PSI
PSI*

Walter Damin
Michel Goumi
Ivan Gozard
Bertrand Hauchecorne
Olivier Leuck

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHS

- Méthodologie et objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Exercices-type oraux
- Corrigés détaillés et commentés

6e édition

ellipses

Mathématiques
PSI/PSI*

PRÉPAS SCIENCES

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Mathématiques PSI/PSI*

6e édition

ouvrage coordonné par

Walter DAMIN

Professeur au lycée Pierre-Paul Riquet (Saint-Orens-de-Gameville)

Michel GOUMI

Professeur au lycée E. Perrier (Tulle)

Ivan GOZARD

Professeur au lycée Carnot (Dijon)

Bertrand HAUCHECORNE

Professeur au lycée Pothier (Orléans)

Olivier LEUCK

Professeur au lycée R. Follereau (Belfort)

ellipses

COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

Les notices culturelles « Un mathématicien » et « Un peu d'histoire » des pages de titre des chapitres ont été rédigées par Bertrand Hauchecorne.

Les macros de cet ouvrage ont été réalisées par Nicolas Nguyen en LaTeX.

ISBN 9782340-117976
Dépôt légal : juillet 2026
©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupu-leusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en physique-chimie comme en mathématiques ou sciences industrielles.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthodes » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre. Dans cet ouvrage, un certain nombre de méthodes sont consacrées à l'**utilisation de l'outil Python** soit pour illustrer une problématique mathématique au programme, soit pour pouvoir démarrer des exercices de mathématiques où on utilise cet outil. Les derniers exercices de la plupart des chapitres de cet ouvrage sont justement dédiés à cette utilisation de Python. Ce sont des exercices inspirés de ceux posés aux oraux en filière PSI.

La partie « vrai/faux » permet de tester votre recul par rapport au programme et de vous révéler les mauvais réflexes à rectifier. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Du nouveau dans cette édition :

- Une **note méthodologique** en début d'ouvrage, vous aide à aborder les concours dans les meilleures conditions.
- Des « **exos-minutes** » dans chaque chapitre, plutôt faciles à résoudre, vous permettent de tester vos réflexes en application directe du cours et une ou deux étoiles vous indiquent les exercices plus difficiles à résoudre.
- Dans chaque chapitre des **exercices déjà donnés aux épreuves orales**, vous entrainent à affronter avec succès les oraux.

Ainsi l'ouvrage de maths comme ceux de physique, de chimie et de SII vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

Conseils et méthodologie en PSI VII

1. Espaces vectoriels et applications linéaires 1
2. Calcul matriciel 57
3. Déterminants 105
4. Réduction des endomorphismes 131
5. Espaces préhilbertiens réels et euclidiens 191
6. Endomorphismes d'un espace euclidien 237
7. Espaces vectoriels normés 297
8. Séries numériques 355
9. Suites et séries de fonctions 405
10. Séries entières 441
11. Intégration sur un intervalle 481
12. Interversion de limites et d'intégrales – Intégrales à paramètres 521
13. Dérivabilité des fonctions vectorielles 567
14. Équations différentielles linéaires 591
15. Fonctions de plusieurs variables 631
16. Variables aléatoires discrètes 673

Index 745

Conseils et méthodologie en PSI

Si vous tenez ce livre jaune entre vos mains, c'est que vous avez probablement été admis à passer en deuxième année de classes préparatoires aux grandes écoles : Félicitations ! Le nouvel objectif est maintenant de réussir votre deuxième année pour intégrer l'école de vos rêves.

Cette deuxième année sera rythmée par plusieurs échéances marquantes :

- Les épreuves écrites des concours étalées généralement sur les mois d'avril et mai ;
- les résultats des épreuves écrites (admissibilités) au début du mois de juin ;
- les épreuves orales qui se tiennent de la fin du mois de juin jusqu'à fin juillet ;
- les résultats des épreuves orales (admissions) à la toute fin du mois de juillet ;
- les propositions des écoles durant tout le mois d'août.

C'est donc une année différente de celle de sup qui vous attend. En seconde année, on doit penser aux concours et simplement à ça. L'important n'oubliez pas, c'est d'être prêt le jour de l'écrit. Afin que votre préparation se déroule dans les meilleurs conditions, il convient de mettre en place à partir du mois de septembre une méthode de travail efficace et adaptée à vos objectifs. Nous vous proposons ici quelques éléments qui vous aideront à vous organiser en mathématiques, mais qui sont facilement transposables dans les autres matières scientifiques.

Tout ce qui suit est à lire et à relire autant de fois que nécessaire pendant l'année.

☞ Qualités générales à respecter

1) La motivation : il faut être motivé et le mieux pour cela, c'est avoir un but. Pensez aux écoles qui vous intéressent le plus et imaginez vous les intégrer. Une bonne motivation vous donnera envie de travailler, ce qui est important pour l'écrit. Et à l'oral, en particulier dans une épreuve type entretien du Jury, les examinateurs sentiront votre motivation.

2) La concentration : soyiez concentré dès que vous êtes en classe. On va encore le rappeler plus loin. Cela implique qu'il faut éloigner physiquement les distractions (téléphone, manga/livres, internet en informatique etc.). Souvent les élèves ont maintenant une tablette avec eux pour remplacer les notes manuscrites. Mais cette tablette ne doit servir qu'à cela !

3) L'organisation : la première chose, c'est de ne pas accumuler la fatigue. Ainsi, il faut donc se mettre un horaire de couvre-feu raisonnable le soir. Et pour cela, il faut déjà bien gérer le temps au lycée et le temps chez vous, que ce soit le soir ou en fin de semaine. Justement, le samedi et le dimanche, reprenez des notions vues dans la semaine, la répétition c'est important. C'est le moment pour comprendre ce qui vous a manqué pour avoir une bonne note à la khôlle de la semaine. Prenez aussi un peu de temps pour vous aérer. C'est le Week-end. Pendant les trois « petites vacances », (on oublie les vacances de printemps parfois au milieu des concours selon le calendrier), il faudra reprendre les connaissances acquises au cours des mois précédents et s'entraîner (par exemple avec le **Prépasciences**). Et aussi en profiter pour faire de bonnes nuits de sommeil !

4) L'aide et l'entraide : pour commencer, il ne faut pas hésiter à poser des questions en classe que ce soit dans le cours ou au moment des TD. N'hésitez pas non plus à être volontaire pour aller au tableau si votre professeur demande à quelqu'un d'y passer. Et cela même si vous n'avez qu'une solution partielle. Au tableau, on apprend souvent mieux qu'à sa place car on est forcément plus attentif. Par ailleurs, n'hésitez pas non plus à demander de l'aide à vos camarades par exemple sur une partie du cours ou sur une question d'un devoir à la maison. Vous pouvez aussi confrontrer vos points de vue et vous questionner mutuellement. C'est le meilleur moyen de vous rendre compte que vous maîtrisez (ou non) un sujet. Un moment idéal pour cela, c'est un peu avant une khôlle. Entraînez-vous à faire des exercices ou des questions de cours avec vos collègues du trinôme.

☞ L'apprentissage du cours

C'est probablement la partie la plus importante, malheureusement trop souvent négligée par certains élèves. Le cours proposé par votre professeur devra être travaillé avec soin, et il sera d'autant plus facile de le faire que vous aurez été attentif pendant les séances en classe (voir les qualités générales à respecter).
Souvent, une seule lecture de ce cours ne suffira pas et il faudra y « repasser » plusieurs fois ! N'hésitez pas à vous réciter à haute voix les définitions et énoncés des théorèmes, et même à les écrire au brouillon pour être certain de bien les connaître.

La partie **Résumé de cours** proposée dans ce **Prépasciences**, vous permettra, avant un DS, une khôlle ou avant les concours, de vous remettre en tête les notions les plus importantes.
Vous pouvez utiliser ce résumé de cours pour vous faire des fiches de cours.
Ces fiches, vous pourrez les amener partout, par exemple en allant passer les oraux !

Enfin, n'oubliez pas ensuite de faire systématiquement la partie **Vrai-Faux** qui sera aussi l'occasion de vous mettre en garde contre des **erreurs classiques**. D'ailleurs, en fin de chaque corrigé des **Vrai-Faux**, ces erreurs classiques sont rappelées dans un encadré.

☞ La recherche des exercices

Une fois le cours correctement mémorisé, il convient de passer à la pratique.
Chronologiquement, vous allez commencer par attaquer les exercices proposés en TD par votre professeur avant d'aller en voir d'autres (par exemple sur le **Prépasciences**). Donnons des conseils pour être le plus efficace pour faire des exercices et en retirer le maximum.

Comment aborder et faire les exercices ?

Étape 1. Parcourez la partie Méthodes du Prépasciences en premier . L'idée est de savoir démarrer dans les exercices standards. Regardez aussi les exemples développés sans forcément les refaire à ce niveau.

Étape 2. Faites les exercices les plus simples, souvent très standards ; (Cette étape peut s'aborder avant de consulter la partie **Méthodes** du **Prépasciences** mais ce serait mieux après.) Il s'agit ici d'exercices que vous pourrez faire sans grande indication et normalement à votre portée. Dans le **Prépasciences**, les **exercices minutes** sont idéaux pour démarrer ou aussi les exemples qui suivent certaines **Méthodes**. S'il s'agit d'exercices qui seront corrigés en TD, n'hésitez pas à les préparer avant de venir en TD. Et vous pourrez comparer votre solution avec celle de votre professeur pour lui poser éventuellement des questions.

Étape 3. Abordez ensuite les exercices plus consistants. Le **Prépasciences** par exemple en propose un certain nombre par chapitre. La grosse majorité de ces exercices sont classiques et sont souvent extraits de sujets d'écrits ou sont des sujets d'oraux des concours. Ces exercices seront donc de précieux alliés pour vous aider dans cet objectif. Si vous n'avez pas d'inspiration pour démarrer un de ces exercices, vous pouvez aller voir la partie **Indications**. Une fois l'exercice terminé, comparez votre résultat avec le corrigé du livre pour vous assurer que votre raisonnement ou votre calcul est correct. Et si vous avez coincé dans votre résolution, comprenez la correction et refaites-la sans la regarder ! C'est comme cela que l'on progresse. Laissez les exercices étoilés du **Prépasciences** dans un second temps, pour la fin de semaine par exemple.
De même, dans le cas d'un exercice un peu hardu proposé en TD, attendre le jour du TD et recopier la correction passivement sur son cahier ou sa tablette et l'archiver dans un coin n'a aucun intérêt. La bonne technique, c'est d'abord de bien comprendre la correction. Puis mettez cette correction de côté. Et refaites alors l'exercice en entier sans regarder la correction. Si cela coince encore, c'est que la correction n'a pas été comprise.

☞ **La recherche de problèmes**

C'est la dernière étape, à ne réaliser qu'une fois les deux précédentes effectuées. En début d'année, vous pourrez vous contenter de « morceaux » de sujets de concours car les problèmes complets pourraient traiter de chapitres que vous n'avez pas encore abordés et attaquer des sujets plus complets au fur et à mesure que l'année progresse. Bien entendu, si vous êtes 5/2, il faudra vous lancer beaucoup plus tôt dans l'année pour faire des sujets d'écrits. Vous pouvez refaire complétement (même en y mettant le temps) un sujet que vous n'avez pas réussi le jour de l'écrit l'an passé, cela vous stimulera. En tout cas que vous soyez 3/2 ou 5/2, un livre d'annales pourra être le bienvenu. Aux **Éditions Ellipses** sont édités réguliérement des **annales de sujets d'écrits corrigés et commentés** pour votre filière PSI et cela pour la plupart des banques de concours.

Maintenant comment travailler un problème ?

Pendant l'année, il faut s'entraîner sur ce type de sujet comme si c'était le jour de l'écrit. Cela peut-être chez vous lors d'un devoir à la maison ou avec un sujet d'annales ou en devoir surveillé.

Étape 1. Commencez par lire le sujet (au moins soigneusement la première partie et parcourir le reste plus rapidement). Répérer les questions qui vous inspirent le plus, en particulier celles qui vous semblent faisables en admettant le résultat d'une question précédente. Repérer aussi les questions ou parties indépendantes les unes des autres. Sachez par ailleurs que souvent (à CCINP en particulier) les premières questions de chaque partie sont très abordables et la dernière question assez hardue.

Étape 2. Puis attaquez la résolution des questions que vous savez faire. Attention, évitez d'écrire puis de raturer. Travaillez d'abord au brouillon si vous n'êtes pas sûr. Laissez aussi de l'espace pour les questions non abordées. En effet, au moment de la correction, le correcteur n'aime pas « les jeux de pistes ». Donc rédigez vos solutions des questions dans l'ordre du sujet.

Étape 3. Intéressez vous aux questions laissées de côté. Le jour du concours, les questions hardues sont mieux rémunérées en points. Si vous voulez avoir la note la plus élevée possible, il faut les aborder. Sachez que parfois on a les points si l'on a su transcrire sur sa copie l'idée principale de la solution. Un conseil toutefois : il vaut mieux ne rien mettre que d'écrire n'importe quoi !

Étape 4. Et ensuite, regardez la solution des questions non traitées, (ce qui ne pourra plus se faire le jour du concours). Et faites comme pour un exercice. Vous devez comprendre la solution, la mettre de côté et savoir la reproduire.

☞ **La préparation aux oraux.**

En toute fin d'année, vous serez amené à passer des épreuves orales. Vous vous entraînerez toute l'année à l'aide des khôlles ou des oraux blancs proposés par votre professeur mais il sera important de vous y préparer également de votre côté. Rappelez vous (on en a parlé plus haut) de solliciter vos camarades de classe et mettez vous dans la peau, l'espace de quelques instants, tantôt d'un examinateur exigeant en posant des questions ou des exercices, tantôt dans le rôle du candidat, en répondant à leurs questions. Là encore, les exercices présents dans ce **Prépasciences** (en particulier certains ont été récemment posés à l'oral) pourront vous servir de base pour cette mise en situation.

Ceci dit, attention, la préparation aux oraux implique aussi de bien revoir son cours. En effet : ***sachez qu'un candidat à l'oral qui montre clairement à l'examinateur qu'il ne connaît pas son cours repartira certainement avec une mauvaise note.***

A contrario, un candidat qui connaît son cours limitera les dégats même s'il est très poussif dans son exécution de l'exercice. L'examinateur pourra d'ailleurs poser du cours à un candidat pour le sauver d'une mauvaise note. Au candidat de saisir la perche ! Aux **Éditions Ellipses**, vous trouverez des **annales de sujets d'oraux corrigés et commentés** pour votre filière PSI.

☞ Inscription aux concours et stratégie de choix d'écoles

Passons maintenant à un passage essentiel dans l'année de spé : l'inscription aux concours.

Premier conseil : **avoir réfléchi à un choix d'écoles favorites sélectionnées selon votre goût et vos capacités et cela avant même la période des inscriptions.** On en a déjà parlé plus haut car c'est une motivation d'avoir une idée de ce que l'on veut. Il faut aller sur le site **SCEI**, c'est le passage obligé pour les inscriptions bien entendu, mais vous pouvez aussi repérer des écoles en amont bien avant la période des inscriptions et aller sur le site de chacune de ces écoles. N'hésitez pas à questionner vos professeurs ou vos camarades 5/2. Ils peuvent vous aider à élargir vos choix, en particulier par rapport aux barres d'admissibilité. En effet, en décembre en PSI, vous devez avoir une idée des écoles accessibles par rapport à votre niveau. Et prévoyez des plans B ! Enfin, la stratégie sera différente selon que vous soyez 3/2 ou 5/2. En terme clair, un 5/2 a le droit d'être plus ambitieux mais il faut encore plus prévoir de plans B. Rappelons enfin qu'au coeur de l'été, quand on vous demandera si vous acceptez une intégration, vous n'aurez plus beaucoup de temps pour réflechir.

Passons maintenant à l'inscription proprement dite. Attention il n'est possible de s'inscrire que pendant une période assez courte (qui débute autour du 5-10 décembre environ jusqu'au 10-15 janvier, les dates précises changent chaque année). Donc un conseil, si tout est réglé avant fin décembre, c'est mieux. Le site peut être saturé ou temporairement hors service surtout en janvier. Pourquoi rajouter un stress ?
Signalons enfin que les candidats qui souhaitent bénéficier d'un tiers-temps doivent s'en occuper bien avant le mois de décembre.

À l'écrit, les écoles sont regroupés dans des banques et dans une banque donnée, les écoles n'ont pas la même barre d'admissibilité. Et cette barre est aussi fonction de votre filière, les coefficients de chaque matière différent selon la banque, l'école et la filière. En PSI, la SI par exemple a un coefficient relativement important.
De plus, les frais d'inscription s'accumulent (si vous n'êtes pas boursier), et donc on a une raison supplémentaire d'avoir fait une selection d'écoles en amont.

Les banques à l'écrit regroupent un certaines nombres d'écoles. En PSI, vous avez ainsi la ***banque d'écrits ENS-Cachan-Polytechnique***, la ***banque d'écrits Mines-Ponts***, la ***banque d'écrits Centrale-Supelec***, la ***banque d'écrits CCINP***. Nous n'allons pas détailler toutes les écoles proposées dans chaque banque, allez sur le site SCEI.
Attention, le choix des inscriptions pour l'écrit dans les banques peuvent influencer les oraux en cas d'admissibilité. Illustrons en détaillant deux exemples de banques .
Considérons d'abord la ***banque d'écrits Mines-Ponts***. Selon votre rang d'admissibilité et les écoles choisies, vous pouvez vous retrouver à passer l'oral du concours Mines-Ponts ou celui de Mines-Telecom. Les candidats admissibles à la fois à des écoles du concours Mines-Ponts et des écoles du concours Mines-Telecom ne passent que l'oral du concours Mines-Ponts qui est un peu plus « relevé » que celui du concours Mines-Telecom. Il faut le savoir. Bien entendu, un candidat qui n'a obtenu au travers de la banque d'écrits Mines-Ponts que l'admissibilité à des écoles du concours Mines-Telecom ne passent que ce dernier concours à l'oral.
Considérons ensuite la ***banque d'écrits Centrale-Supelec***. La grosse majorité des écoles de la banque ouvrent en cas d'admissibilité à l'oral du même nom. Quelques écoles ont un traitement spécial à l'oral. Ainsi l'inscription et l'admissibilité à l'ENSEA ouvre la voie à un oral complet (avec des Maths en particulier) se passant actuellement sur le site de l'école même, de niveau moins « relevé » que celui de Centrale-Supelec. L'admissibilité à l'ESTP donne droit à une épreuve de TIPE plus une épreuve orale facultative. Pour l'École Navale, c'est de l'anglais et du sport.
Attention, les modalités peuvent évoluer au fil des années et il faut bien se renseigner.

Chapitre 1

Espaces vectoriels et applications linéaires

UN MATHÉMATICIEN



Très jeune, **Giuseppe Peano** (1858-1932) a compris l'importance de la nouvelle approche des mathématiques que permettait la théorie des ensembles à peine naissante. Déchiffrant l'ouvrage plutôt obscur d'Hermann Grassmann dans lequel sont introduits les espaces vectoriels, il bâtit une axiomatique claire encore utilisée de nos jours. Il introduit les applications linéaires et montre que cette théorie ne se limite pas à la dimension finie en donnant l'exemple des polynômes.

Un peu d'histoire

À tout nombre réel a, on peut faire correspondre une application toute simple, celle qui à un réel x fait correspondre ax soit la multiplication d'un nombre par un scalaire. Tout segment est alors transformé en un segment dont la longueur est multipliée par a. La variable x est au premier degré, elle n'est pas affectée d'une puissance.

Les applications linéaires en sont la généralisation aux dimensions supérieures ; l'expression des images est une expression de degré un des coordonnées et elles conservent l'origine.

Le maniement de ce type d'applications s'est particulièrement développé au XVIII^{e} siècle en particulier pour résoudre des systèmes linéaires, avec Gabriel Cramer, Étienne Bézout, Alexandre Vandermonde mais leur introduction formelle est l'œuvre de Peano.

Objectifs

les incontournables

- Revoir les notions élémentaires concernant les espaces vectoriels : famille libre, famille génératrice, base, dimension finie,...
- Approfondir les notions de somme et de somme directe de sous-espaces vectoriels à plus de deux sous-espaces vectoriels. En particulier, savoir décomposer en somme directe par partition d'une base.
- Savoir manipuler les projecteurs et connaître parfaitement leur lien avec une somme directe finie de sous-espaces vectoriels.
- Savoir déterminer le rang, l'image et le noyau d'une application linéaire (par une base ou un système d'équations).
- Savoir ce qu'est un sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, savoir manipuler un endomorphisme induit sur un tel sous-espace vectoriel.
- Savoir que si deux endomorphismes commutent alors le noyau et l'image de chacun sont stables par l'autre.
- Savoir exprimer un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans la base d'interpolation de Lagrange et faire le lien avec le problème d'interpolation de Lagrange
- Faire le lien entre hyperplan et noyau d'une forme linéaire non nulle.

et plus si affinités

- Savoir démontrer qu'une famille infinie est libre.
- Savoir inverser ou calculer les puissances successives d'un endomorphisme à l'aide d'un polynôme annulateur.
- Savoir démarrer un exercice sur les endomorphismes nilpotents. ($f \in \mathcal{L}(E)$ avec $f^n = 0$.)

Résumé de cours

Ce chapitre 1 rappelle les notions et les propriétés des espaces vectoriels et des applications linéaires vues en MPSI ou en PCSI. Nous y avons ajouté les quelques compléments en PSI. Il serait d'ailleurs intéressant pour le lecteur de revoir un peu son cours de première année avant d'entamer l'année scolaire de PSI.
$\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Familles libres, familles génératrices, bases

Définition : Combinaison linéaire —. *On appelle combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs $\vec{u}_1$, ..., $\vec{u}_p$ de E toute somme $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{u}_i$, où $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont des scalaires (c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{K}$), appelés coefficients de la combinaison linéaire.*

Proposition 1.1.— L'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille finie $X = (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p)$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé **sous-espace vectoriel engendré** par X et noté $\mathsf{Vect}\,(X)$.

Définition : Famille libre, famille liée —. ▸ *$(\vec{u}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, famille **finie** de vecteurs de E, est **libre** (on dit aussi que ces vecteurs sont indépendants) si, et seulement si, pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ appartenant à $\mathbb{K}^n$, on a l'implication :*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = 0_E \Rightarrow \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = 0.$$

▸ *On peut étendre à $(\vec{u}_i)_{i\in I}$, famille de vecteurs de E de cardinal quelconque. Elle est **libre** si, et seulement si, toutes ses sous-familles finies sont libres.*
▸ *Si une famille n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**.*

Remarques : ▸ Toute famille contenue dans une famille libre est libre.
▸ Toute famille contenant une famille liée est liée. (Contraposition de l'implication précédente.)
En particulier, toute famille contenant le vecteur nul est liée.
▸ Une famille de deux vecteurs est liée si, et seulement si, ces deux vecteurs sont colinéaires.

Proposition 1.2.— Famille liée et combinaison linéaire —. On suppose I fini. Une famille $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est liée si, et seulement si, l'un au moins des $\vec{u}_i$ est combinaison linéaire des autres.

Définition : Famille génératrice —. *Une famille X de E est une **famille génératrice de l'espace vectoriel** E si, et seulement si, tout vecteur de E est une combinaison linéaire finie de vecteurs de E. Dans le cas où X est une famille finie, on a alors :* $\mathsf{Vect}\, X = E$.

Définition : Base —. *Une famille de vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une **base** de E si, et seulement si, elle est une famille libre et génératrice.*

Exemples : ▸ $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. $(X^i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est la base **canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$.
▸ $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est la base **canonique** de $\mathbb{R}^3$.

■ Dimension

Définition : Espace vectoriel de dimension finie —. *Un espace vectoriel est* ***de dimension finie*** *si, et seulement s'il admet une famille génératrice finie.*

Proposition 1.3.— Théorème d'existence d'une base et de la base incomplète —.
- Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie admet une base finie.
- On peut extraire de toute famille génératrice finie de E une base de E.
- Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Lemme 1.4.— Dans un espace vectoriel de dimension finie, une famille libre ne peut avoir plus d'éléments qu'une famille génératrice.

Théorème 1.5.— Théorème de la dimension —.
Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre d'éléments, appelé ***dimension de*** E et noté $\dim E$.

Par convention, la dimension de $\{0_E\}$ est 0.

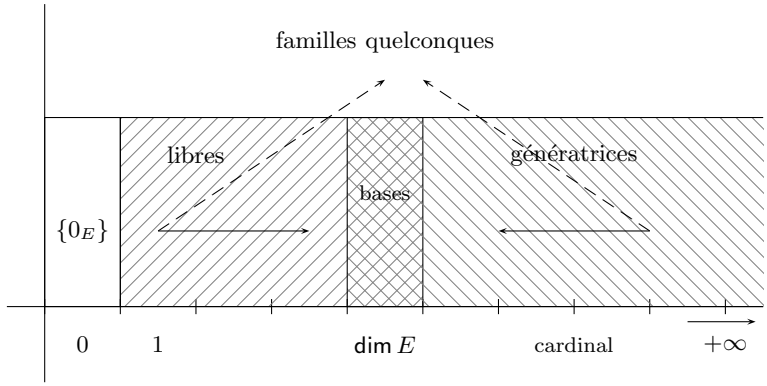


Illustration du théorème de la dimension, et de la proposition suivante

Proposition 1.6.— En ajoutant un élément $\vec{x}$ à une famille libre L, on obtient une famille libre si $\vec{x} \notin \mathrm{Vect}\,(L)$, et une famille liée si $\vec{x} \in \mathrm{Vect}\,(L)$.
En enlevant un élément $\vec{x}$ à une famille génératrice G, on obtient une famille non génératrice si $\vec{x} \notin \mathrm{Vect}\,(G \setminus \{\vec{x}\})$ et une famille génératrice si $\vec{x} \in \mathrm{Vect}\,(G \setminus \{\vec{x}\})$.

Proposition 1.7.— Si $\dim E = n$ et si $\mathcal{B}$ est une famille de n vecteurs de E, alors il y a équivalence entre :
(1) $\mathcal{B}$ est une base de E (2) $\mathcal{B}$ est une famille libre (3) $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E.

Proposition 1.8.— Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel de dimension finie E est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.

De plus, si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Définition : Base adaptée à un sous-espace vectoriel —. *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, une base de E est* ***adaptée à*** *F lorsque ses p premiers vecteurs forment une base de F.*

Proposition 1.9.— Coordonnées d'un vecteur dans une base —. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n)$ une base de E. Pour tout vecteur $\vec{x}$ de E, il existe un n-uplet unique $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ tel que :

$$\boxed{\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \vec{e}_i.}$$

$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est le ***n-uplet des coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.***

Exemple : Les coordonnées d'un polynôme de degré inférieur ou égal à n dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ sont ses coefficients.

Définition : Rang d'une famille de vecteurs —. *Le* ***rang d'une famille finie de vecteurs*** *est la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre.*

Notation : *Le rang de la famille $\mathcal{F}$ est noté* $\mathsf{Rg}\,(\mathcal{F})$.

■ Interpolation de Lagrange

Soient $n+1$ couples $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ de $\mathbb{R}^2$ tels que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, les réels x_i soient **tous distincts**. Il s'agit de construire un polynôme P de degré au plus n tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on ait l'égalité : $P(x_i) = y_i$.

Définition : *On appelle* **polynômes interpolateurs de Lagrange** *associés à la famille $(x_0, x_1, ..., x_n)$ les $n+1$ polynômes définis pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ par :*

$$L_i = \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}.$$

Proposition 1.10.— Propriétés des polynômes interpolateurs de Lagrange

- Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, L_i est de degré n.
- Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ et pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $L_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = i \\ 0 & \text{si} \quad j \neq i \end{cases}$
- La famille $(L_0, L_1, ..., L_n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$ et en est donc une base. On l'appelle **base d'interpolation de Lagrange** associée à $(x_0, x_1, ..., x_n)$.

Comme $(L_0, ...L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, tout polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ s'exprime dans cette base et on a en particulier le résultat suivant.

Proposition 1.11.— Il existe un seul polynôme de degré au plus n (donc dans $\mathbb{K}_n[X]$) qui vérifie pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$. C'est le polynôme $P = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j$.

En particulier, $1 = \sum_{j=0}^{n} L_j$ et $X = \sum_{j=0}^{n} x_j L_j$.

■ Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels

Soit $n \geqslant 2$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit E_i, espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
Alors $E_1 \times ... \times E_n = \{(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n), \forall\, i \in [\![1, n]\!], \vec{u}_i \in E_i\}$ est appelé le produit de ces espaces vectoriels et est lui-même un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On définit :

$$\text{la somme : } (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n) + (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = (\vec{u}_1 + \vec{v}_1, ..., \vec{u}_n + \vec{v}_n),$$

$$\text{le produit par } \lambda \in \mathbb{K} : \lambda.(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n) = (\lambda\vec{u}_1, ..., \lambda\vec{u}_n).$$

Proposition 1.12.— Dans le cas où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, E_i est de dimension finie alors :

$$\boxed{\mathsf{dim}\ (E_1 \times ... \times E_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{dim}\, E_i.}$$

■ Somme et somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels

Définition : Somme —. *Soit $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E,* ***la somme de ces sous-espaces vectoriels*** *est le sous-espace vectoriel, noté $\sum_{i=1}^{n} E_i$, engendré par la réunion des E_i :*

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} E_i = \mathsf{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right).}$$

L'appellation « somme de sous-espaces vectoriels » est justifiée par la caractérisation suivante.

Proposition 1.13.— $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est l'ensemble des sommes de vecteurs des E_i, autrement dit :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} E_i = \left\{\sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i,\ \text{où, } \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \vec{u}_i \in E_i\right\}.}$$

Définition : Somme directe —. ***La somme des sous-espaces vectoriels de la famille*** $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ ***est directe*** *si, et seulement si,*

$$\boxed{\forall\, (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n,\ \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i = 0_E \Rightarrow \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \vec{u}_i = 0_E\right).}$$

Dans ce cas, on note la somme de ces sous-espaces vectoriels : $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Proposition 1.14.— Caractérisation d'une somme directe —. La somme des sous-espaces vectoriels de la famille $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est directe si et seulement si tout $\vec{u}$ de $\sum_{i=1}^{n} E_i$ se décompose **de manière unique** sous la forme : $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i$, où $(\vec{u}_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.

Définition : Sous-espaces vectoriels supplémentaires —.
*Les sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de E sont **supplémentaires dans** E si, et seulement si, leur somme est directe et égale à E, autrement dit, lorsque : $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.*

Proposition 1.15.— Les sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de E sont supplémentaires si, et seulement si,

$$\forall\, \vec{u} \in E,\ \exists!\, (\vec{u}_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \text{ tel que } \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i.$$

Proposition 1.16.— Existence d'un supplémentaire —.
Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admet un supplémentaire.

Lorsque $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, tout vecteur $\vec{u}$ de E s'écrit, **de manière unique** :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i, \text{ où } (\vec{u}_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \prod_{i=1}^{n} E_i.$$

Théorème-Définition 1.17.— Base adaptée à une décomposition en supplémentaires —.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E, de bases respectives $\mathcal{B}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Si la somme des $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est directe, alors $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_n)$ est une base de $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Si les E_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont supplémentaires dans E, alors $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_n)$ est une base de E dite **base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.**

Cas particulier : **Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base**
Considérons une base $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ de E, espace vectoriel de dimension n et si $i_1, ..., i_p$ sont p entiers compris entre 1 et n, posons $E_1 = \text{Vect}\,(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_{i_1})$, $E_2 = \text{Vect}\,(\vec{e}_{i_1+1}, ..., \vec{e}_{i_2})$, etc. jusqu'à $E_p = \text{Vect}\,\left(\vec{e}_{i_p}, ..., \vec{e}_n\right)$, alors $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ est une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.
On dit que l'on a décomposé E en somme directe par partition de la base $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$.

Corollaire 1.18.— Caractérisation d'une somme directe par les dimensions —.
Les $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ étant des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E :

$$\boxed{\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim E_i}.$$

Et l'on a l'égalité si, et seulement si, la somme est directe.

Corollaire 1.19.— Supplémentaires en dimension finie —.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$;

(ii) les $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont en somme directe et $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$;

(iii) $E = \sum_{i=1}^{n} E_i$ et $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$.

Corollaire 1.20.— Dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels —.
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie E :

$$\boxed{\dim\left(F+G\right) = \dim F + \dim G - \dim\left(F\cap G\right).}$$

■ Applications linéaires

Définition : *Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une application $\phi : E \to F$ est dite* **linéaire** *si pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E et pour tout scalaire $a \in \mathbb{K}$,*

$$\phi(a\vec{u}+\vec{v}) = a\phi(\vec{u}) + \phi(\vec{v}).$$

Lorsque $E = F$, on dit que ϕ est un **endomorphisme**. *Une application linéaire qui est une bijection est un* **isomorphisme**. *Un endomorphisme bijectif est un* **automorphisme**.

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F. C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Dans le cas $E = F$, on note $\mathcal{L}(E)$ cet ensemble.

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ alors $g\,o\,f \in \mathcal{L}(E,G)$.
Si f est un isomorphisme de E dans F alors f^{-1} est un isomorphisme de F vers E.
L'ensemble des automorphismes de E est appelé le **groupe linéaire**. On le note $\mathrm{GL}(E)$.

Proposition 1.21.— Détermination d'une application linéaire en dimension finie —.
Étant donné deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_p)$ de E et une famille $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \cdots, \vec{f}_p)$ de vecteurs de F, il existe une application linéaire ϕ, et une seule, de E dans F, telle que :

$$\forall\, i \in [\![1,p]\!],\ \phi(\vec{e}_i) = \vec{f}_i.$$

Définition : Espaces vectoriels isomorphes —. *Deux espaces vectoriels sont* ***isomorphes*** *si, et seulement s'il existe un isomorphisme de l'un dans l'autre.*

Proposition 1.22.— L'image d'une base (respectivement d'une famille libre) par un isomorphisme est une base (respectivement une famille libre).

Proposition 1.23.— Conservation du rang par un isomorphisme —. L'image par un isomorphisme d'une famille de vecteurs est une famille de vecteurs de même rang.

Remarque : Une base de E étant choisie, l'application associant à un vecteur le n-uplet de $\mathbb{K}^n$ de ses coordonnées dans cette base est un isomorphisme ; en conséquence, le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de la famille des n-uplets de ses coordonnées dans $\mathbb{K}^n$.

Proposition 1.24.— Deux espaces vectoriels E et F (sur le même ensemble $\mathbb{K}$) de dimensions finies sont isomorphes si, et seulement si, leurs dimensions sont égales.

Conséquence : Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Théorème-Définition 1.25.— Noyau d'une application linéaire —. ϕ étant une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, l'ensemble $\{\vec{x} \in E,\ \phi(\vec{x}) = 0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé ***noyau de*** ϕ et noté $\mathsf{Ker}\,\phi$.

Théorème-Définition 1.26.— Image d'une application linéaire —. ϕ étant une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, l'ensemble $\{\phi(\vec{x}),\ \vec{x} \in E\}$ est un sous-espace vectoriel de F appelée ***image*** de ϕ et noté $\mathsf{Im}\,\phi$.

Définition : Rang d'une application linéaire —. *Dans le cas où* $\mathsf{Im}\,\phi$ *est de dimension finie, le* ***rang de l'application linéaire*** ϕ *est la dimension de son image, c'est-à-dire* $\dim \mathsf{Im}\,\phi$.

Proposition 1.27.— E étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base et ϕ étant une application linéaire de E dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F :

$$\boxed{\mathsf{Im}\,\phi = \mathsf{Vect}\ (\phi(e_i))_{i\in[\![1,n]\!]} \text{ et } \mathsf{Rg}\,\phi = \mathsf{Rg}\ (\phi(e_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\,.}$$

Proposition 1.28.— Soit $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$, si S est un supplémentaire quelconque de $\mathsf{Ker}\,\phi$ dans E, alors ϕ induit un isomorphisme de S sur $\mathsf{Im}\,\phi$.

Remarque : Ce résultat ne nécessite pas que E soit de dimension finie, mais seulement que $\mathsf{Ker}\,\phi$ admette un supplémentaire.

Proposition 1.29.— Théorème du rang —. ϕ étant une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F, l'espace vectoriel E étant de dimension finie alors :

$$\boxed{\dim \mathsf{Im}\,\phi + \dim \mathsf{Ker}\,\phi = \dim E.}$$

Corollaire 1.30.— ϕ étant une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finies E et F, ϕ est un isomorphisme de E dans F si, et seulement si, $\mathsf{Rg}\,\phi = \dim E = \dim F$.

Corollaire 1.31.— Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et ϕ un élément de $\mathcal{L}(E,F)$, lorsque : $\dim E = \dim F$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) ϕ est bijective (2) ϕ est injective (3) ϕ est surjective

Corollaire 1.32.— Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions finies, $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\psi \in \mathcal{L}(F,G)$:
▸ si ϕ est un isomorphisme, alors $\mathrm{Rg}\,(\psi \circ \phi) = \mathrm{Rg}\,\psi$;
▸ si ψ est un isomorphisme, alors $\mathrm{Rg}\,(\psi \circ \phi) = \mathrm{Rg}\,\phi$.
Autrement dit, on ne change pas le rang d'une application linéaire si on la compose par un isomorphisme.

■ Sous-espaces stables

Définition : Sous-espaces stables par une application linéaire —. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et ϕ un endomorphisme de E ; on dit qu'un sous-espace F de E est **stable** par ϕ lorsque*

$$\phi(F) \subset F.$$

En particulier, E et $\{0_E\}$ sont stables par tout endomorphisme de E.

Proposition 1.33.— Soit ϕ et ψ deux endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ qui vérifient $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$ (on dit que ϕ et ψ *commutent*), alors $\mathrm{Im}\,\phi$ et $\mathrm{Ker}\,\phi$ (respectivement $\mathrm{Im}\,\psi$ et $\mathrm{Ker}\,\psi$) sont stables par ψ (respectivement par ϕ).

Définition : *Soit F un sous-espace de E stable par $\phi \in \mathcal{L}(E)$, alors $\hat{\phi} : \begin{array}{ccc} F & \longmapsto & F \\ \vec{u} & \longrightarrow & \phi(\vec{u}) = \hat{\phi}(\vec{u}) \end{array}$ définit un endomorphisme de F, dit **endomorphisme de F induit par** ϕ.*

■ Polynômes d'endomorphismes

Définition : *Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et ϕ un endomorphisme de l'espace vectoriel E.*
On pose $\phi^0 = \mathrm{Id}_E$, puis, par récurrence, pour tout entier naturel n, $\phi^{n+1} = \phi^n \circ \phi$.
L'endomorphisme $P(\phi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi^k$ est le polynôme de l'endomorphisme ϕ associé à P.

Remarque : Deux polynômes de l'endomorphisme ϕ commutent.

Proposition 1.34.— Le noyau et l'image de $P(\phi)$ sont stables par ϕ.

Théorème 1.35.— Pour $\phi \in \mathcal{L}(E)$ fixé, considérons l'application $f_\phi : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$, $P \mapsto P(\phi)$.
▸ f_ϕ est un morphisme de $(\mathbb{K}[X], +, .)$ dans $(\mathcal{L}(E), +, .)$.
▸ $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $f_\phi(PQ) = f_\phi(P)\, o\, f_\phi(Q)$, c'est-à-dire $(PQ)(\phi) = P(\phi)\, o\, Q(\phi)$.

Définition : *Le noyau de f_ϕ est l'ensemble des polynômes annulateurs de l'endomorphisme ϕ.*

Applications : calcul de l'inverse et des puissances, voir la **méthode 1.10**.

■ Formes linéaires et hyperplans dans un espace vectoriel de dimension finie

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel de dimension finie.

Définition : Forme linéaire —. *Une **forme linéaire** de E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$, considéré comme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Définition : Relation forme linéaire-hyperplan —. *Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan de E si, et seulement si, il est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.*

Proposition 1.36.— Première caractérisation d'un hyperplan —. Un **hyperplan** de E est un sous-espace vectoriel H de E admettant un supplémentaire de dimension 1, (c'est-à-dire une droite vectorielle).
On peut aussi écrire que si H est un hyperplan et D une droite non incluse dans H, alors $E = H \oplus D$.

Proposition 1.37.— Deuxième caractérisation d'un hyperplan —. Soit n un entier non nul, si E est un espace vectoriel de dimension n, un sous-espace vectoriel H est un hyperplan de E si, et seulement si, $\dim H = n - 1$.

Proposition 1.38.— Deux formes linéaires non nulles ont le même noyau si, et seulement si, elles sont colinéaires.

Théorème 1.39.— Équations d'un hyperplan —.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E de dimension n, $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de E et H un *s.e.v* de E.
H est un hyperplan de E si, et seulement si, il existe n scalaires $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ non tous nuls tels que : $\left[x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in H \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \right]$. On dit que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ est une ***équation de H dans la base $\mathcal{B}$*** ou une ***équation cartésienne de H dans $\mathcal{B}$***.

Exemple : Les hyperplans de $\mathbb{K}^2$ sont les droites vectorielles. Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^2$ est une droite vectorielle si, et seulement si, il admet une équation de la forme : $ax + by = 0$, où $(a, b) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Méthodes

Familles de vecteurs. Bases

Méthode 1.1.— Comment montrer qu'une famille de vecteurs est libre

- Si la famille est finie, on prouve qu'une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille est nulle si, et seulement si, ses coefficients sont tous nuls.
- Si la famille n'est pas finie, on prouve que toute sous-famille finie extraite de cette famille est libre. On effectue alors souvent une récurrence.
- On peut aussi montrer que cette famille est l'image d'une famille libre par une application linéaire injective.
- Si l'on connaît les composantes des vecteurs dans une base donnée, on peut faire appel au pivot de Gauss (voir le chapitre consacré aux matrices).

Mise en œuvre : exercice 1.1, **exercice 1.2**, **exercice 1.6**, **exercice 1.7**

Méthode 1.2.— Comment montrer qu'une famille de vecteurs est une base

- On peut montrer que cette famille est libre et génératrice.
  Voir la remarque suivante dans le cas où E est de dimension infinie.
- En dimension finie, et si le cardinal de cette famille est égal à la dimension de E, il suffit de montrer le caractère libre (respectivement générateur).
- La famille obtenue en juxtaposant des bases de sous-espaces vectoriels supplémentaires est une base de E **adaptée à cette décomposition de** E.
- On peut aussi montrer que cette famille est l'image d'une base d'un espace vectoriel F par un isomorphisme de E dans F.

Mise en œuvre : exercice 1.4, **exercice 1.5**, **exercice 1.7**, **exercice 1.11**.

Remarque : Si E est de dimension infinie, si l'on a montré que $\mathcal{B}$ est libre, il faut alors prouver directement que $\mathcal{B}$ est génératrice (par exemple en faisant une récurrence si les éléments de la famille sont indéxés par des entiers). En effet, impossible d'utiliser directement le résultat du cours en dimension finie (une famille libre de n éléments est une base si $\dim E = n$).

Exemple : Polynômes de degrés échelonnés

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille de polynômes de* $\mathbb{K}[X]$*, telle que* $\deg P_n = n$ *pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$*; montrer que* $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ *forme une base de* $\mathbb{K}_n[X]$*, puis que* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *forme une base de* $\mathbb{K}[X]$.

Montrons que $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$.

Pour ceci, prenons une combinaison linéaire $\sum_{k=0}^{n} a_k P_k$ nulle, sans que les (a_k) soient tous nuls : alors $\{k \in [\![0,n]\!], a_k \neq 0\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée, qui admet donc un maximum, que nous appellerons m.

Puis : $\deg\left[\sum_{k=0}^{n} a_k P_k\right] = \deg\left[a_m P_m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k P_k\right] = m$, ce qui contredit l'hypothèse $\sum_{k=0}^{n} a_k P_k = 0$.
Comme $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre et de cardinal égal à la dimension de $\mathbb{K}_n[X]$, c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Toute famille finie extraite de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-famille de $(P_k)_{k\in[\![0,N]\!]}$, pour N bien choisi, donc est libre : $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre. Tout polynôme est inclus dans $\mathbb{K}_d[X]$ ($d \geqslant \deg P$), donc est combinaison linéaire de $(P_k)_{k\in[\![0,d]\!]}$. $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{K}[X]$.
En conclusion, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

❑ **Méthode 1.3.— Comment montrer que deux espaces vectoriels sont égaux ou isomorphes**

- On peut trouver un isomorphisme qui transporte l'un sur l'autre.
- On peut utiliser l'implication : $\begin{cases} \dim E = \dim F \\ E \subset F \end{cases} \Rightarrow E = F.$
- On peut montrer qu'une base de l'un est une base de l'autre.

Mise en œuvre : exercice 1.7, **exercice 1.14**, **exercice 1.15**, **exercice 1.17**.

■ Noyau et image d'une application linéaire

On rappelle que si $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathsf{Ker}\,\phi = \{\vec{u} \in E, \phi(\vec{u}) = \vec{0}_E\}$, $\mathsf{Im}\,\phi = \{\vec{u} \in F, \exists\, \vec{v} \in E, \phi(\vec{v}) = \vec{u}\}$.

❑ **Méthode 1.4.— Comment manipuler noyau ou (et) image de $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$**

- En dimension quelconque, il faut souvent revenir à la définition de $\mathsf{Ker}\,\phi$ et de $\mathsf{Im}\,\phi$. Ainsi, dans le cas de $\mathbb{K}[X]$, on pourra commencer par trouver des conditions sur le degré de P appartenant à $\mathsf{Ker}\,\phi$ ou à $\mathsf{Im}\,\phi$.
- En dimension finie, le théorème du rang donne une relation entre les dimensions de $\mathsf{Ker}\,\phi$ et de $\mathsf{Im}\,\phi$, ce qui évite (parfois) d'avoir à les déterminer tous les deux.

Mise en œuvre : en particulier **exercice 1.12**, **exercice 1.14**, **exercice 1.15**.

Remarque : On manipule souvent les noyaux et les images à l'occasion d'égalités du type $f\,o\,g = 0$ ou $g\,o\,f = 0$. Dans le premier cas, on a ainsi : $\mathsf{Im}\,g \subset \mathsf{Ker}\,f$. Cette idée prend tout son sens dans le cas d'un polynôme annulateur (voir **méthode 1.10**).

❑ **Méthode 1.5.— Comment montrer l'injectivité ou la surjectivité d'un endomorphisme**

- En dimension quelconque, on doit montrer que le noyau est $\{\vec{0}_E\}$ pour caractériser l'injectivité et que l'image est E pour caractériser la surjectivité.
- En dimension finie, il est équivalent de montrer la bijectivité, l'injectivité ou la surjectivité.

Mise en œuvre : exercice 1.13, **exercice 1.14**.

Remarque : Pour montrer la bijectivité en dimension infinie, l'injectivité seule ne suffit pas !

■ Rang d'une application linéaire

❑ **Méthode 1.6.— Comment déterminer le rang d'une application linéaire ϕ :**

- ▸ en calculant $\dim \operatorname{Ker} \phi$ puis en utilisant le théorème du rang.
- ▸ en déterminant $\dim \operatorname{Im} \phi$ directement, par exemple en déterminant le rang de la famille des images des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel de départ.

Exemple : 1. *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ avec $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$ Montrer* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. *En déduire* $\operatorname{Rg} f$.
Si $\vec{u} \in \operatorname{Im} f$ alors $\exists\, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $f(\vec{v}) = \vec{u}$. Donc $f(\vec{u}) = f^2(\vec{v}) = 0$. Ainsi $\vec{u} \in \operatorname{Ker} f$.
Comme $3 = \operatorname{Rg} f + \dim \operatorname{Ker} f$, nécessairement $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ (car $\operatorname{Rg} f \leqslant \dim \operatorname{Ker} f$). Donc $\operatorname{Rg} f = 1$.

2. *E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) est une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par $f(e_1) = 2e_2 + 3e_3$, $f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3$ et $f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$. Déterminer* $\operatorname{Rg} f$.
Le rang de f est celui de la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$.
▸ $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont non colinéaires, donc le rang de cette famille est supérieur ou égal à 2.
Si la famille est libre, son rang est 3, sinon, son rang est 2.
▸ $\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \lambda_3 f(e_3) = (2\lambda_2 - \lambda_3)\, e_1 + (2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 4\lambda_3)\, e_2 + (3\lambda_1 - 8\lambda_2 + 6\lambda_3) e_3 = 0$.

$$\text{Donc : } \left\{ \begin{array}{rcl} 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 4\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 - 8\lambda_2 + 6\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_3 & = & 2\lambda_2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 & = & 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. .$$

On trouve finalement : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille est libre, donc de rang 3. Ainsi, $\operatorname{Rg} f = 3$.

Mise en œuvre : exercice 1.12.

■ Somme de sous-espaces vectoriels

❑ **Méthode 1.7.— Comment montrer que la somme de n sous-espaces vectoriels est directe**

- ▸ Si $n = 2$, il suffit de montrer que leur intersection est $\{0_E\}$.
  Attention, ce résultat n'est plus vrai à partir de $n = 3$!
- ▸ En dimension quelconque (et donc en particulier si $n = 3$), on revient à la définition en prouvant que la somme des vecteurs d'un n-uplet du produit cartésien des n sous-espaces vectoriels est nulle si, et seulement si, les n vecteurs sont nuls.
- ▸ En dimension finie, on peut aussi prouver que $\dim \left(\sum_{i=1}^{n} E_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \dim (E_i)$.

Exemple : *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, n scalaires deux à deux distincts. Montrer que la somme des noyaux* $\operatorname{Ker}\left(f - \lambda_i \operatorname{Id}_E\right)$, $i \in [\![1, n]\!]$, *est directe.*
Posons : $E_i = \operatorname{Ker}\left(f - \lambda_i \operatorname{Id}_E\right)$, $i \in [\![1, n]\!]$, et démontrons ce résultat par récurrence sur n.

▸ Pour $n = 2$: $\forall\,(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_2$, $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = 0_E$ (1) $\Rightarrow f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = 0_E \Rightarrow \lambda_1\,\vec{x}_1 + \lambda_2\,\vec{x}_2 = 0_E$ (2).
λ_1 (1) − (2) donne : $(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{x}_2 = 0_E$ (3), puis : $\vec{x}_2 = 0_E$ (car $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$) et, enfin, d'aprés (1), $\vec{x}_1 = 0_E$. Conclusion : E_1 et E_2 sont donc en somme directe.

▸ Supposons que la somme soit directe pour un nombre $n \geqslant 2$ de scalaires deux à deux distincts $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et soit λ_{n+1} un scalaire différent des n premiers.

$$\forall\,(\vec{x}_i)_{i\in[\![1,n+1]\!]} \in E_1 \times \cdots \times E_n \times E_{n+1},\ \sum_{i=1}^{n+1} \vec{x}_i = 0_E\ (1) \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \vec{x}_i\right) = 0_E \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i\,\vec{x}_i = 0_E\ (2).$$

λ_{n+1} (1) − (2) donne : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\lambda_{n+1} - \lambda_i)\ \vec{x}_i = 0_E$.
Comme les $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont en somme directe : $\forall\, i \in [\![1,n]\!]$, $(\lambda_{n+1} - \lambda_i)\ \vec{x}_i = 0_E$.
Or : $\forall\, i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_{n+1} - \lambda_i \neq 0$, d'où : $\forall\, i \in [\![1,n]\!]$, $\vec{x}_i = 0_E$, puis, d'après (1), $\vec{x}_{n+1} = 0_E$.
Conclusion : les $(E_i)_{i\in[\![1,n+1]\!]}$ sont en somme directe.

▸ D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si les $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont deux à deux distincts, les noyaux des endomorphismes $(f - \lambda_i\,\mathrm{Id}_E)$, $i \in [\![1,n]\!]$, sont en somme directe.

Mise en œuvre : exercice 1.9, **exercice 1.10**, **exercice 1.14**, **exercice 1.15**, **exercice 1.16**, **exercice 1.17** et **exercice 1.22**.

❑ **Méthode 1.8.— Comment montrer que n sous-espaces vectoriels sont supplémentaires**

- En dimension quelconque, on peut prouver que la somme de ces n sous-espaces vectoriels est directe et égale à E. Penser à raisonner par analyse-synthèse :
  Étape 1 (Analyse) : on suppose qu'un vecteur $\vec{x}$ de E se décompose en la somme de n vecteurs $\vec{x}_i$, chacun de ces vecteurs appartenant à un de ces sous-espaces vectoriels. Puis, on détermine chacun de ces vecteurs $\vec{x}_i$ en fonction de $\vec{x}$ en utilisant les hypothèses fournies par l'énoncé.
  Étape 2 (Synthèse) : on montre que la décomposition obtenue lors de la première étape convient en vérifiant que chaque vecteur $\vec{x}_i$ appartient bien à son sous-espace vectoriel. Pour illustrer cette analyse-synthèse, allez voir l'exemple qui suit la **méthode 1.10**, l'**exercice 1.15** et l'**exercice 1.22**.
- En dimension finie, on peut prouver que la somme de leurs dimensions est égale à la dimension de E, puis soit que la somme de ces n sous-espaces vectoriels est égale à E, soit que leur somme est directe. On peut aussi déterminer une base de E composée de la réunion de bases de chacun des sous-espaces vectoriels.
- Si vous avez déjà vu le **chapitre 4**, il y a un cas où c'est immédiat. Si ϕ est diagonalisable alors E est somme directe de ses sous-espaces propres.

Mise en œuvre : exercice 1.8 à **exercice 1.10**, **exercice 1.14**, **exercice 1.15**, **exercice 1.17**.

Remarque : Un exercice très courant est de trouver un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel F donné dans E. Une méthode en dimension finie est de trouver une base de F et d'appliquer le **théorème de la base incomplète** pour trouver une base d'un supplémentaire. Une méthode plus générale est de décomposer tout vecteur de E en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur d'un autre sous-espace vectoriel G. Il faut alors prouver que $F \cap G = 0$. (Illustration : **exercice 1.8**.)

■ Projecteurs et symétries vectorielles

❑ Méthode 1.9.— Comment travailler un projecteur ou une symétrie

▸ ***Cas d'un projecteur*** p.

1) Si l'on sait que p est un endomorphisme (par exemple il est défini analytiquement ou par sa matrice A), on montre que $p\,o\,p = p$ (ou $A^2 = A$) et alors p est la projection sur $\mathsf{Im}\,p$ (c'est aussi l'ensemble des $\vec{x} \in E$ tels que $p(\vec{x}) = \vec{x}$) et dans la direction de $\mathsf{Ker}\,p$.
Retenir enfin l'égalité, qui peut être utile dans certains exercices :
$\forall \vec{x} \in E, \vec{x} = p(\vec{x}) + \vec{x} - p(\vec{x})$, où $p(\vec{x}) \in \mathsf{Im}\,p$ et $\vec{x} - p(\vec{x}) \in \mathsf{Ker}\,p$.

2) Si l'on veut écrire analytiquement la projection p sur F, dans la direction de G, où $E = F \oplus G$, on remarque que si $\vec{x} \in E$ alors $p(\vec{x}) \in F$ et $\vec{x} - p(\vec{x}) \in G$. Ces deux contraintes permettent d'obtenir $p(\vec{x})$ en fonction de $\vec{x}$ dans la base canonique de E.

▸ ***Cas d'une symétrie*** s.

La relation $s\,o\,s = \mathrm{Id}_E$ caractérise les symétries vectorielles.
On peut alors dire que s est la symétrie par rapport à $F = \mathsf{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$, dont la direction est $G = \mathsf{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$. On peut aussi déterminer p, la projection sur F, dans la direction de G et alors $s = 2p - Id_E$.

Exemples : 1. *Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini analytiquement par* $\left\{\begin{array}{rcl} 2x' &=& 2x \\ 2y' &=& x+y-z \\ 2z' &=& x-y+z \end{array}\right.$,
où $g((x,y,z)) = (x',y',z')$, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Vérifier que g est une projection et déterminer ses éléments caractéristiques.
(D'après Concours National Commun Marocain, filière PSI.)

Pour montrer que $g^2 = g$, il suffit de montrer que $g^2(e_i) = g(e_i)$, pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, si (e_1,e_2,e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déjà, on remarque que :

$$g(e_1) = \frac{1}{2}(2e_1 + e_2 + e_3),\ g(e_2) = \frac{1}{2}(e_2 - e_3),\ g(e_3) = \frac{1}{2}(-e_2 + e_3).$$

Ainsi, $g^2(e_1) = \dfrac{1}{2}(2g(e_1) + g(e_2) + g(e_3)) = \dfrac{1}{2}(2e_1 + e_2 + e_3) = g(e_1)$.
On montre de même que $g^2(e_2) = g(e_2)$ et $g^2(e_3) = g(e_3)$. (Si vous avez revu les matrices, si A désigne la matrice de g dans (e_1,e_2,e_3), on fait rapidement $A^2 = A$ bien entendu.)
$\mathsf{Im}\,g = \{g(\vec{x}),\ \vec{x} \in \mathbb{R}^3\} = \{x_1 g(e_1) + x_2 g(e_2) + x_3 g(e_3),\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3\} = \mathsf{Vect}\,(g(e_1), g(e_2), g(e_3))$.
Or, $g(e_3) = -g(e_2)$ et $\{g(e_1), g(e_2)\}$ est libre. Donc $\mathsf{Im}\,g$ est le plan vectoriel de base $(g(e_1), g(e_2))$.
(On peut aussi déterminer (x,y,z) tel que $g((x,y,z)) = (x,y,z)$.
On résout un système et on trouve alors une équation de plan qui a pour base $((g(e_1), g(e_2))$.)
On trouve pour équation de $\mathsf{Im}\,g$: $x - y - z = 0$.
La direction de g est $\mathsf{Ker}\,g$. $(x,y,z) \in \mathsf{Ker}\,g \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 0 &=& 2x \\ 0 &=& x+y-z \\ 0 &=& x-y+z \end{array}\right.$.
On trouve rapidement $x = 0$ et $y = z$. Ainsi $\mathsf{Ker}\,g = \mathsf{Vect}\,((0,1,1)) = \mathsf{Vect}\,(e_2 + e_3)$.

2. *Soit f et g deux projecteurs d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.*
On suppose qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ avec $(a,b) \notin (\{0,1\})^2$ tel que : $f\,o\,g - g\,o\,f = a\,f + b\,g$.
Montrer que pour tout $\vec{x} \in E$, $f\,o\,g(\vec{x}) \in \mathsf{Im}\,g$ puis que $\mathsf{Im}\,f \subset \mathsf{Im}\,g$.
Montrer ensuite que $g\,o\,f = f$ et que $a + b = 0$. En déduire que $f = g$.

▸ On applique g à droite dans les deux membres de l'égalité (en utilisant $g\,o\,g = g$).

On a : $f\,o\,g - g\,o\,f\,o\,g = a\,f\,o\,g + b\,g \Rightarrow f\,o\,g = \dfrac{1}{1-a}\,[b\,g + g\,o\,f\,o\,g] \Rightarrow \forall \vec{x} \in E,\ f\,o\,g(\vec{x}) \in \mathsf{Im}\, g$.

Puis $f = \dfrac{1}{a}\,[f\,o\,g - g\,o\,f - b\,g]$ permet d'en déduire que $\mathsf{Im}\, f \subset \mathsf{Im}\, g$.

▸ On sait que comme g est un projecteur, $\mathsf{Im}\, g$ est l'ensemble des vecteurs invariants par g.
Comme $\mathsf{Im}\, f \subset \mathsf{Im}\, g$, tous les vecteurs de la forme $f(x)$ sont invariants par g et donc : $g\,o\,f = f$.
Ainsi : $f\,o\,g - g\,o\,f = f\,o\,g - f = af + bg \Rightarrow f\,o\,g - f = a\,f + b\,f\,o\,g$, en multipliant à gauche par f. Donc $f\,o\,g = g$.

Puis on peut écrire : $f\,o\,g - f = a\,f + b\,g \Rightarrow f\,o\,g - f\,o\,g = a\,f\,o\,g + b\,g$, en multipliant à droite par le projecteur g.

On a (car $g \neq 0$, pourquoi ?) : $(a+b)g = 0 \Rightarrow a + b = 0$. Enfin :

$$f\,o\,g - g\,o\,f = a\,f + b\,g \Rightarrow g - f = a\,f + b\,g = a\,f - a\,g \Rightarrow (1-b)\,g = (a+1)\,f.$$

Comme $b \neq 1$ et $a = -b \neq -1$, $f = g$.

Mise en œuvre : exercice 1.9, de l'**exercice 1.17** à l'**exercice 1.19**.

■ Polynômes annulateurs

❑ **Méthode 1.10.— Comment exploiter une relation du type $f^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i$, où $f \in \mathcal{L}(E)$ et $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ (Ici le produit est la composition et $f^0 = Id$.)**

- Une application naturelle est de calculer f^p pour tout $p \geqslant n$ en fonction des puissances f^i avec $i \leqslant n$. Il faudra généralement faire une récurrence.
- Si $a_0 \neq 0$, on peut déterminer la fonction réciproque de f alors bijective.
- Si $a_0 = 0$, il faut raisonner au cas par cas. Les projecteurs (**méthode 1.9**) et les endomorphismes nilpotents (voir plus loin) sont issus de cette catégorie. On construit souvent une base de E à partir d'un vecteur de E et de ses images successives.
- On peut parfois avoir alors à démontrer que, connaissant un polynôme annulateur de f, E est une certaine somme directe de sous-espaces vectoriels (qui sont en général des noyaux ou des images). Cette somme étant fournie par l'énoncé, on raisonne alors par analyse-synthèse (allez voir la **méthode 1.8**) et on se sert bien entendu du polynôme annulateur de f. L'idée est alors de se placer dans une base adaptée à cette décomposition en somme directe de E, ce qui permet d'avoir beaucoup d'informations sur f.

Exemples : *Exemple 01. On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel E vérifiant*

$$(1)\ \ f^2 + f = Id_E.$$

Montrer que f est un automorphisme de E.

Il suffit de remarquer que : $f\,o\,(f + Id_E) = (f + Id_E)\,o\,f = Id_E$.
Et donc f est inversible car il possède un inverse qui est $f + Id_E$.

Exemple 02. On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel E vérifiant

$$(1)\ \ (f+Id_E)\,o\,(f-2Id_E)=0,$$

où 0 désigne l'endomorphisme nul de E.
Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathsf{Ker}\,(f+Id_E)$ et $\mathsf{Ker}\,(f-2Id_E)$ sont supplémentaires dans l'espace vectoriel E.

Analyse.
Soit $\vec{x}\in E$. Supposons qu'il existe $\vec{y}\in\mathsf{Ker}\,(f+Id_E)$ et $\vec{z}\in\mathsf{Ker}\,(f-2Id_E)$ tels que $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$.
Alors $f(\vec{y})=-\vec{y}$ et $f(\vec{z})=2\vec{z}$. Ainsi : $f(\vec{x})=-\vec{y}+2\vec{z}$.
On en déduit rapidement :

$$\vec{y}=\frac{1}{3}(2\vec{x}-f(\vec{x}))\text{ et }\vec{z}=\frac{1}{3}(\vec{x}+f(\vec{x})).$$

On a prouvé l'unicité du couple en cas d'existence.

Synthèse.
Réciproquement, soit $\vec{x}\in E$ et $\vec{y}=\dfrac{1}{3}(2\vec{x}-f(\vec{x}))$ et $\vec{z}=\dfrac{1}{3}(\vec{x}+f(\vec{x}))$.
Alors, clairement $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$.
Maintenant, prouvons que $\vec{y}\in\mathsf{Ker}\,(f+Id_E)$. On peut développer (1) et en déduire f^2 en fonction de f et de Id_E. Puis calculer $f(\vec{y})$ et vérifier que c'est aussi $-\vec{y}$.
On peut aussi ne pas développer (1) et l'utiliser directement en écrivant :

$$(f+Id_E)(\vec{y})=\frac{1}{3}(f+Id_E)(2\vec{x}-f(\vec{x}))=\frac{-1}{3}((f+Id_E)\,o\,(f-2Id_E))(\vec{x})=0.$$

Puis, on remarque que l'on a aussi : $(f-2Id_E)\,o\,(f+Id_E)=0$. On écrit :

$$(f-2Id_E)(\vec{z})=\frac{1}{3}(f-2Id_E)(\vec{x}+f(\vec{x}))=\frac{1}{3}((f-2Id_E)\,o\,(f+Id_E))(\vec{x})=0.$$

Donc : $\vec{z}\in\mathsf{Ker}\,(f-2Id_E)$.

Conclusion.
On a bien établit l'existence et l'unicité d'un couple $(\vec{y},\,\vec{z})\in\mathsf{Ker}\,(f+Id_E)\times\mathsf{Ker}\,(f-2Id_E)$ vérifiant l'égalité $\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$. Donc $E=\mathsf{Ker}\,(f+Id_E)\oplus\mathsf{Ker}\,(f-2Id_E)$.

Mise en œuvre : exercice 1.14, **exercice 1.21**, **exercice 1.22**.

Remarque : Cas des **endomorphismes nilpotents**. On dit que $\phi\in\mathcal{L}(E)$ est **nilpotent** si, et seulement si, il existe un entier p supérieur ou égal à 1, tel que : $\phi^p=0$ et $\phi^{p-1}\neq 0$. On peut déjà affirmer que ϕ n'est pas bijectif. Sachez pour démarrer dans certains exercices que si ϕ est nilpotent (d'ordre p) alors il existe $\vec{v}$ tel que $\left(\vec{v},\phi(\vec{v}),...,\phi^{p-1}(\vec{v})\right)$ soit une famille libre de E.

Exemple : *On suppose que $\dim E=n\geqslant 1$ et $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1}\neq 0$ et $f^n=0$.*
1. *Soit $\vec{v}\in E\setminus\operatorname{Ker}f^{n-1}$ fixé et la famille : $B=\left(\vec{v},f(\vec{v}),...,f^{n-1}(\vec{v})\right)$.*
Montrer que B est une base de E.
2. *Déterminer le rang de f. (**D'après Mines-Ponts, filière PSI.**)*

1. Comme $f^{n-1}\neq 0$, il existe bien $\vec{v}\in E\setminus\operatorname{Ker}f^{n-1}$.
Considérons la famille : $B=\left(\vec{v},f(\vec{v}),...,f^{n-1}(\vec{v})\right)$ et $(a_0,...,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n$ tel que

$$(E_1)\quad a_0\vec{v}+a_1f(\vec{v})+...+a_{n-1}f^{n-1}(\vec{v})=\vec{0}.$$

On applique f^{n-1} à (E_1), on obtient alors : $a_0 f^{n-1}(\vec{v}) = \vec{0}$ car $f^k(\vec{v}) = \vec{0}$ pour tout entier k supérieur ou égal à n.
Comme $f^{n-1}(\vec{v}) \neq \vec{0}$, on en déduit que $a_0 = 0$. L'égalité (E_1) devient :

$$(E_2) \quad a_1 f(\vec{v}) + ... + a_{n-1} f^{n-1}(\vec{v}) = \vec{0}.$$

On compose (E_2) par f^{n-2}, on obtient alors : $a_1 f^{n-1}(\vec{v}) = \vec{0}$. Et encore une fois, on utilise le fait que $f^{n-1}(\vec{v}) \neq \vec{0}$. On en déduit que $a_1 = 0$.
De façon générale, $k \in [\![1, n-1]\!]$ supposons que l'on ait :

$$(E_{k+1}) \quad a_k f^k(\vec{v}) + ... + a_{n-1} f^{n-1}(\vec{v}) = \vec{0}.$$

On applique f^{n-1-k} Ã (E_{k+1}), on obtient alors : $a_k f^{n-1}(\vec{v}) = \vec{0}$.
Et on utilise le fait que $f^{n-1}(\vec{v}) \neq \vec{0}$.
On en déduit que $a_k = 0$. On applique pour $k = n-1$ enfin. Et on a bien : $a_0 = a_1 = ... = a_{n-1} = 0$.
La famille B est libre, et comme B possède n éléments et enfin comme $\dim E = n$, on en déduit que B est donc une base de E.

2. $B \setminus \{\vec{v}\}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, f$. Cette famille génératrice est libre car B est libre. Elle est donc une base de $\mathrm{Im}\, f$.
Son cardinal est $n-1$. Le rang de f est $n-1$.

Mise en œuvre : exercice 1.18, **exercice 1.20**.

■ Sous-espaces vectoriels stables

❑ **Méthode 1.11.— Comment montrer qu'un s.e.v F est stable par $\phi \in \mathcal{L}(E)$**

- on peut montrer directement : $\forall \vec{u} \in F,\ \phi(\vec{u}) \in F$;
- on peut aussi tenter d'identifier une situation classique : $\mathrm{Ker}\, \phi$ et $\mathrm{Im}\, \phi$ sont stables par ψ lorsque ϕ et ψ commutent, pour tout polynôme P, $\mathrm{Ker}\, P(\phi)$ et $\mathrm{Im}\, P(\phi)$ sont stables par ϕ, la restriction de ϕ à F est une homothétie *etc.*

Remarque : Cette notion de sous-espace stable est très importante car elle permet entre autre d'en déduire l'écriture en blocs des matrices (voir le **chapitre 2**). Dans le **chapitre 4**, on utilise des sous espaces stables fondamentaux : les sous-espaces propres.

Exemple : *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, p un projecteur de E et f un endomorphisme de E. Montrer que : $f \circ p = p \circ f \iff \mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$ sont stables par f.*

Sens direct.
Supposons $f \circ p = p \circ f$. Alors pour tout $\vec{x} \in \mathrm{Ker}\, p$, on a :

$$p(f(\vec{x})) = f(p(\vec{x})) = 0 \Rightarrow f(\vec{x}) \in \mathrm{Ker}\, p.$$

Pour tout $\vec{y} \in \mathrm{Im}\, p,\ p(\vec{y}) = \vec{y}$ donc :

$$f(\vec{y}) = (f \circ p)(\vec{y}) = p(f(\vec{y})) \in \mathrm{Im}\, p.$$

Les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$ sont stables par f.

Méthodes

Sens réciproque.
Pour tout $\vec{x} \in E$, on a l'égalité (voir la **méthode 1.9**) :

$$\vec{x} = p(\vec{x}) + \vec{x} - p(\vec{x}).$$

Prenons $\vec{y} = p(\vec{x})$ et $\vec{k} = \vec{x} - p(\vec{x})$ alors $\vec{x} = \vec{y} + \vec{k}$, où $\vec{y} = p(\vec{x}) \in \mathsf{Im}\, p$ et $\vec{k} = \vec{x} - p(\vec{x}) \in \mathsf{Ker}\, p$.
Puis $\mathsf{Im}\, p$ est stable par f par hypothèse donc $f(\vec{y}) \in \mathsf{Im}\, p$.
De plus, p est un projecteur donc :

$$f(\vec{y}) \in \mathsf{Im}\, p \Rightarrow p(f(\vec{y})) = f(\vec{y}).$$

$\mathsf{Ker}\, p$ est stable par f par hypothèse donc $f(\vec{k}) \in \mathsf{Ker}\, p$ et $p(f(\vec{k})) = 0$.
Alors $f(p(\vec{x})) = f(p(\vec{y} + \vec{k})) = f(p(\vec{y})) = f(\vec{y})$ et $p(f(\vec{x})) = p(f(\vec{y})) + p(f(\vec{k})) = p(f(\vec{y})) = f(\vec{y})$.
Pour tout $\vec{x} \in E$, $f(p(\vec{x})) = p(f(\vec{x}))$ donc on a bien : $f \circ p = p \circ f$.

Mise en œuvre : exercice 1.3, **exercice 1.12**, **exercice 1.15**, **exercice 1.21**.

Remarque : On compléte la **méthode 1.11** par la **méthode 4.12** (après avoir vu la diagonalisation).

■ Hyperplans de E, espace vectoriel de dimension finie

❑ **Méthode 1.12.— Comment reconnaître ou caractériser un hyperplan**

- Soit en l'identifiant comme étant le noyau d'une forme linéaire non nulle, soit en montrant qu'il admet un supplémentaire de dimension 1.
- Si $\dim E = n$, on peut, en plus, soit montrer que c'est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$, soit constater qu'il admet, dans une base donnée, une équation de la forme $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, où les a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, ne sont pas tous nuls.

Exemple : *Ici $n \geqslant 2$, soit $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P'(0) = 0\}$.*
Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ puis déterminer ensuite un supplémentaire de H dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

▸ $f \mapsto f'(0)$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}_n[X]$, donc H, qui est le noyau de cette forme linéaire non nulle, est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$.

▸ Si $g : x \mapsto x$, alors $g \notin H$, donc $\mathbb{R}\, g = \{x \mapsto k\, x,\ k \in \mathbb{R}\}$ est un supplémentaire de H.
On peut remarquer aussi :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = P(x) - P'(0)x + P'(0)x.$$

Puis, on remarque aussi que

$$x \mapsto P(x) - P'(0)x \in H \text{ et } x \mapsto P'(0)x \in \mathbb{R}g.$$

Donc : $\mathbb{R}_n[X] = H \oplus \mathbb{R}g$.

Mise en œuvre : exercice 1.24, **exercice 1.25**.

■ Maths avec Python

Dans ce chapitre, nous avons abordé la notion d'interpolation de Lagrange. Un TD courant est de construire des polynômes de Lagrange, de les tracer et de les comparer à des fonctions non polynomiales interpolées par ces polynômes. Rappelons à cette occasion comment rentrer des fonctions avec Python (**méthode 1.13**), comment les tracer (en particulier, comment mettre plusieurs graphes ensembles) par la **méthode 1.14** ou la **méthode 1.15** et comment manipuler des polynômes soit en les considérant comme des fonctions soit en utilisant le sous-module *numpy.polynomial*, voir pour cela la **méthode 1.16**.
Enfin, on donnera une troisième façon de construire un polynôme d'interpolation (**méthode 1.17**).

❑ **Méthode 1.13.— Comment rentrer une fonction d'une ou plusieurs variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ avec Python**

- Si la fonction est ***explicitement du type*** $x \mapsto f(x)$ ***(respectivement du type*** $(x,y) \mapsto f(x,y)$,***) où l'expression, notée*** *expression* ***de la quantité*** $f(x)$ ***(respectivement*** $f(x,y)$***) est unique***, on tape

```
def  f(x) : (respectivement def f(x,y) : )
     return  expression
```

- Si la fonction est ***du type*** $x \mapsto f(x)$, ***où*** $f(x)$ ***a plusieurs expressions selon le domaine des*** x, par exemple : $f : x \mapsto \begin{cases} f_1(x) & \text{pour} \quad x < a \\ f_2(x) & \text{pour} \quad a \leqslant x < b \\ f_3(x) & \text{pour} \quad b \leqslant x \end{cases}$:

```
def f(x) :
    if x  < a :
         return(f1(x))
    elif a  <=  x  and x < b :
         return(f2(x))
    else :
         return(f3(x))
```

Mise en œuvre : exercice 1.26, **exercice 1.27**, **exercice 1.28**.

Exemple : *On considère la fonction g définie sur $[0,2[$ et f définie sur $[0,+\infty[$ par :*

$$g : x \mapsto \begin{cases} x & \text{pour} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{pour} \quad 1 \leqslant x < 2 \end{cases} \text{ et } f : x \mapsto \begin{cases} g(x) & \text{pour} \quad 0 \leqslant x < 2 \\ \sqrt{x}\, f(x-2) & \text{pour} \quad x \geqslant 2 \end{cases}.$$

Définir les deux fonctions g et f. Construire la liste des valeurs $f(k)$ pour $k \in [\![1,6]\!]$.

(Posé à l'écrit du Concours ENSAM-ESTP-POLYTECH en filière PSI.)

On tape la fonction `g` pour commencer et la fonction `f` ensuite.

```
def g(x):
    if 0 <= x and x < 1 :
        return x
    elif 1 <= x and x < 2 :
        return 1
    else :
        print( "valeur de  l'antecedent errone" )
import numpy as np
def f(x) :
    if 0 <= x and x < 2 :
        return g(x)
    elif x >= 2 :
        return np.sqrt(x)*f(x-2)
    else :
        print( "valeur de  l'antecedent errone" )
[f(k) for k in range(1,7)]    # f(x)=0 pour x pair
       [ 1 , 0.0 , 1.732050807 , 0.0 , 3.87298334 , 0.0 ]
```

❑ **Méthode 1.14.— Comment tracer une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec Python**

On rentre préalablement `numpy` (d'alias `np`) et `matplotlib.pyplot` d'alias `plt`.

- Si l'on a besoin de $+\infty$, $(-\infty)$, on tape `np.inf` (`-np.inf`).
- Pour ***tracer une ligne de segments brisés***, par exemple on veut relier les points $A0(x_0, y_0)$ à $An(x_n, y_n)$, on rentrera $[x_0, ..., x_n]$ dans `X` et $[y_0, ..., y_n]$ dans `Y` puis :

  ```
  plt.axis('equal');plt.plot(X,Y);plt.grid();plt.show()
  ```

  Si ***l'on veut juste visualiser le nuage de points*** (x_i, y_i) pour $i \in [\![0, n]\!]$, on ajoutera l'argument `"o"` dans la commande `plt.plot` (il s'agit bien de la lettre o et non du nombre 0), (voir l'**exercice 10.26**) par exemple), ainsi on tapera :

  ```
  plt.axis('equal');plt.plot(X,Y,"o");plt.grid();plt.show()
  ```

- Pour ***tracer le graphe de f pour $x \in [a, b]$ définie explicitement***, on définit d'abord une liste d'abscisses X avec `np.arange` en rentrant les deux extrémités a et b et le pas h ou avec `np.linspace` en rentrant a, b et le nombre de points p. Puis, on rentre la liste Y des images des éléments de X. On tape :

  ```
  X = np.arange(a,b,h) ; Y = [f(x) for x in X]
  plt.plot(X,Y) ; plt.show()
  ```

Mise en œuvre : exercice 10.26.

Remarques : 1. On peut taper `Y = f(X)` à la place de `Y = [f(x) for x in X]`
2. On peut taper aussi `X = np.linspace(a,b,p)` (où le pas h devient le nombre p de points).
3. `plt.plot` possède des options de présentation `color` et `linestyle`. Par exemple

```
plt.plot(X,Y,color='r', linestyle= '- -')
```

donne un tracé rouge et avec des lignes discontinues. $'g'$, $'b'$ et $'0'$ sont les codes respectivement pour la couleur verte, bleu et noire puis $'-'$ et $' :'$ sont les codes pour une ligne continue et en pointillée.
Pour tracer les axes Ox et Oy en noir (pour les distinguer de la (les) courbe(s)) :

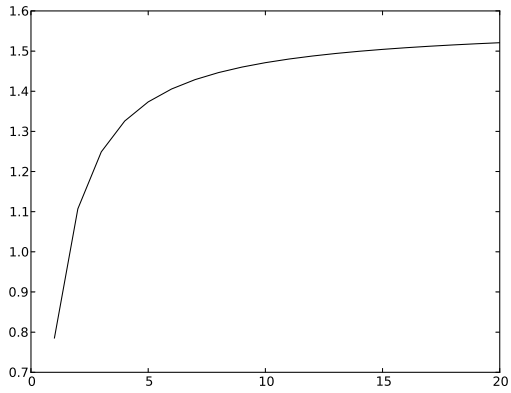
```
plt.axhline(color = '0 ') ; plt.axvline(color = '0')
```

On peut aussi incorporer des légendes ou du texte.

Exemple : *Écrire les lignes Python qui permettent de tracer la ligne de segments brisés passant par les points* $(k, f(k))$, *où* k *varie de* 1 *à* 20. *Appliquer et afficher avec* $f : x \mapsto \arctan x$.

```
import matplotlib.pyplot as plt ; import numpy as np
def f(x) : return(np.arctan(x))
X = [ k  for k in range(1,21) ]
Y = [ f(k) for k in range(1,21) ]
plt.plot( X,Y,color = '0'); plt.show( )
```

On obtient la courbe suivante.



❑ **Méthode 1.15.— Comment tracer plusieurs graphes ensemble avec Python**

On rentre préalablement `numpy` avec l'alias `np` et `matplotlib.pyplot` en alias `plt`.

- Pour ***tracer deux graphes sur le même dessin***, $y = f(x)$ en rouge et $y = g(x)$ en vert pour $x \in [a, b]$, avec p points, on écrit en suivant (avant de taper Entrée) :

```
X = np.linspace(a,b,p); plt.plot(X,f(X), color='r');
plt.plot(X,g(X), color='g'); plt.axis('equal');
plt.show( )    # on peut rajouter :
plt.legend(('y = f(x)', 'y = g(x)'), 'best')
```

- Pour ***tracer une famille de graphes sur le même dessin***, on peut utiliser une boucle `for`. Pour tracer ensemble les graphes des fonctions f_n pour $n \in [\![n1, n2]\!]$ et pour $x \in [a, b]$ avec p points, on définit une fonction des deux variables $f(x, n)$ et :

```
X = np.linspace(a,b,p)
for n in range (n1,n2+1) :
    Y  = f(n,X); plt.plot(X,Y); plt.show( )
```

- Pour ***tracer deux graphes (ou plus) côte à côte***, par exemple $y = f(x)$, $y = g(x)$ et $y = h(x)$ pour $x \in [a, b]$, avec p points, le graphe Γ_1 de f étant en rouge, celui Γ_2 de g en vert, on écrit en suivant (avant de taper Entrée) :

```
X = np.linspace(a,b,p); plt.subplot(221);
plt.plot(X,f(X), color='r');
plt.subplot(222); plt.plot(X,g(X), color='g');
plt.subplot(223); plt.plot(X,h(X)); plt.show()
```

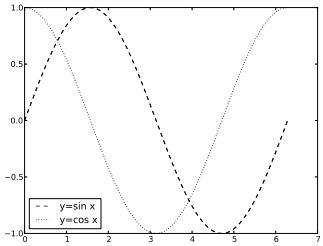
On obtient Γ_1 et Γ_2 côte à côte et Γ_3 en dessous. La commande $plt.subplot(n_1n_2n_3)$ donne le nombre n_1 de lignes, le nombre n_2 de colonnes et n_3 est le numéro de la figure.

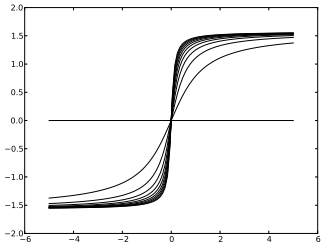
Exemples : 1. *Tracer* sin *(en pointillé) et* cos *(en ligne discontinue) ensemble.*

```
import matplotlib.pyplot as plt ; import numpy as np ;
X = np.linspace(0,2*np.pi,500) ;
plt.plot(X,np.sin(X),linestyle='- -')
plt.plot(X,np.cos(X),linestyle=' :')
plt.legend(("y  = sin x ", " y = cos x ),'best '); plt.show( )
```

2. *Superposer les graphes des* $f_n : t \mapsto arctan(nt)$ *entre* -5 *et* 5 *pour* $n \in [\![0, 10]\!]$.

```
import matplotlib.pyplot as plt; import numpy as np
X = np.linspace(-5,5,100)
for n in range(11)
    Y = np.arctan(n*X); plt.plot(X,Y); plt.show( )
```





❑ **Méthode 1.16.— Comment faire des opérations sur les polynômes**

On peut rentrer un polynôme comme une fonction (voir la **méthode 1.13**).
On peut aussi utiliser la fonction `Polynomial` du sous-module `numpy.polynomial` et un certain nombre d'attributs associés. On commence donc par taper :

```
from numpy.polynomial import Polynomial
```

- Pour ***créer un polynôme***, on liste ses coefficients par ordre de degré croissant. $p = a0 + a1X + a2X^2 + a_3X^3$ s'écrit `p = Polynomial([a0,a1,a2,a3])`
  L'attribut `coef` donne accès aux coefficients ordonnés par degré croissant.
  Ainsi, si l'on tape : `p.coef`, on obtient `array([a0.,a1.,a2.,a3.])`
  On suppose dans la suite de la méthode que p ***a été défini ainsi.***
- Pour ***calculer la valeur*** $p(a)$, on tape simplement : `p(a)` et pour obtenir $[p(x1), ..., p(xn)]$, on tape : `p([x1,...,xn])`.
- `p.coef[i]` fournit le ***coefficient devant*** X^i.
- `p.degree( )` donne le ***degré*** et `p.roots( )` les ***racines*** de p.
- Pour ***dériver le polynôme*** p, on tape : `p.deriv( )` qui renvoie un nouveau polynôme. Cet attribut a un argument optionnel n qui indique le nombre de dérivations à effectuer. Si l'on tape par exemple `p.deriv(2).coef`, l'on obtient les coefficients du polynôme dérivée seconde de p.
- Pour ***intégrer le polynôme*** p, on tape : `p.integ( )` qui renvoie un nouveau polynôme. Cet attribut a un premier argument optionnel donnant le nombre d'intégrations à effectuer et un second argument optionnel qui donne la constante d'intégration (ou la liste de constantes si l'on intègre plusieurs fois) à utiliser.
- Pour faire des ***opérations*** sur des polynômes, on utilise $+$, $-$ et $*$ pour additionner, soustraire et multiplier des polynômes. Par exemple, l'opération `(p**3).coef` permet d'obtenir la liste des coefficients de p^3.
- Pour faire la ***division euclidienne*** du polynôme p par le polynôme q, la commande `p // q` donne le polynôme quotient et `p % q` donne le reste.

Méthodes

Exemple : *Soit le polynôme $P = X^3 + 2X - 3$, calculer successivement $P(0)$, $[P(1), P(2), P(3)]$, $\deg P$, les racines de P, puis les polynômes P', P'' et enfin le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $B = X^2 + 1$.*

```
from numpy.polynomial import Polynomial
P = Polynomial([-3,2,0,1])
P(0), P([1,2,3]), P.degree()
     -3.0 , array([0., 9., 30.])  ,  3
P.roots(), P.deriv().coef, P.deriv(2).coef
    array([-0.5-1.6583124j, -0.5+1.6583124j, 1.0 + 0.j ]) ,
    array([2., 0., 3. ]) , array([0., 6.])
B = Polynomial([1, 0, 1 ]; Q = P // B ; R = P % B
Q.coef, R.coef
     array([0., 1.]) , array([-3., 1.])
```

Mise en œuvre : l'**exercice 1.28**, **exercice 4.32**, **exercice 5.23**, **exercice 7.40**.

❑ **Méthode 1.17.— Comment construire des polynômes de Lagrange**

On désire construire le polynôme de Lagrange P passant par les points $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$.

- On peut vouloir une liste de points où passe P (pas nécessairement la base d'interpolation).
- On peut construire P sous la forme d'un polynôme, on utilise alors le module `numpy.polynomial`, voir l'**exercice 1.27**.
- On peut construire P sous la forme d'une fonction (pour tracer L).
- On peut vouloir P directement en utilisant `interpolate.lagrange` du module `scipy`, voir l'**exercice 1.27** et l'**exercice 1.28**.

Exemple : *Calculer avec `interpolate.lagrange` de `scipy`, le polynôme de Lagrange de degré 2 qui passe par les points $(0,0), (1,1), (2,2^3)$ puis tracer ensemble sur $[0,2]$ ce polynôme de Lagrange et la fonction $x \mapsto x^3$, on pourra différencier les deux graphes avec `linestyle` par exemple.*

```
from scipy import interpolate
import numpy as np; import scipy as sp
X = np.array([0,1,2]); Y = X**3
P = sp.interpolate.lagrange(X,Y)
print(P), P
          2
     3 x - 2 x    poly1d([ 3., -2.,  0.])
import matplotlib.pyplot as plt
X = np.linspace(0,2,500);plt.plot(X,X**3,linestyle="- -");
plt.plot(X,P(X),color='0');plt.axis('equal');plt.show()
```

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Une famille de vecteurs contenant le vecteur nul est liée.	☐	☐
2. En dimension finie, une famille génératrice est une base.	☐	☐
3. $\mathbb{K}^2$ et $\mathbb{K}_2[X]$ sont isomorphes.	☐	☐
4. La somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels est directe si, et seulement si, leurs intersections deux à deux sont réduites à $\{0_E\}$.	☐	☐
5. L'image d'une famille finie libre par une application linéaire injective est une famille libre.	☐	☐
6. Toute famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie a un cardinal supérieur ou égal à toute famille libre.	☐	☐
7. L'espace des polynômes pairs de degré inférieur ou égal à n et l'espace des polynômes impairs de degré inférieur ou égal à n sont supplémentaires dans $\mathbb{K}_n[X]$.	☐	☐
8. Le rang d'une famille liée est strictement inférieur à son cardinal.	☐	☐
9. Si E et F sont de dimensions finies, il suffit que l'application linéaire u de E dans F soit injective (respectivement surjective) pour être bijective.	☐	☐
10. Dans $\mathbb{K}^4$, l'équation : $ax+by+cz+dt=0$, où $(a,b,c,d) \neq 0_{\mathbb{K}^4}$ définit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^4$ de dimension 3.	☐	☐
11. Il existe des applications linéaires injectives de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.	☐	☐
12. Il existe des applications linéaires surjectives de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$.	☐	☐
13. L'ensemble des polynômes de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à $n+1$.	☐	☐
14. La famille $\{x \mapsto \cos x, x \mapsto \cos 2x\}$ est liée dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.	☐	☐
15. La somme des $n+1$ polynômes interpolateurs de Lagrange étant égale à 1, ces polynômes forment une famille liée.	☐	☐

Énoncé des exercices

Exos minutes

Exercice 1.1 : $n \geqslant 1$, dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, analyser la liberté de la famille suivante :
$\mathcal{F}_1 = (x \mapsto |x-1|,\, x \mapsto |x-2|, ..., x \mapsto |x-n|)$.

Exercice 1.2 : $n \geqslant 1$, dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, analyser la liberté de la famille suivante :
$\mathcal{F}_2 = (x \mapsto x-1,\, x \mapsto x-2, ..., x \mapsto x-n)$.

Exercice 1.3 : Dans le $\mathbb{K}$-ev E, on considère $(\phi,\psi) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que : $\phi \,o\, \psi = \psi \,o\, \phi$.
Montrer que $\mathsf{Im}\,\phi$ et $\mathsf{Ker}\,\phi$ sont stables par ψ. En déduire deux autres inclusions du même type.

Exercice 1.4 : Vérifier que $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x-y+z-t=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Déterminer sa dimension et une de ses bases.

Exercice 1.5 : Vérifier que $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x+y=z+t=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Déterminer sa dimension et une de ses bases.

Familles libres et sommes d'espaces vectoriels

Exercice 1.6 : $n \geqslant 1$, dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, analyser la liberté des familles suivantes :
1. $\mathcal{F}_3 = (x \mapsto \cos(x), x \mapsto \cos(2x), ..., x \mapsto \cos(nx))$.
2. $\mathcal{F}_4 = \left(x \mapsto e^{p^2 x}\right)_{p\in\mathbb{N}}$, $x \in \mathbb{R}_+^\star$.

Exercice 1.7 : Dans $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on considère les vecteurs : $\vec{u}(1,-1,1)$, $\vec{v}(0,-1,2)$, $\vec{w}(1,-2,3)$ et on pose $\mathcal{F} = \{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$.
1. La famille $\mathcal{F}$ est-elle liée ? Déterminer une base de $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{F})$.
2. Soit $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+2y+z=0\}$. Donner une base de G. Puis montrer que $G = \mathsf{Vect}\,(\mathcal{F})$.

Exercice 1.8 : Soit, dans $\mathbb{R}^3$, $F = \mathsf{Vect}\,\{(1,1,0),(2,0,-1)\}$ et $G = \mathsf{Vect}\,\{(1,-1,0),(1,0,-2)\}$.
1. Justifier, sans calculs, que $F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
2. Déterminer $F \cap G$.
3. Trouver un supplémentaire F' de $F \cap G$ dans F, puis un supplémentaire G' de $F \cap G$ dans G.

Exercice 1.9 : Dans $E = \mathbb{C}^n$, soit $G = \mathsf{Vect}\,(\{(1,...,1)\})$, F le *s.e.v* des n-uplets $(x_1,...,x_n)$ de E tels que : $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$. Montrer que $F \oplus G = E$. Préciser le projeté d'un vecteur de E sur G dans la direction de F puis sur F dans la direction de G.

D'après Oral Mines-Telecom, filière PSI

Exercice 1.10* : Soit $E_1, E_2, \cdots, E_n$ n sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E ($n \geqslant 2$), montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(1) E_1, E_2, $\cdots$, E_n sont en somme directe ;
(2) E_1, E_2, $\cdots$, E_{n-1} sont en somme directe et $(E_1 + E_2 + \cdots + E_{n-1}) \cap E_n = \{0_E\}$.

Exercice 1.11* : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$.. On définit une famille de polynômes $(A_0, A_1, ..., A_n)$ en posant : $A_0 = 1$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $A_k = \dfrac{1}{k!}X(X - ka)^{k-1}$.

1. Démontrer que la famille $(A_0, ..., A_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

2. Démontrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $A'_k(X) = A_{k-1}(X - a)$.

3. Montrer, pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $A_k^{(j)}(X) = A_{k-j}(X - ja)$. En déduire, pour tout j et k éléments de $[\![0, n]\!]$, la valeur de $A_k^{(j)}(ja)$. (On distinguera suivant les cas $j < k$, $j = k$ ou $j > k$.)

Soit P un élément de $\mathbb{C}_n[X]$ et soient $\alpha_0, ..., \alpha_n$ des nombres complexes tels que $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k$.

4. Démontrer que, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_j = P^{(j)}(ja)$.

5. En déduire : $\forall (a, x, y) \in \mathbb{C}^3$, $(x + y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{n} x(x - ka)^{k-1}(y + ka)^{n-k}$.

(**Identité binomiale d'Abel**.)

D'après Oral Centrale-Supelec, filière PSI

■ Applications linéaires et théorème du rang

Exercice 1.12 : Ici $\dim E = n$, $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tels que $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$.
Montrer que $\mathrm{Im}\,(f \circ g) \subset \mathrm{Im}\, f$. Comparer alors le rang de f et de g.

Exercice 1.13 : Montrer que $\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P(X) \mapsto P(X^2) + (1 + X^2)P(X)$ est linéaire.
Est-elle injective ? Surjective ?

D'après CCINP, filière PSI

Exercice 1.14 : Dans E de dimension finie, soit $\phi \in \mathrm{L}(E)$ tel que $\phi^3 = \phi$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\,\phi \oplus \mathrm{Im}\,\phi$.

2. Montrer que $\mathrm{Im}\,\phi$ est stable par ϕ et que sa restriction à $\mathrm{Im}\,\phi$ est un automorphisme.

D'après École de l'air

Exercice 1.15* : Ici E et F sont des espaces vectoriels, $u \in L(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, E)$ avec $v \circ u = \mathrm{Id}_E$.

Montrer que $\mathrm{Ker}\, v \cap \mathrm{Im}\, u = \vec{0}$. Puis montrer : $\mathrm{Ker}\, v \oplus \mathrm{Im}\, u = F$.

D'après Oral Mines-Ponts, filière PSI

Exercice 1.16 : Soit f et g des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E.
On suppose que : $E = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g$. Montrer que ces deux sommes sont directes.

D'après Oral Concours ENSEA, filière PSI

■ Projecteurs et endomorphismes nilpotents

Exercice 1.17 : Soit $(f_1, ..., f_n) \in (\mathcal{L}(E))^n$ avec $f_1 + ... + f_n = \mathrm{Id}$.
On suppose de plus que pour tous entiers i et j compris entre 1 et n, $i \neq j \Rightarrow f_i \circ f_j = 0$.

Montrer que pour tout i, f_i est une projection vectorielle. Puis que : $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\, f_i$.

D'après Oral Mines-Telecom et ENSEA, filière PSI

Exercice 1.18 :** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\phi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice m (c'est-à-dire tel que $\phi^m = 0$ et $\phi^{m-1} \neq 0$.)

1. Montrer que $m \leqslant n$.

2. Soit p un projecteur de E tel que $\mathsf{Ker}\, p \subset \mathsf{Ker}\, \phi$. Montrer : $\forall j \geqslant 2$, $p \circ \phi^j = (p \circ \phi)^j$.

D'après Oral Polytechnique, filière PSI

Exercice 1.19* : On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, deux projecteurs p et q de E, vérifiant $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur.

2. Montrer que : $\mathsf{Im}\,(p \circ q) = \mathsf{Im}\, p \cap \mathsf{Im}\, q$ et $\mathsf{Ker}\,(p \circ q) = \mathsf{Ker}\, p + \mathsf{Ker}\, q$.

D'après Oral CCINP, filière PSI

Exercice 1.20 :** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice p (*i.e* $f^p = 0$) et Φ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par : $\Phi(g) = f \circ g - g \circ f$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Phi^n(g) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f^{n-k} \circ g \circ f^k$.

2. Montrer que Φ est nilpotent et majorer son indice de nilpotence.

D'après Polytechnique, filière PSI

Exercice 1.21 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non nul , $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$ et $\vec{x}$ désigne un vecteur non nul de E.

1. Montrer que $f(\vec{x})$ n'est pas colinéaire à $\vec{x}$, puis qu'aucune droite de E n'est stable par f.

2. Montrer que le plan $\mathsf{Vect}\left(\vec{x}, f(\vec{x})\right)$ est stable par f.

Exercice 1.22* : E étant un $\mathbb{K}$-ev, soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant l'égalité : $\phi^3 = Id_E$.

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer que $E = \mathsf{Ker}\,(\phi - Id_E) \oplus \mathsf{Ker}\,(\phi^2 + \phi + Id_E)$.

2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que $\mathsf{Ker}\,(\phi^2 + \phi + Id_E) = \mathsf{Ker}\,(\phi - jId_E) \oplus \mathsf{Ker}\,(\phi - j^2 Id_E)$, où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

En déduire : $E = \mathsf{Ker}\,(\phi - Id_E) \oplus \mathsf{Ker}\,(\phi - jId_E) \oplus \mathsf{Ker}\,(\phi - j^2 Id_E)$.

Exercice 1.23 :** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose l'application

$$\Delta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], P \mapsto P(X+1) - P(X).$$

1. Montrer que $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ et qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta^p = 0$.

2. En déduire pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} P(X+j) = 0.$$

D'après Oral Centrale-supelec, filière PSI

■ Hyperplans et formes linéaires

Exercice 1.24 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\vec{x}_0$ un vecteur non nul de E et u une forme linéaire non nulle. On définit l'application f en posant $f(\vec{x}) = u(\vec{x})\vec{x}_0$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. Quel est son rang ?

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un projecteur.

Exercice 1.25 : Si $n \geqslant 2$, soit : $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X],\ \int_0^1 P(t)\,dt = 0 \right\}$.
Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}_n[X]$.
D'après Concours ENSEA-ENSIIE, filière PSI

■ Maths avec Python : fonctions et polynômes de Lagrange

Exercice 1.26 : Soit $f : n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ n/2 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ 3n+1 & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases}$.

1. Programmer la fonction f en Python.
2. Écrire une procédure PYTHON nommée `Syracuse` qui reçoit un entier n et renvoie la suite des entiers obtenus en appliquant successivement f jusqu'à ce que l'on obtienne 1 ainsi que le nombre d'itérations nécessaires pour arriver à 1. Appliquer à $n \in [\![1, 5]\!]$. Que remarque t-on ?
3. Écrire en Python les commandes nécessaires pour obtenir le graphique du nombre d'itérations en fonction de l'entier initial. Dessiner ce graphique pour `Syracuse(n)` avec $n \in [\![1, 40]\!]$.

Exercice 1.27 : 1. Créer une fonction `BASE` d'argument la liste $Xabs$, qui renvoie la liste des polynômes de la base d'interpolation de Lagrange associée aux valeurs de la liste $Xabs$. Appliquer au cas où $Xabs = [0, 1, 2]$ et retrouver ce résultat par le calcul.
2. En utilisant `BASE` comme sous-procédure, créer une fonction `POL_LAG` d'arguments `Xabs` et `f` qui renvoie le polynôme d'interpolation de Lagrange passant par les points dont les abscisses sont les valeurs de $Xabs$ et les ordonnées sont les images par f des valeurs de $Xabs$.
Appliquer avec $Xabs = [0, 1, 2]$ et la fonction $x \mapsto x^2$. Que remarque t-on ?
Appliquer avec $Xabs = [-1, 0, 1, 2, 3]$ et $f = \arctan$. On appellera dans la suite P_1 le dernier polynôme trouvé.
3. Tracer ensemble P_1 et la fonction arctan sur $[-1, 3]$. On pourra différencier les graphes avec l'option `linestyle`.
4. Retrouver P_1 en utilisant `interpolate.lagrange` de `scipy`.

Exercice 1.28* : 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a, b])$, $(x_0, ..., x_n) \in [a, b]^{n+1}$ **tous distincts** et P_n l'unique polynôme de degré au plus n qui satisfait à $P_n(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.
On pose : $\phi : [a, b] \setminus \{x_0, ..., x_n\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{f(x) - P_n(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$.

On pose aussi : $\forall x \in [a, b] \setminus \{x_0, ..., x_n\}$ fixé, $g : [a, b] \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t) - P_n(t) - \phi(x)\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$.

a. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et s'annule aux $(n + 2)$ points $x_0, ..., x_n, x$ de $[a, b]$.
b. Démontrer qu'il existe $\zeta \in [a, b]$ tel que $g^{(n+1)}(\zeta) = 0$.
c. En déduire : $\forall x \in [a, b] \setminus \{x_0, ..., x_n\},\ \exists \zeta \in [a, b],\ \phi(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$.
d. En déduire : $\forall x \in [a, b],\ |f(x) - P_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\ \sup_{x \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle **polynôme de Tchebychev de degré** n la fonction définie par

$$T_n : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(n \arccos x).$$

a. Calculer T_0, T_1 et T_2.

b. On pose $\alpha = \arccos x$, en remarquant que $T_n(x) = \mathfrak{Re}\left(e^{in\alpha}\right)$ montrer que T_n est un polynôme de degré exactement n.

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2}(x) = 2x\,T_{n+1}(x) - T_n(x)$. Retrouver le fait que T_n est un polynôme de degré n dont on donnera le coefficient dominant.

d. Ici $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer que T_n admet exactement n racines simples : $x_k = \cos\left(\dfrac{2k+1}{2n}\pi\right)$ pour tout k entier de $[\![0, n-1]\!]$.

e. Ici $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, T_n admet exactement $n+1$ extrema globaux : $z_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ et que $T_n(z_k) = (-1)^k$. Remarquer que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1$.

3. Dans cette question, $[a, b] = [-1, 1]$. L'objectif est de choisir les points $x_0, ..., x_n$ utiles pour l'interpolation de Lagrange de telle manière que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} \left|\prod\limits_{i=0}^{n}(x - x_i)\right| \leqslant \sup\limits_{x\in[-1,1]} |Q(x)|$ pour tout polynôme Q normalisé de degré $n+1$. Nous allons montrer que les points $x_0, ..., x_n$ qui vérifient cette propriété sont les racines du polynôme de Tchebychev T_{n+1}.
Posons alors $\dfrac{1}{2^n}T_{n+1} = \overline{T}_{n+1}$ (et donc $\overline{T}_{n+1}$ est normalisé), considérons $Q \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ **normalisé** quelconque et posons : $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $x_j = \cos\left(\dfrac{2j+1}{2n+2}\pi\right)$ et $\forall k \in [\![0, n+1]\!]$, $z_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$.

a. Montrer que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} \left|\prod\limits_{j=0}^{n}(x - x_j)\right| = \dfrac{1}{2^n}$.

b. Montrer $\deg\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right) \leqslant n$ et $\forall k \in [\![0, n+1]\!]$, $\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right)(z_k) = Q(z_k) - \dfrac{(-1)^k}{2^n}$.

c. Supposons que $\dfrac{1}{2^n} > \sup\limits_{x\in[-1,1]} |Q(x)|$ et $k \in [\![0, n+1]\!]$.

Montrer alors que si k est pair, $\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right)(z_k) < 0$ et si k est impair, $\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right)(z_k) > 0$.
En déduire qu'il y a $(n+1)$ changements de signe pour $\left(Q - \overline{T}_{n+1}\right)$.
Établir alors une contradiction. Conclure.

4. Montrer que si $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}v$, on a l'équivalence : $v \in [-1, 1] \Leftrightarrow x \in [a, b]$.
En déduire les réels $x_0, ..., x_n$ de $([a, b])^n$ qui vérifient

$$\sup_{x\in[a,b]} \left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |Q(x)|$$

pour tout polynôme Q normalisé de degré $n+1$.

5. Application numérique. On suppose ici $f : x \mapsto \dfrac{1}{2+7x^2}$ et $[a, b] = [-1, 1]$. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange $P9$ ayant pour support `X=np.linspace(-1,1,9)` et `f(X)` puis le polynôme d'interpolation de Lagrange $NewP9$ ayant pour support les 9 racines de T_9 et leurs images par f. Faire deux dessins où apparaissent les graphes de f et de $P9$ puis de f et de $NewP9$ sur $[-1, 1]$. On pourra différencier les graphes avec l'option `linestyle`. De plus, on pourra utiliser la fonction `interpolate.lagrange` de `scipy`.

Indications

Ex. 1.1

On pourra raisonner en partant de $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k |x-k| = 0$ *et jouer sur la dérivabilité du membre de gauche de cette égalité.*

Ex. 1.6

Voir la **méthode 1.1**. *Pensez à des récurrences ! Plus précisément pour l'hérédité de* **1**, *on part de l'égalité, valable pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \cos x + ... + \lambda_n \cos(nx) + \lambda_{n+1} \cos((n+1)x) = 0$. *On dérive deux fois, on obtient une nouvelle égalité et on fait disparaître le terme en* $\cos((n+1)x)$ *en jouant sur les deux égalités que l'on a.*

Ex. 1.8

Pour la première question, raisonner sur les dimensions.

Pour la troisième question, on a l'embarras du choix niveau supplémentaire.

Ex. 1.9

Pour montrer $F \oplus G = E$, *il y a plusieurs méthodes. Commencer ici par étudier* $F \cap G$.

C'est l'occasion aussi de revoir le projeté d'un vecteur et les projections. Allez à la **méthode 1.7**.

Ex. 1.10

Pour le sens direct, penser que si $\sum_{i=1}^{n-1} \vec{x}_i = 0$ *alors* $\sum_{i=1}^{n-1} \vec{x}_i + \vec{0} = \vec{0}$.

Pour le sens réciproque, partir de $\sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i = \vec{0}$, *où* $\vec{x}_i \in E_i$. *Il s'agit de prouver :* $\forall i, \vec{x}_i = \vec{0}$.

Ex. 1.11

1. *C'est une famille échelonnée en degré ! À vous de continuer.*

2. *On sépare le cas* $k = 1$ *et pour* $k \geqslant 2$, *on dérive la formule définissant* A_k *et on l'arrange.*

3. *Pour la première égalité, on utilisera la question précédente. Pour la seconde inégalité, on distinguera bien les cas* $j < k$, $j = k$ *et* $j > k$. *Il faudra trouver* 0 *ou* 1 *selon les cas.*

4. *On remarquera :* $P^{(j)}(ja) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k^{(j)}(ja)$. *Et on utilisera la question précédente.*

5. *Comme* A_k *possède le groupement* $(X-ka)^{k-1}$ *et l'identité à montrer le groupement* $(x-ka)^{k-1}$, *on va supposer* y *fixé et* $(x+y)^n$ *un polynôme de variable* x.

On va poser $P = (X+y)^n$ *et comme* $P \in \mathbb{C}_n[X]$, *on pourra appliquer le résultat de* **4**.

Ex. 1.12

N'oubliez pas que $\mathsf{Im}\, f_1 \subset \mathsf{Im}\, f_2 \Rightarrow \mathsf{Rg}\,(f_1) \leqslant \mathsf{Rg}\,(f_2)$.

Ex. 1.13

C'est typiquement les **méthode 1.4** *et* **méthode 1.5**. *On manipule ausi les degrés des polynômes.*

Ex. 1.14

1. *Vous avez pensé au théorème du rang, cela tombe bien, nous aussi !*

Maintenant, on peut faire une Analyse-Synthèse (voir **méthode 1.8***), mais c'est plus long.*

2. *On rappelle qu'en dimension finie, si* ϕ *est de noyau nul,* ϕ *est...*

Ex. 1.15

Pour la première égalité, on part d'un vecteur $\vec{y} \in \mathsf{Ker}\, v \cap \mathsf{Im}\, u$, et on montrera qu'il est nul.

Pour la somme de la deuxième égalité, on introduit $\vec{x} \in F$ quelconque qui s'exprime comme somme d'un vecteur de $\mathsf{Ker}\, v$ et d'un vecteur de $\mathsf{Im}\, u$ et on appliquera un développement par Analyse-Synthèse. C'est la **méthode 1.8**. *En effet, contrairement à l'exercice précédent, comme on est en dimension quelconque, toute tentative d'user du théorème du rang est verboten !*

Ex. 1.16

L'erreur classique est de prendre $\vec{x} \in \mathsf{Im}\, f \cap \mathsf{Im}\, g$ et de vouloir $\vec{x} = 0$. L'hypothèse « dimension finie » est importante. Appliquer alors le théorème du rang à f et g et aussi la formule de Graßmann appliquée à $\mathsf{Im}\, f + \mathsf{Im}\, g$ d'une part et $\mathsf{Ker}\, f + \mathsf{Ker}\, g$ d'autre part.

Ex. 1.17

C'est un exercice qui généralise la notion de projecteur associé vue en première année ($p+q = \mathrm{Id}$). On rappelle que si f_i est un projecteur et $\vec{u}_i \in \mathsf{Im}\, f_i$ alors $f_i(\vec{u}_i) = \vec{u}_i$.

Ex. 1.18

1. *Comme ϕ est nilpotent d'indice m, il existe $\vec{u}$ tel que $\phi^{m-1}(\vec{u}) \neq 0$.*

Montrer alors que la famille $\left(\phi^{m-1-k}(\vec{u}), ..., \phi^{m-1)}(\vec{u})\right)$ est libre $\forall k \leqslant m-1$.
Cela ressemble à une certaine méthode, non ?

2. *Patron, vous nous servirez une petite récurrence, une !*

Ex. 1.19

Procéder par double inclusion pour les deux égalités.

Allez vous promener du côté de la **méthode 1.9** *pour prendre de l'inspiration !*

Ex. 1.20

1. *On introduit $D : g \mapsto f \circ g$ et $G : g \mapsto g \circ f$ et on vérifie que D et G commutent.*

2. *Il faut choisir la puissance n assez grande, c'est-à-dire de telle manière que l'un des deux entiers k et $n-k$ est supérieur ou égal à p.*

Ex. 1.21

1. *On peut raisonner par l'absurde.*

Ex. 1.22

On applique typiquement la méthode de l'analyse-synthèse indiquée dans la **méthode 1.8**. *On peut aussi aller voir l'exemple de la* **méthode 1.10** *qui développe cette manière de raisonner.*

Ainsi, pour appliquer pile-poil le même développement, on peut remarquer que :
$\phi^3 - Id_E = (\phi - Id_E) \circ (\phi^2 + \phi + Id_E) = (\phi^2 + \phi + Id_E) \circ (\phi - Id_E)$.

Ex. 1.23

La fonction Δ définie dans cette planche est classique et se retrouve dans une série d'autres planches, à Centrale-Supelec comme dans les autres concours. Ici, on s'intéresse au caractère nilpotent de Δ.

Pour **1**, *on remarquera que $P(X)$ et $P(X+1)$ sont deux polynômes de même degré et de même coefficient dominant. Donc $\deg(\Delta(P)) < \deg(P)$.*

Pour **2**, *on commencera par calculer $\Delta^2(P)$ puis $\Delta^3(P)$ puis on « devinera » une formule qui donne $\Delta^r(P)$ pour r entier en s'inspirant de la formule à démontrer.*

Ex. 1.25

Mettre en évidence une forme linéaire non nulle dont H est le noyau, puis une droite vectorielle quelconque non incluse dans H. Allez voir l'exemple de la **méthode 1.12**.

Ex. 1.26

1. *On jouera de l'*`if`*, de l'*`elif` *et de l'*`else` *(et sans instrument de musique !)*

2. *Pour* $n = 1$*, on a* $L = [1]$ *et remarquer que* 1 *est toujours le dernier élément de* L*.*

Pour créer un compteur, on tape initialement $i = 0$ *puis dans la boucle, on tape à chaque pas* $i+ = 1$ *et après la boucle (qui est du type* `while x>1 :`*), le dernier* i *est le nombre d'itérations.*

3. *On rappelle que l'on doit importer* `matplotlib.pyplot`*.*

Ex. 1.27

1. *On pourra utiliser la fonction* `Polynomial` *de* `numpy.polynomial` *pour construire la liste des polynômes interpolateurs* $L_0, ..., L_n$ *de Lagrange. Au départ, on initialise avec* `L=[]`*. Attention, comme dans le cours et dans l'exercice, on a* $n+1$ *valeurs* $x_0, ..., x_n$*, la longueur de* `Xabs` *est* $n+1$ *(en effet pour* `Xabs=[0,1,2]`*,* $n = 2$ *et* `len(Xabs)` *vaut* 3*), on tapera donc* `n = len(Xabs) -1`*. Puis on construit les polynômes* $L_0, L_1, ..., Ln$ *dans une boucle double en faisant des produits de polynômes de degré* 1*. Par exemple* j *est l'indexation de la boucle extérieure et* i *celle de la boucle intérieure. Pour éviter de faire appel à* `range(0,j)` *puis* `range(j+1,n)`*, on peut utiliser* `if i!=j` *pour raccourcir un peu. On initialise avec* `P=Polynomial([1])` *qui est* $P = 1$*. On rappelle enfin que* `Polynomial([a,b])` *est* $a + bX$*. Voir la* **méthode 1.16** *pour plus d'informations.*

2. *Les ordonnées sont les valeurs* `f(Xabs[i])` *pour* i *dans le* `range(0,n+1)`*. De plus, la fonction* arctan *est prédefinie dans le module* `numpy` *d'alias* `np`*. On tapera donc* `np.arctan`

3. *Allez voir la* **méthode 1.15** *!*

4. *Allez voir la* **méthode 1.17** *et l'exemple développé juste après pour la syntaxe.*

Ex. 1.28

Cet exercice est un mini-problème et seule la question 5 fait appel à l'outil Python.

1. *Vous avez tous reconnu que* P_n *est le maintenant célèbre polynôme d'interpolation de Lagrange associé au support* $((x_0, f(x_0)), ..., (x_n, f(x_n))$*. Pour* **1.b***, on appliquera le théorème de Rolle autant que possible. Pour* **1.c***, on dérivera* g *jusqu'à la dérivée* $(n+1)^{ème}$*.*

Enfin, pour **1.d***, on utilisera* **1.c** *et on n'oubliera pas de traiter le cas où* x *vaut un des* x_i*.*

2. *Pour* **2.b***, on développera* $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$*, après avoir rappelé que* $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$*.*

Pour **2.c***, on utilisera la formule du cosinus d'une somme pour l'égalité et on fera une récurrence pour le coefficient dominant et le degré.*

Pour **2.d***, on repartira de la définition de* T_n *avec* arccos*.*

Pour **2.e***, on partira toujours de la définition de* T_n *que l'on dérivera.*

3. *Attention, ici* T_{n+1} *est de degré* $n+1$ *et a donc* $n+1$ *racines.*

Pour **3.a***, on utilisera le fait que* $\sup_{x\in[-1,1]} \left|\overline{T}_{n+1}(x)\right| = \dfrac{1}{2^n}$*.*

Pour **3-b***, on utilisera le fait que* $T_{n+1}(z_k) = (-1)^k$*.*

Pour **3-c***, que dire d'un polynôme de degré* n *qui s'annule* $n+1$ *fois ?*

4. *En utilisant le résultat de* **1.d** *pour* $a = -1$ *et* $b = 1$ *et le résultat de* **3***, que peut-on dire du choix des* $n+1$ *racines de* T_{n+1} *pour faire l'interpolation de Lagrange sur* $[-1, 1]$ *? Et après, on doit passer à* $[a, b]$*.*

5. *Pour la syntaxe des graphes, on pourra aller s'inspirer de la* **méthode 1.15** *et pour la syntaxe du calcul d'un polynôme d'interpolation de Lagrange pour un support donné, on pourra s'inspirer de la* **méthode 1.17**.