Vincent Rohart

J'entre en prépa

Les clés de la réussite en maths

- Méthodologie, conseils
- Guide de bonne rédaction
- Astuces à savoir absolument
- Les classiques incontournables
- Formulaires fondamentaux
- Des exercices d'application
- Un cahier de vacances

2e édition



ellipses

J'entre en prépa

Les clés de la réussite en maths

Références sciences

J'entre en prépa

Les clés de la réussite en maths

2e édition

Vincent Rohart

ellipses

Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-105997
Dépôt légal : septembre 2025
©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER
LE
PHOTOCOPILLAGE
TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

À mes élèves.

Τῆς παιδείας τὴν μὲν ῥίζαν εἶναι πικράν,
τὸν δὲ καρπὸν γλυκύν.

Ἰσοκράτης

La racine de l'éducation est amère
mais son fruit est doux.

Isocrate (436-338 av. J.-C.)

Avant-propos

Vous êtes en Terminale et vous voulez entrer en classe préparatoire MPSI, MP2I, PCSI, PTSI, TSI, ECG ou BCPST où les mathématiques occupent une part importante. Vous êtes conscient(e) que c'est une matière où *rigueur* est le mot d'ordre, et où l'approximation des raisonnements ou de la syntaxe n'a pas sa place.

Vous êtes déjà en classe préparatoire, et vous voulez maîtriser la rigueur de rédaction qui vous fait un peu défaut, surtout après deux mois de vacances. Vous vous êtes aperçu(e) que les exigences demandées dès le début de l'année sont ambitieuses, et qu'il va falloir vite s'approprier le langage universel de la science : celui des mathématiques.

Quelle que soit votre situation, cet ouvrage a pour but de remettre à plat les mauvaises habitudes de rédaction, tout en permettant d'apprendre les réflexes de base pour réussir en mathématiques. Après un ensemble de conseils généraux (à quel rythme travailler, comment apprendre son cours, qu'attend-on lors d'une khôlle, etc.) on expose un guide de bonne rédaction pour ne plus écrire approximativement ce que l'on pense et épurer son discours des erreurs courantes. On espère ainsi donner au lecteur et à la lectrice de nombreux atouts pour partir sur de bonnes bases, et solidifier un socle de connaissances sur lequel il ou elle pourra progresser.

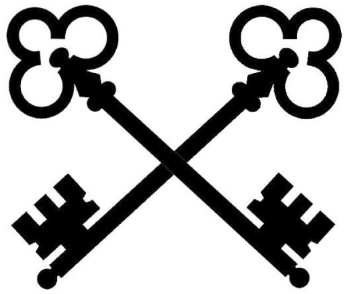
Pour cette nouvelle édition, j'ai tenu compte des évolutions du lycée et de ses réformes. Les nombres complexes ne sont enseignés qu'en *maths expertes*, aussi ai-je rédigé un chapitre d'introduction à cette magnifique trouvaille italienne du XVIe siècle qui, contrairement à ce que le mot *complexe* peut laisser croire, simplifie de nombreuses situations.

Un tel guide ne serait pas complet s'il n'exposait pas les « astuces » courantes permettant de simplifier une expression, de lever une forme indéterminée dans une limite, ou de pouvoir calculer une primitive. Pour être optimales, ces astuces demandent de bien connaître les outils de base : un formulaire général

est là pour rappeler les dérivées usuelles, les formules de trigonométrie et bien d'autres choses encore.

Enfin, pour peaufiner vos armes, nous vous exposons les grands classiques que tout(e) étudiant(e) de classe préparatoire doit avoir rencontrés au moins une fois dans sa vie. Il en va ainsi, par exemple, des intégrales de Wallis, des inégalités de convexité, ou de la série harmonique. Des exercices d'application, accessibles dès la Terminale, sont là pour entraîner votre nouvelle rigueur.

Avec tout cela, vous serez en mesure d'attaquer, en mathématiques, ces deux années difficiles, mais ô combien gratifiantes, que sont les classes préparatoires aux grandes écoles.



Pour la relecture de cette deuxième édition, je remercie tous les lecteurs qui m'ont contacté pour me signaler des coquilles. Mon collègue et ami Jean-Louis Cornou a encore eu la gentillesse de me relire et d'apporter ses remarques pertinentes au texte. S'il reste des coquilles, c'est donc uniquement de ma faute. Je tiens à jour un *erratum* en ligne sur

`http://vrohart.e-monsite.com/`

dans le menu `Documents divers`. Vous pouvez aussi me contacter *via* ce site (dans l'onglet `Contact`) pour me signaler vos trouvailles en matière de coquille. Je vous en saurai le meilleur gré du monde en implorant votre indulgence.

Merci enfin à mes amis Djamal et Simon chez qui je me réfugie régulièrement, dans les montages isolées de la région niçoise, pour écrire des livres, jouer du violoncelle et lire du grec ancien.

Table des matières

1 Quelques méthodes pour réussir **1**
- 1 Conseils généraux . . . 1
- 2 Apprendre ou comprendre ? . . . 2
- 3 Travailler son cours . . . 4
- 4 Chercher ses exercices de TD (travaux dirigés) . . . 4
- 5 Préparer une khôlle (interrogation orale) . . . 5
- 6 Chercher ses DL (devoirs en temps libre, dits « maison ») . . . 6
- 7 Réussir ses DS (devoirs surveillés) . . . 6
- 8 Répondre aux questions posées . . . 7
- 9 Quel matériel acheter pour la rentrée ? . . . 8

2 Un peu de logique **9**
- 1 Assertions et prédicats . . . 9
- 2 Les connecteurs $\neg$ (non), $\vee$ (ou), $\wedge$ (et) . . . 10
- 3 Le maltraité connecteur $\Longrightarrow$ . . . 14
- 4 L'équivalence $\Longleftrightarrow$ . . . 17
- 5 Le raisonnement par l'absurde . . . 18
- 6 Le raisonnement par analyse synthèse . . . 19
- 7 Le raisonnement par récurrence . . . 21
- 8 L'usage des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ . . . 23
- 9 Exercices corrigés . . . 29
  - 9.1 Énoncés . . . 29
  - 9.2 Solutions . . . 32

3 Guide de bonne rédaction **37**
- 1 Commençons par le français . . . 37
  - 1.1 Locutions incorrectes souvent rencontrées . . . 38
  - 1.2 Les mots de liaison *or, donc, si, alors, tel que, etc.* . . . 40
- 2 Les lettres et symboles en mathématiques . . . 41

2.1 Contraintes typographiques . . . 41
2.2 Inconnues, variables et paramètres . . . 42
2.3 Le piège des lettres muettes . . . 44
2.4 Présenter un objet : les verbes *soit*, *posons* et *notons* . . . 45
2.5 Les définitions . . . 47
2.6 Les théorèmes, lemmes et autres corollaires . . . 48
3 Les mauvaises rédactions . . . 49
3.1 Les hypothèses et les conclusions . . . 49
3.2 Toujours présenter ce que l'on introduit . . . 51
3.3 L'écriture des ensembles . . . 52
3.4 L'irrésistible confusion entre f et $f(x)$ . . . 53
3.5 Se tromper de monde . . . 55
4 Exercices corrigés . . . 57
4.1 Énoncés . . . 57
4.2 Solutions . . . 58

4 Les nombres complexes **61**
1 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes . . . 61
1.1 Pourquoi de nouveaux nombres ? . . . 61
1.2 Calculs dans $\mathbb{C}$ . . . 63
1.3 Équations du second degré dans $\mathbb{C}$ . . . 65
1.4 Et au delà du second degré ? . . . 68
1.5 Le prix à payer : adieu à l'ordre ! . . . 68
2 Interprétation géométrique . . . 70
2.1 Représentation dans le plan . . . 70
2.2 L'exponentielle complexe . . . 72
2.3 Racines n^{e} d'un nombre complexe non nul . . . 74
2.4 Complexes et transformations du plan . . . 76
3 Exercices corrigés . . . 78
3.1 Énoncés . . . 78
3.2 Solutions . . . 79

5 Les astuces en maths **83**
1 L'astuce belge . . . 83
2 L'astuce du télescopage . . . 85
3 L'astuce de la quantité conjuguée . . . 86
4 L'astuce de l'arc-moitié . . . 86
5 L'astuce de l'intégration par parties avec 1 . . . 88
6 L'astuce de la division euclidienne de polynômes . . . 89
7 L'astuce de la somme-différence . . . 91
8 L'astuce de Cauchy-Schwarz . . . 92
9 L'astuce des Schtroumpfs . . . 93

10 L'astuce de calcul pour 15^2, 25^2, 35^2, ..., 95^5 95
11 Astuces physiciennes 95
11.1 Dérivée d'une composée 96
11.2 Résolution de certaines équations différentielles 97
11.3 Changement de variable dans une intégrale 99
12 L'astuce des dérivées de cos et sin 100
13 Astuce pour se souvenir de $\cos(a \pm b)$ et $\sin(a \pm b)$ 101
14 Astuce du renversement des doubles inégalités 101
15 Astuce pour compter le nombre de termes dans une somme . . 102

6 Classiques incontournables 103
1 Algèbre 103
1.1 Suites arithmétiques 103
1.2 Suites géométriques 104
1.3 Identité remarquable $a^{n+1} - b^{n+1}$ 105
1.4 Formule du binôme $(a+b)^n$ 106
1.5 $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont en bijection 108
1.6 Infinité de l'ensemble des nombres premiers 109
2 Analyse 110
2.1 Inégalités de convexité 110
2.2 Croissances comparées (1) 111
2.3 Croissances comparées (2) 114
2.4 L'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 115
2.5 Les intégrales de Wallis 116
2.6 Suites imbriquées 119
2.7 La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ 121
2.8 La série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 125
2.9 La série d'Euler $\sum \frac{1}{n^2}$ 126
2.10 La série de Neper $\sum \frac{1}{n!}$ et l'irrationalité de e 127
3 Probabilité 129
3.1 Probabilité d'une réunion de trois événements 129
3.2 Les anniversaires 130
3.3 Indépendance d'événements 131
3.4 Chaîne de Markov à deux états 132

7 Entraînement mathématique estival 135
1 Du calcul 135
2 Des équations 136
3 Des inéquations 137
4 De la Géométrie 138
5 Des dérivées 139

6 Des intégrales 140
7 Solutions 141

8 Formulaires **151**
1 Nombres complexes 151
2 Trigonométrie circulaire 153
3 Formules de Calcul infinitésimal 155
4 Dérivées usuelles 156
5 Primitives usuelles 158
6 Sommes célèbres 159
7 Accentuation et ornementation mathématiques 160

Index **161**

Chapitre

1 QUELQUES MÉTHODES POUR RÉUSSIR

Le mot *méthode* vient du grec : μετά [méta] (après/avec) + ὁδός [hodos] (chemin), mot dont la racine se retrouve dans *cathode* et *anode* en chimie, mais aussi dans *exode*. Il n'y a pas de recettes magiques qui vous transformeront en mathématicien ou mathématicienne, en revanche, on peut augmenter ses chances de réussite en empruntant quelques bons chemins.

1 Conseils généraux

On peut résumer les attentes des professeurs de classe préparatoire en ces quelques lignes.

> On attend des élèves motivés, travailleurs et prêts à s'engager pour progresser et repousser ses limites, voire les dépasser !
>
> L'idéal est bien sûr d'arriver en prépa avec des bases solides. Les professeurs n'attendent pas que vous sachiez des choses compliquées en avance : ils souhaitent plus que tout que vous maîtrisiez le calcul sur les fractions, les puissances, les équations de droites, les études de fonctions où il faut étudier le signe d'une dérivée que l'on aura auparavant factorisée, etc.

Voici de façon plus détaillée quelques conseils.

• Avoir une **bonne hygiène de vie** : dormir suffisamment (7 heures par nuit est un minimum recommandé) et donc se coucher avant minuit, faire un peu de sport chaque semaine. Dans certaines prépas, l'EPS est obligatoire : c'est une bonne chose [1].

1. Un collègue m'a encore raconté l'été dernier, dépité, que l'un de ses élèves n'a pas été reçu à l'École polytechnique à cause de l'épreuve sportive.

• Ne pas abandonner ses **loisirs** : ce serait source de déprime. Mais attention, les compétitions ou les auditions de conservatoire sont peut-être à mettre entre parenthèses pour les deux (ou trois) années de prépa.

• Travailler **régulièrement**. Il ne sert à rien de passer six heures acharnées sur son cours la veille d'un devoir ou d'une khôlle. Il faut travailler (un peu ?) chaque jour afin de bien assimiler les notions : le cerveau a besoin de temps.

• Quand on travaille, on **se coupe de toute source de distraction** : pas de notification qui va vous distraire et ancrer quelque part dans votre esprit qu'il est possible que l'on vous contacte à tout instant. On éteint le téléphone et on le range.

• À la fin de chaque journée, passer une dizaine de minutes par matière pour faire un **bilan du cours de la journée** : *qu'ai-je appris aujourd'hui ? Quels sont les résultats importants du cours ?* Il est cependant important de revenir dessus le lendemain ou deux jours après (cf. la théorie de la *courbe de l'oubli*).

• Il faut certes se reposer le week-end, mais **il ne faut pas passer des heures sur les réseaux sociaux** à regarder ces petites vidéos courtes, très amusantes certes, mais très pauvres intellectuellement, car c'est la méthode infaillible pour faire fondre inutilement son temps de travail et ainsi rater ses classes préparatoires.

• **Organiser son temps de travail**. Vous avez l'impression que les journées sont trop courtes ? Une astuce presque magique : organiser ses journées avec un agenda en ligne et programmer des créneaux horaires (et s'y tenir). Le temps ainsi dégagé est à peine croyable.

2 Apprendre ou comprendre ?

Apprend-on avant d'avoir compris, ou l'inverse ? Épineuse question : si l'on apprend sans comprendre, que va-t-on retenir ? Si l'on n'apprend pas, comment peut-on espérer comprendre ? Fait instructif : en grec ancien, le mot

μανθάνω

qui se lit [man'tʰanō] *signifie à la fois* j'apprends *et* je comprends. *Vous l'avez reconnu : il a donné le mot* mathématique[2]. *Ainsi, le grec nous donne la réponse : comprendre et apprendre se font simultanément.*

• **Il y a des choses qui s'apprennent sans comprendre.** Par exemple l'alphabet grec. Pourquoi α s'appelle-t-il *alpha* ? Parce que c'est une convention.

2. La racine de ce verbe est μαθ [matʰ], les deux ν ne sont que des ajouts (des *infixes* on dit) de la conjugaison. *Leçon* se dit μάθημα [matʰēma], même encore en grec moderne.

Exemple. Une fonction qui est dérivable et dont la dérivée est continue s'appelle une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Il n'y a rien à comprendre (si ce n'est les mots utilisés), c'est une définition.

• **Il y a des choses qui s'apprennent après se les avoir représentées**, par exemple avec un schéma, ou en se donnant un exemple. Une fois représentées, on trouve un moyen de les enregistrer de façon durable, avec des moyens mnémotechniques, ou en scandant la phrase à retenir (comme pour une récitation).

Exemple. Un théorème sur les suites dit que *toute suite réelle croissante et majorée converge*. Cette phrase doit être répétée, comme une musique, à tel point que l'oubli d'une seule syllabe doit sonner faux. Auparavant, on aura fait un dessin représentant effectivement une suite croissante, majorée, en se convaincant qu'elle a bien une limite finie (ce que veut dire *converger*).

• **Il y a des choses qui s'apprennent après les avoir démontrées**, c'est par exemple le cas des formules de trigonométrie, que l'on démontre une fois, et puis c'est tout. Il faut ensuite les retenir par cœur.

Exemple. Les deux formules de trigonométrie les plus connues sont

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b), \end{aligned}$$

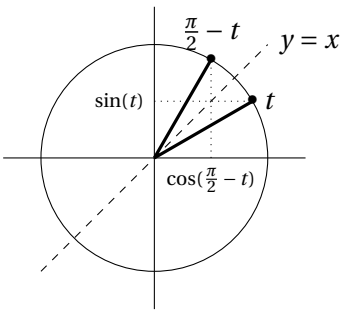
valables pour tous réels a et b. On les démontre dans le cours de géométrie (grâce au produit scalaire) et on les retient ensuite grâce au moyen mnémotechnique suivant

— cosinus = non mélange, non respect,
— sinus = mélange, respect.

En effet, dans la formule donnant $\cos(a+b)$ les fonctions cos et sin ne se mélangent pas, et le signe + devient − : il n'y a pas respect du signe. C'est le contraire pour $\sin(a+b)$.

• **Il y a des choses qui ne s'apprennent pas par cœur, on les retrouve rapidement en cas de besoin**.

Exemple. Une formule de trigonométrie dit que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t)$ pour tout réel t. Plutôt que d'apprendre par cœur cette importante relation et de risquer de se tromper, mieux vaut toujours dessiner mentalement un cercle trigonométrique, de placer les angles t et $\frac{\pi}{2} - t$, et de constater une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$: les abscisses et les ordonnées sont donc échangées.



3 Travailler son cours

De façon simplifiée, un cours de mathématiques est un ensemble de définitions, parfois motivées par des situations rencontrées en physique, de théorèmes avec leurs démonstrations et d'exemples d'application.

• Il faut apprendre son cours avec une feuille de **brouillon**. Refaire les démonstrations sur le brouillon, pour vérifier que toutes les étapes sont comprises. Refaire sur le brouillon les exemples du cours.

• Un théorème s'apprend avec ses **hypothèses**, et pas seulement la formule qui vient à la fin. Si vous voulez sortir du lot, vous démarquer des autres, impressionner la personne qui vous évaluera, et par conséquent gagner des points au concours : appliquez cette consigne.

• Privilégier la mémorisation des **étapes/idées clés** dans les démonstrations, plutôt que l'apprentissage brutal : il faut synthétiser, réduire, compresser et ne retenir que les idées articulantes d'une preuve. C'est cela dont vous aurez besoin plus tard dans votre vie professionnelle.

• On doit absolument comprendre **l'architecture du cours**, des chapitres, pourquoi telle notion est utile pour telle autre ? Pourquoi ce lemme avant ce théorème ? Pour arriver à quoi ? Au fait, le titre du paragraphe, c'était quoi ?

• Faire des **fiches-bilan** : y inscrire le plan du cours, les théorèmes importants, les méthodes clés. Il est important de les faire soi-même : c'est leur conception qui permettra à votre cerveau de bien mémoriser. Relire les fiches deux-trois jours après, comme expliqué plus haut.

• Un bon conseil : numéroter toutes ses copies de cours, ses TD, pour pouvoir les remettre dans l'ordre sans problème en cas d'accident.

• Allez, on vous livre le plus secret des trucs pour réussir : réquisitionnez votre petit frère, cousin, neveu, copain/copine ou nounours et faites-lui un mini cours de maths sur les notions apprises. Si vous êtes capable de le faire, **si vous savez jouer le prof**, c'est bon, c'est dans la boîte ! Une citation traditionnellement attribuée à A. Einstein dit : « si vous ne pouvez pas expliquer quelque chose à un enfant de six ans, c'est que vous ne l'avez pas compris ».

4 Chercher ses exercices de TD (travaux dirigés)

Les séances d'exercices sont faites pour assimiler le cours au travers d'exercices progressifs choisis par votre professeur. Il n'est pas exagéré de dire que chercher ses exercices de TD est la principale activité en mathématiques.