte que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. L'assertion $P(0)$ est trivialement vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(0), \ldots, P(n)$ vraies, et montrons $P(n+1)$. On a, en utilisant $P(1), \ldots, P(n)$:

$$(n+1)u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \underbrace{u_0 + u_0 + \cdots + u_0}_{(n+1) \text{ termes}} = (n+1)u_0$$

et donc $u_{n+1} = u_0$. Cela prouve $P(n+1)$ et achève la récurrence.

4 Récurrences finies

Corollaire 7 (Récurrence finie)

Soit $r \in \mathbb{N}$ et P une propriété définie sur $[\![0, r]\!]$. Si $P(0)$ est vraie et si :

$$\forall n \in [\![0, r-1]\!] \quad P(n) \Rightarrow P(n+1),$$

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![0, r]\!]$.

Exo 1.9

Démonstration. Appliquer le théorème 3 à la propriété $H(n)$: « $(n > r)$ OU $P(n)$ ». □

Corollaire 8 (Récurrence finie descendante)

Soit $r \in \mathbb{N}$ et P une propriété définie sur $[\![0, r]\!]$. Si $P(r)$ est vraie et si :

$$\forall n \in [\![1, r]\!] \quad P(n) \Rightarrow P(n-1),$$

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![0, r]\!]$.

Démonstration. Appliquer le résultat précédent à la propriété $H(n) = P(r-n)$. □

Remarque Comme l'illustrent les deux exemples suivants, on peut combiner le principe de récurrence finie avec celui de récurrence double/forte/à partir d'un certain rang.

Ex. 44. *(Récurrence finie forte)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $i_1, \dots, i_n$ des entiers distincts entre 1 et n vérifiant : $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad i_k \leqslant k$.

Montrons que $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad i_k = k$. Posons $P(k)$: « $i_k = k$ » et montrons par récurrence finie forte que $P(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Initialisation. On a $i_1 \leqslant 1$ et $i_1 \in [\![1, n]\!]$ donc $i_1 = 1$, ce qui prouve $P(1)$.

Hérédité. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Supposons $P(1), \dots, P(k)$ et montrons $P(k+1)$.

- D'après $P(1), \dots, P(k)$, on a $\{i_1, \dots, i_k\} = [\![1, k]\!]$.
- D'autre part, $i_1, \dots, i_n$ étant distincts, on a $i_{k+1} \notin \{i_1, \dots, i_k\}$, *i.e.* $i_{k+1} \notin [\![1, k]\!]$.
- On a donc $i_{k+1} \in [\![1, k+1]\!] \setminus [\![1, k]\!]$, c'est-à-dire $i_{k+1} = k+1$.

Cela prouve $P(k+1)$ et achève la récurrence.

Ex. 45. *(Récurrence finie descendante forte)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $i_1, \dots, i_n$ des entiers distincts entre 1 et n vérifiant : $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad i_k \geqslant k$.

Montrons que $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad i_k = k$. Posons $P(k)$: « $i_k = k$ » et montrons par récurrence finie forte descendante que $P(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Initialisation. On a $i_n \geqslant n$ et $i_n \in [\![1, n]\!]$ donc $i_n = n$, ce qui prouve $P(n)$.

Hérédité. Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Supposons $P(k), \dots, P(n)$ et montrons $P(k-1)$.

- D'après $P(k), \dots, P(n)$, on a $\{i_k, \dots, i_n\} = [\![k, n]\!]$.
- D'autre part, $i_1, \dots, i_n$ étant distincts, on a $i_{k-1} \notin \{i_k, \dots, i_n\}$, *i.e.* $i_{k-1} \notin [\![k, n]\!]$.
- On a donc $i_{k-1} \in [\![k-1, n]\!] \setminus [\![k, n]\!]$, c'est-à-dire $i_{k-1} = k-1$.

Cela prouve $P(k-1)$ et achève la récurrence.

S'entraîner et approfondir

Assertions, logique

1.1 Soit A, B et C trois points du plan formant un triangle $\mathcal{T}$.
→10

1. Écrire une assertion, portant sur les longueurs AB, BC et AC, exprimant que $\mathcal{T}$ est un triangle équilatéral.
2. En déduire une assertion exprimant que $\mathcal{T}$ n'est pas équilatéral.
3. Comment exprimer que $\mathcal{T}$ n'est pas isocèle ?

1.2 Soit n un entier relatif. Prouver que $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier.
→12

1.3 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique couple (f_1, f_2) tel que l'on ait $f = f_1 + f_2$ avec f_1 une fonction impaire et f_2 une fonction paire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
→16
La fonction f_1 est appelée la **partie impaire** de f et f_2 sa **partie paire**.

1.4
→19

1. Déterminer les fonctions g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \big(g(x) \geqslant 0 \text{ ou } g(x) \leqslant 0\big).$$
2. Déterminer les fonctions g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
$$(\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \geqslant 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \leqslant 0).$$

1.5
→20

1. Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, et le justifier.
$$(i) \quad \forall x \in E \quad \exists y \in E \quad x \leqslant y \qquad (iii) \quad \forall x \in E \quad \exists y \in E \quad x < y$$
$$(ii) \quad \exists y \in E \quad \forall x \in E \quad x \leqslant y \qquad (iv) \quad \forall y \in E \quad \forall x \in E \quad x \leqslant y$$
2. Reprendre les questions avec $E = \mathbb{R}$.

1.6 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
→20

1. Soit M un réel. Écrire une assertion exprimant que f est majorée par M.
2. Écrire une assertion exprimant que f est majorée.
3. Écrire une assertion exprimant que f n'est pas majorée.

Récurrence

1.7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :
→23
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$$
Montrer qu'il existe un unique couple (a, b) de réels tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (an + b)\,2^n$.

1.8 Montrer que tout entier $n \geqslant 2$ est un produit de nombres premiers.
→24

1.9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
→25
$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \leqslant 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}.$$

Solutions des exercices

1.1 1. Le triangle $\mathcal{T}$ est équilatéral si, et seulement si, $AB = BC = AC$.

2. Comme le triangle $\mathcal{T}$ est équilatéral si, et seulement si, $(AB = AC)$ ET $(AB = BC)$, il n'est pas équilatéral si, et seulement si, :

$$(AB \neq AC) \text{ OU } (AB \neq BC).$$

3. Le triangle $\mathcal{T}$ est isocèle lorsqu'il a deux côtés égaux, ce qui s'écrit :

$$(AB = AC) \text{ OU } (AB = BC) \text{ OU } (AC = BC).$$

Pour exprimer que $\mathcal{T}$ n'est pas isocèle, on nie la relation précédente, ce qui donne :

$$(AB \neq AC) \text{ ET } (AB \neq BC) \text{ ET } (AC \neq BC).$$

1.2 Raisonnons par disjonction de cas.

- Si n est pair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k$.
  On a alors $\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1)$.
- Si n est impair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k+1$.
  On a alors $\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (2k+1)(k+1)$.

Dans les deux cas, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier comme produit d'entiers.

1.3 **Analyse.** Supposons qu'il existe $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, impaire, et $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, paire, telles que $f = f_1 + f_2$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.
On obtient immédiatement :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = -f_1(x) + f_2(x),$$

ce qui, par somme et différence, donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

Par suite il existe au plus un couple (f_1, f_2) répondant au problème.

Synthèse. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons :

$$f_1(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

Il est alors immédiat de vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad f_1(-x) = -f_1(x) \quad \text{et} \quad f_2(-x) = f_2(x),$$

ce qui prouve que le couple (f_1, f_2) répond au problème.

1.4 1. L'assertion « $\forall x \in \mathbb{R} \quad \big(g(x) \geqslant 0$ OU $g(x) \leqslant 0\big)$ » affirme que, pour tout nombre réel x, le nombre réel $g(x)$ est positif ou négatif, ce qui est vrai. Ainsi, toutes les fonctions g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifient la propriété étudiée.

2. L'assertion « $(\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \geqslant 0)$ OU $(\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \leqslant 0)$ » signifie que g est positive ou que g est négative. Les fonctions cherchées sont donc celles qui ne changent pas de signe.

1.5 1.
- L'assertion (i) est vraie : pour chaque élément x choisi dans E, l'élément $y = x$ vérifie bien $x \leqslant y$.
- L'assertion (ii) est vraie : en effet, l'élément $y = 5$ est bien tel que, pour tout élément x de E, on ait $x \leqslant y$. Elle exprime que E admet un plus grand élément.
- L'assertion (iii) est fausse : en effet, pour l'élément $x = 5$, on ne peut pas trouver d'élément y de E vérifiant $5 < y$.
  On pourrait aussi, en utilisant un raisonnement similaire à celui du point précédent, dire que sa négation « $\exists x \in E \quad \forall y \in E \quad x \geqslant y$ » est vraie.
- L'assertion (iv) est fausse : en effet, l'élément $y = 1$ de E ne vérifie évidemment pas $\forall x \in E \quad x \leqslant y$.
  On pourrait aussi dire que sa négation « $\exists y \in E \quad \exists x \in E \quad x > y$ » est vraie en prenant par exemple $x = 2$ et $y = 1$.

2. Avec $E = \mathbb{R}$.
- L'assertion (i) reste vraie (même justification qu'à la question précédente).
- L'assertion (ii) est fausse car $\mathbb{R}$ n'admet pas de plus grand élément.
- L'assertion (iii) est vraie car, si x est un nombre réel quelconque, alors le réel $y = x+1$ vérifie $x < y$.
- L'assertion (iv) est fausse (même justification qu'à la question précédente).

1.6 1. L'affirmation « f est majorée par M » s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant M.$$

2. La fonction f est majorée si l'on peut trouver un réel M qui la majore, ce qui s'écrit :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant M.$$

3. On en déduit automatiquement la négation :

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) > M,$$

qui exprime le fait que f n'est pas majorée.

1.7 Procédons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons que (a, b) soit un couple de réels tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (an + b)\, 2^n$.

On a alors $b = u_0$ et $u_1 = 2\,(a + b)$ donc $a = \dfrac{u_1 - 2u_0}{2}$.

Cela prouve qu'en cas d'existence, il y a unicité.

Synthèse. Posons $a = \dfrac{u_1 - 2u_0}{2}$ et $b = u_0$ et montrons par récurrence que la propriété $P(n)$: « $u_n = (an + b)\, 2^n$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. On a $(a \times 0 + b)\, 2^0 = b = u_0$ et $(a \times 1 + b)\, 2^1 = 2a+2b = u_1$ donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies, et montrons $P(n+2)$.
On a, en utilisant $P(n)$ et $P(n+1)$:

$$\begin{aligned} u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n &= 4\big(a(n+1)+b\big)\,2^{n+1} + 4(an+b)\,2^n \\ &= 2^{n+2}\left(2\big(a(n+1)+b\big) - (an+b)\right) \\ &= 2^{n+2}\big(a(n+2)+b\big), \end{aligned}$$

ce qui prouve $P(n+2)$ et achève la récurrence.

1.8 Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $P(n)$: « n est un produit de nombres premiers ». Procédons par récurrence forte pour montrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

Initialisation. La propriété $P(2)$ est vraie, puisque 2 est premier.

Hérédité. Soit $n \geqslant 3$. Supposons $P(2), \ldots, P(n-1)$ vraies et montrons $P(n)$. Raisonnons par disjonction de cas.

- Si n est premier, alors n est le produit d'un seul nombre premier : lui-même.
- Si n n'est pas premier, il possède donc un diviseur d compris entre 2 et $n-1$. On a alors $n = d \times \dfrac{n}{d}$. Comme d et $\dfrac{n}{d}$ sont des entiers compris entre 2 et $n-1$, l'hypothèse de récurrence assure que ce sont des produits de nombres premiers ; par conséquent, n aussi.

Cela montre $P(n)$ et achève la récurrence.

1.9 Posons $P(k)$: « $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k \leqslant 1 + \dfrac{k}{n} + \dfrac{k^2}{n^2}$ ». Montrons par récurrence finie que $P(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Initialisation. L'assertion $P(1)$ est vraie car $1 + \dfrac{1}{n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$.

Hérédité. Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Supposons $P(k-1)$ et montrons $P(k)$. Écrivons :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1}.$$

En utilisant $P(k-1)$, et puisque $1 + \dfrac{1}{n} \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{n}\right)^k &\leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{k-1}{n}+\frac{(k-1)^2}{n^2}\right) \\ &= 1 + \frac{k}{n} + \frac{k-1+(k-1)^2}{n^2} + \frac{(k-1)^2}{n^3}. \end{aligned}$$

Pour prouver $P(k)$, il s'agit alors de prouver que :

$$\frac{k-1+(k-1)^2}{n^2} + \frac{(k-1)^2}{n^3} \leqslant \frac{k^2}{n^2},$$

ce qui, en multipliant par n^3, revient à :

$$n(k-1) + n(k-1)^2 + (k-1)^2 \leqslant nk^2$$

et, en simplifiant, équivaut à $(k-1)^2 \leqslant kn$. Cette dernière inégalité étant vraie car $0 \leqslant k-1 \leqslant k$ et $0 \leqslant k-1 \leqslant n$, cela prouve $P(k)$ et achève la récurrence.

Chapitre 2 : Ensembles
Applications
Relations

Ensembles Applications Relations

I Ensembles

La théorie des ensembles a vu le jour dans le dernier quart du XIX^e siècle. Il n'est pas question dans cette section d'en faire une étude axiomatique abstraite, mais plutôt d'en donner le vocabulaire et les règles d'utilisation.

1 Généralités sur les ensembles

Les notions d'**ensemble** et d'**élément** sont ici considérées comme des notions premières ; un ensemble correspond intuitivement à une « collection d'objets », dont les objets sont ce que l'on appelle ses « éléments ».

Notations Lorsque a est un élément et E un ensemble :
- pour signifier que a est un élément de E, on écrit $a \in E$;
- pour signifier que a n'est pas élément de E, on écrit $a \notin E$.

Remarque On peut définir un ensemble de deux grandes façons :
- en **extension**, c'est-à-dire en donnant la liste de ses éléments ;
- par **compréhension**, c'est-à-dire en donnant une condition d'appartenance à cet ensemble ; on écrit $\{x \in E \ : \ P(x)\}$ l'ensemble des éléments de E tels que la propriété $P(x)$ soit vraie.

Ex. 1. Ci-dessous, l'ensemble est défini, à gauche, en extension, et à droite, par compréhension :

$$\{0, 1, 2, 3\} = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \leqslant 3\}.$$

Ex. 2. L'ensemble A des entiers relatifs compris entre -2 et 2 s'écrit :
- en extension : $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$;
- par compréhension : $A = \{n \in \mathbb{Z} \ : \ -2 \leqslant n \leqslant 2\}$.

Ex. 3. L'ensemble B des entiers naturels pairs s'écrit :
- en extension : $B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
- par compréhension : $B = \{n \in \mathbb{N} \ : \ \exists k \in \mathbb{N} \quad n = 2k\}$.

Ex. 4. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction, alors l'ensemble de ses points d'annulation s'exprime naturellement par compréhension : $\{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) = 0\}$.

Remarques

- Dans l'écriture d'un ensemble en extension, on ne tient pas compte de l'ordre à l'intérieur des accolades ; ainsi on a $\{a, b\} = \{b, a\}$.
- La notation $E = \{a_1, \ldots, a_p\}$ ne nécessite pas que les éléments $a_1, \ldots, a_p$ soient distincts. On appelle **cardinal** de E, et l'on note $\operatorname{card} E$, le nombre d'éléments distincts de E.

Ex. 5. Soit x un réel. L'ensemble $\{1, x, x^2\}$ est de cardinal 1 si $x = 1$, de cardinal 2 si $x = 0$ ou $x = -1$ et de cardinal 3 sinon.

On admet qu'il existe un ensemble, appelé **ensemble vide** et noté $\varnothing$, qui ne contient aucun élément.

Ex. 6. On obtient naturellement l'ensemble vide quand on définit un ensemble par compréhension avec une condition d'appartenance jamais vérifiée. Par exemple $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$.

2 Inclusion, égalité d'ensembles

Définition 1

Soit E et F deux ensembles. On dit que F est un **sous-ensemble** ou une **partie** de E si tout élément de F est aussi élément de E.

Notations

- On dit aussi que l'ensemble F est inclus dans E et l'on note $F \subset E$.
- Lorsque $F \subset E$ et $F \neq E$, on dit que l'inclusion est **stricte** et l'on note $F \subsetneq E$.
- Au lieu de $F \subset E$, on écrit parfois $E \supset F$.

Traduction On a $F \subset E \iff \forall x \in F \quad x \in E$.

Ex. 7. Pour tout ensemble E, on a donc $E \subset E$ et $\varnothing \subset E$.

Ex. 8. On a la chaîne d'inclusions strictes suivante : $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Ex. 9. Soit E, F et G des ensembles tels que $E \subset F$ et $F \subset G$. On a évidemment $E \subset G$. En effet, pour $x \in E$, l'inclusion $E \subset F$ donne $x \in F$, puis l'inclusion $F \subset G$ offre $x \in G$.

Remarque Cet exemple traduit la transitivité de l'inclusion (cf. page 48).

Remarque Soit E et F deux ensembles.

- La négation de $F \subset E$ s'écrit $F \not\subset E$, et se lit « F n'est pas inclus dans E ». On a donc :
$$F \not\subset E \iff \exists x \in F \quad x \notin E.$$
- Les ensembles E et F sont égaux si tout élément de l'un est élément de l'autre :
$$E = F \iff \big(E \subset F \quad \text{et} \quad F \subset E\big).$$

Point méthode (double inclusion) La principale méthode pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux est d'établir la double inclusion $E \subset F$ et $F \subset E$.

Ex. 10. Dire que les solutions d'une équation $(\mathcal{E})$ sont les réels x_1 et x_2 signifie que son ensemble solution est $\mathcal{S} = \{x_1, x_2\}$. Le plus souvent, on le prouve par double inclusion, ce qui revient à montrer :

- d'une part que x_1 et x_2 sont effectivement solutions de $(\mathcal{E})$, ce qui offre $\{x_1, x_2\} \subset \mathcal{S}$;
- d'autre part, qu'il n'y a pas d'autre solution à $(\mathcal{E})$ que x_1 et x_2, ce qui offre $\mathcal{S} \subset \{x_1, x_2\}$.

3 Intersection, réunion, différence, complémentaire

Définition 2

Soit E et F deux ensembles.

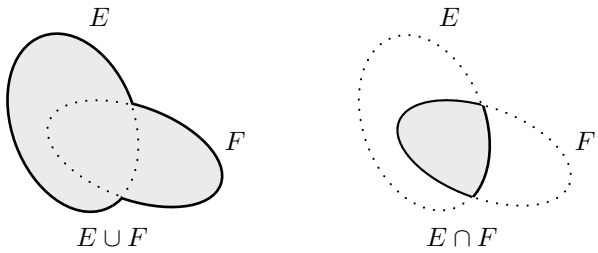
- La **réunion** de E et F est l'ensemble, noté $E \cup F$, des éléments qui sont dans E ou dans F.
- L'**intersection** de E et F est l'ensemble, noté $E \cap F$, des éléments qui sont à la fois dans E et dans F.

Traduction On a donc :

$$x \in E \cup F \iff (x \in E \quad \text{ou} \quad x \in F) \qquad \text{et} \qquad x \in E \cap F \iff (x \in E \quad \text{et} \quad x \in F).$$

Ex. 11. On a $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \geqslant 4\} =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

Illustration



Propriétés élémentaires Étant donné trois ensembles A, B et C, on a :

A	$\subset$	$A \cup B$		$A \cap B$	$\subset$	A
$A \cup A$	$=$	A		$A \cap A$	$=$	A
$A \cup \varnothing$	$=$	A		$A \cap \varnothing$	$=$	$\varnothing$
$A \cup B$	$=$	$B \cup A$		$A \cap B$	$=$	$B \cap A$
$A \cup (B \cup C)$	$=$	$(A \cup B) \cup C$		$A \cap (B \cap C)$	$=$	$(A \cap B) \cap C$
$A \cap (B \cup C)$	$=$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$		$A \cup (B \cap C)$	$=$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

Exo 2.1

Les démonstrations de ces résultats sont assez simples. Les premières découlent des définitions, les dernières peuvent se prouver (cf. exemple 12), ou bien par double inclusion, ou bien en utilisant les propriétés sur les connecteurs « et » et « ou ».

Ex. 12. Démontrons la relation $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ de deux façons différentes.

Par double inclusion.

- Montrons l'inclusion $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
  Soit $x \in A \cap (B \cup C)$. Alors $x \in A$ et $x \in B \cup C$. Distinguons deux cas (non exclusifs) :
  - si $x \in B$, alors $x \in A \cap B$ donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
  - si $x \in C$, alors $x \in A \cap C$ donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

  Dans les deux cas, on a $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
  D'où l'inclusion $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Montrons l'autre inclusion.
  - On a $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B \cup C$, donc $A \cap B \subset A \cap (B \cup C)$.
  - De même, on a $A \cap C \subset A \cap (B \cup C)$.

  D'où l'inclusion $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.

En utilisant les propriétés des connecteurs logiques. On a :

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \quad \text{et} \quad (x \in B \quad \text{ou} \quad x \in C) \\ &\iff (x \in A \quad \text{et} \quad x \in B) \quad \text{ou} \quad (x \in A \quad \text{et} \quad x \in C) \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

D'où l'égalité $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Remarque Les propriétés $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ et $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ rendent superflue l'utilisation des parenthèses. La réunion et l'intersection des trois parties A, B et C se notent donc simplement :

$$A \cup B \cup C \qquad \text{et} \qquad A \cap B \cap C.$$

Définition 3 (Différence ensembliste)

Soit E et F deux ensembles. On appelle **différence** de E et F, et l'on note $E \setminus F$, l'ensemble des éléments qui sont dans E mais pas dans F.

Traduction On a donc : $E \setminus F = \{x \in E \,:\, x \notin F\}$.

Définition 4

Soit E un ensemble et A une partie de E. L'ensemble $E \setminus A$ est appelé le **complémentaire** de A dans E.

Notation Lorsque l'ensemble E est fixé et qu'il n'y a pas de confusion possible, alors le complémentaire de A dans E est aussi noté $\overline{A}$ ou A^c.

Remarque Soit A et B deux parties d'un ensemble E. On dispose des égalités évidentes suivantes :

$$\overline{\overline{A}} = A \qquad A \cup \overline{A} = E \qquad A \cap \overline{A} = \varnothing$$

$$A \setminus B = A \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Exo 2.2

ainsi que des équivalences suivantes :

$$A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A} \qquad \text{et} \qquad A = B \iff \overline{A} = \overline{B}.$$

Extension de la réunion et l'intersection à une famille de parties

Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de E (notion qui sera explicitée page 40), alors la réunion et l'intersection des éléments de cette famille sont notées respectivement :

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \,:\, \exists i \in I \quad x \in A_i\} \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \,:\, \forall i \in I \quad x \in A_i\}\,.$$

Les résultats vus pour la réunion et l'intersection de deux ensembles se généralisent :

Exo 2.3

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i} \qquad \text{et} \qquad \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

4 Produit cartésien

Cas de deux ensembles

À partir de deux éléments a et b, on peut construire le **couple** (a, b), avec la propriété fondamentale suivante :

$$(a, b) = (a', b') \iff (a = a' \quad \text{et} \quad b = b').$$

Définition 5

Étant donné deux ensembles A et B, on appelle **produit cartésien** de A par B l'ensemble, noté $A \times B$, des couples de la forme (a, b), avec $a \in A$ et $b \in B$.

Traduction On a donc : $A \times B = \big\{(a, b) \;\big|\; a \in A \quad \text{et} \quad b \in B\big\}$.

Notation Le produit cartésien $A \times A$ se note plus simplement A^2.

Attention L'assertion $(x, y) \neq (0, 0)$ n'équivaut pas à $\big((x \neq 0) \quad \text{et} \quad (y \neq 0)\big)$. En effet, si $(x, y) = (1, 0)$, alors la première est vraie mais pas la seconde. On dispose simplement de l'implication suivante :

$$\big((x \neq 0) \quad \text{et} \quad (y \neq 0)\big) \implies (x, y) \neq (0, 0).$$

Ex. 13. Si $E = \{0, 1\}$ et $F = \{0, 1, 2\}$, alors on a :

$$E \times F = \big\{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\big\}.$$

Attention Le couple (x, y) s'écrit avec des parenthèses, pas des accolades ! En effet, $\{x, y\}$ désigne l'ensemble formé par les éléments x et y, et en particulier :

- si $x = y$, alors $\{x, y\} = \{x\}$;
- si $x \neq y$, alors $\{x, y\} = \{y, x\}$ mais $(x, y) \neq (y, x)$.

Généralisation à plus de deux ensembles

De même, à partir de trois éléments x, y et z, on peut construire le triplet (x, y, z), caractérisé par la propriété fondamentale :

$$(x, y, z) = (x', y', z') \iff (x = x' \quad \text{et} \quad y = y' \quad \text{et} \quad z = z').$$

Étant donné trois ensembles E, F et G, on peut construire leur produit cartésien, noté $E \times F \times G$, défini par :

$$E \times F \times G = \{(x, y, z) \mid x \in E \quad \text{et} \quad y \in F \quad \text{et} \quad z \in G\}\,.$$