



Cours
Exercices
corrigés

Yves Berthaud • Cécile Baron • Jean-Loïc Le Carrou • Éric Sultan
Sinan Haliyo • Sylvie Le Moyne

Introduction à la mécanique des solides

DUNOD

Introduction à la mécanique des solides

Cours et exercices corrigés

DUNOD

Graphisme de couverture : Elizabeth Riba

Illustration de couverture : © Wright Out There - Shutterstock.com

© Dunod, 2022

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-084025-0

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos XI

1	Notions préliminaires de mécanique des solides indéformables	1
1.	Notions de système matériel, de solide et de point matériel	2
1.1.	Système matériel	2
1.2.	Solide	2
1.3.	Point matériel	2
2.	Trièdres, bases, repères	3
2.1.	Repérage d'un point	3
2.2.	Vitesse et accélération d'un point	4
3.	Calcul des vecteurs vitesse	6
3.1.	Calcul de la vitesse dans R	6
3.2.	Calcul de la vitesse dans R_l	7
3.3.	Relation entre les vecteurs vitesse	7
4.	Action mécanique	9
4.1.	Définitions	9
4.2.	Action mécanique de contact	10
4.3.	Action mécanique à distance	14
5.	Les lois fondamentales de la mécanique - interaction	15
5.1.	Principe d'inertie - 1 ^{re} loi de Newton	15
5.2.	Principe fondamental de la dynamique - 2 ^e loi de Newton	16
5.3.	Actions réciproques - 3 ^e loi de Newton	17
6.	Énergie cinétique, énergie potentielle, énergie mécanique d'un point matériel	18
6.1.	Travail d'une force	18
6.2.	Énergie mécanique	20
6.3.	Exemple d'utilisation de l'énergie pour la résolution d'un problème	23
	L'essentiel	25
	Entraînez-vous	27
	Solutions	33
2	Cinématique des solides indéformables	41
1.	Définitions	41
1.1.	Définition d'un solide indéformable	41

1.2. Espace	42
1.3. Notion de référentiel d'espace	42
2. Vitesse et accélération des points d'un solide	43
2.1. Angles d'Euler	43
2.2. Champ des vitesses dans un solide	45
2.3. Équiprojectivité	46
2.4. Exemple	46
2.5. Champ des accélérations	49
3. Composition des mouvements	49
3.1. Composition des vecteurs vitesse	49
3.2. Composition des vecteurs rotation	50
3.3. Composition des torseurs cinématiques	51
3.4. Vitesse de glissement	51
3.5. Composition des accélérations	52
4. Mouvement plan sur plan	54
4.1. Définition	54
4.2. Détermination du point I	55
4.3. Propriétés de la base et de la roulante	55
5. Liaisons : aspects cinématiques	56
5.1. Liaison ponctuelle	57
5.2. Liaison linéaire rectiligne	58
5.3. Liaison linéaire annulaire	59
5.4. Liaison rotule	60
5.5. Liaison appui plan	61
5.6. Liaison pivot glissant	62
5.7. Liaison pivot	63
5.8. Liaison glissière	64
5.9. Liaison hélicoïdale	65
5.10. Liaison encastrement	66
6. Schématisation des systèmes mécaniques	67
6.1. Graphe des liaisons, des actions mécaniques	67
6.2. Schéma cinématique	68
L'essentiel	70
Entraînez-vous	72
Solutions	77
3 Statique des solides indéformables	81
1. Action mécanique	82
1.1. Actions extérieures / actions intérieures	82

1.2. Force et moment	83
1.3. Torseur des actions mécaniques	83
1.4. Action mécanique de contact	84
1.5. Action mécanique à distance	85
1.6. Actions de liaison	87
2. Principe fondamental de la statique	94
2.1. Équilibre statique	94
2.2. Énoncé du principe fondamental de la statique (PFS)	94
2.3. Théorème de la résultante et théorème du moment résultant	95
2.4. Théorème des actions réciproques	95
3. Analyse des mécanismes	98
3.1. Liaison équivalente (liaisons en parallèle et liaisons en série)	99
3.2. Hyperstatisme et mobilité	101
3.3. Étude des chaînes de solides parfaits (chaîne fermée, chaîne ouverte)	102
L'essentiel	106
Entraînez-vous	109
Solutions	117
4 Cinétique des solides indéformables	131
1. Torseur cinétique	132
1.1. Quantité de mouvement	132
1.2. Moment cinétique	132
1.3. Torseur cinétique au centre de masse	133
1.4. Exemple : torseur cinétique d'une tige	134
1.5. Moment cinétique par rapport à un axe	135
2. Moments et opérateur d'inertie	136
2.1. Moment d'inertie d'un solide par rapport à un plan	136
2.2. Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe	137
2.3. Additivité	139
2.4. Moment d'inertie d'un solide par rapport à un point	139
2.5. Opérateur d'inertie d'un solide	140
2.6. Calcul de la matrice d'inertie	141
2.7. Exemple : matrice d'inertie d'un cylindre	142
3. Symétries matérielles et axes principaux d'inertie	145
3.1. Symétries	145
3.2. Axes principaux d'inertie	146
3.3. Exemples	151
4. Théorèmes des axes parallèles (Huygens)	153
4.1. Théorème de Huygens	153
4.2. Généralisation : Théorème de Huygens-Steiner	155

5.	Calcul du moment cinétique d'un solide	156
5.1.	Cas général	156
5.2.	Mouvement plan sur plan	157
6.	Énergie cinétique d'un solide	158
	L'essentiel	160
	Entraînez-vous	163
	Solutions	166
5	Dynamique des solides indéformables	175
1.	Torseur dynamique	176
1.1.	Définition	176
2.	Relation entre le torseur cinétique et le torseur dynamique	176
3.	Principe fondamental de la dynamique (PFD)	179
3.1.	Énoncé	179
3.2.	Théorèmes dynamiques	179
3.3.	Théorème des actions réciproques	180
3.4.	Exemple : boule sur piste circulaire	181
4.	Principe fondamental de la dynamique en repère non galiléen	184
5.	Application du PFD. Retour sur l'exercice : métronome de secours	185
6.	Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à un système en rotation	187
6.1.	Calculs préliminaires	187
6.2.	Application du PFD	188
6.3.	Équilibrage statique	189
6.4.	Équilibrage dynamique	189
7.	Théorèmes énergétiques	190
7.1.	Généralités	190
7.2.	Puissance des actions mécaniques exercées sur un solide	191
7.3.	Puissance des actions mutuelles entre deux solides	192
7.4.	Travail	193
7.5.	Énergie potentielle	193
7.6.	Théorème de l'énergie cinétique	196
7.7.	Intégrale première de l'énergie cinétique	199
	L'essentiel	203
	Entraînez-vous	206
	Solutions	213

Annexe

A	Produit scalaire et produit vectoriel	225
B	Propriétés des torseurs	227
	1. Champ de vecteurs antisymétriques	227
	2. Vecteurs liés, libres	228
	3. Champ de moment	228
	3.1. Éléments de réduction d'un torseur	230
	3.2. Opérations sur les torseurs	230
	3.3. Glisseur	230
	3.4. Couple	231
	3.5. Décomposition d'un torseur	231
	4. Axe d'un torseur	231
C	Unités	233
	1. Unités du Système International	233
	2. Unités dérivées du système international	234
	Bibliographie	237
	Index	239

Avant-propos

Cette troisième version de l'ouvrage consacré à la mécanique du solide indéformable (parfois appelée mécanique du solide rigide) correspond à un remaniement important de la structure avec une ré-écriture des trois premiers chapitres, l'ajout de plusieurs exercices avec des corrections plus détaillées.

Le chapitre *Quelques éléments de la mécanique du solide* nous permet de définir l'objet d'étude, à savoir le système matériel, avec ses variantes : isolé, pseudo-isolé, fermé ou ouvert. Ce dernier cas, courant en mécanique des fluides, n'est pas traité ici.

Les notations, les notions de repère, de référentiel et de base permettent de manipuler les vecteurs vitesse et accélération d'un point. Nous présentons les actions mécaniques et leur modélisation vectorielle avec quelques éléments relatifs au frottement entre solides.

Ce chapitre se termine par les lois de Newton et les notions délicates d'énergies cinétique, potentielle ou mécanique qui sont fondamentales pour comprendre et utiliser le théorème de l'énergie cinétique.

La *Cinématique du solide indéformable* peut être efficacement décrite par la cinématique d'un des points de ce solide (par exemple son centre de masse) et les rotations du solide. C'est ainsi que nous arrivons aux notions d'angles d'Euler et de vecteur vitesse de rotation spécifiques à la mécanique des solides indéformables. Le torseur des vitesses sera défini ; c'est un outil très utilisé en France, inconnu partout ailleurs, qui a l'avantage de structurer - et d'unifier - la présentation générale. L'équiprojectivité du champ des vitesses découle de la relation entre les vitesses de deux points d'un solide mais elle peut aussi servir pour définir complètement ce champ des vitesses. Des applications dans le cas particulier de mouvements plan sur plan sont incluses dans ce chapitre avec la description du mouvement - dans ce cas précis - comme une combinaison de vitesses de rotations instantanées autour d'un point I, mobile au cours du temps, appelé centre instantané de rotation.

À ce stade il est naturel de s'intéresser aux mouvements relatifs de deux solides liés par ce que l'on appelle une liaison mécanique, laquelle autorise (ou pas) certains mouvements. Nous donnons quelques exemples pour chaque type de liaison et construisons le torseur cinématique de chacune d'elle.

Une fois que la modélisation mathématique de la cinématique est installée, il est possible de s'intéresser à la description des actions mécaniques entre solides et à leur équilibre. C'est l'objet du chapitre *Statique des solides*. Il nous faut pour cela reprendre les actions à distance, de contact et en proposer une modélisation cohérente avec la mécanique des solides indéformables. Cette cohérence impose de considérer la notion de résultante mais aussi de moment en un point ce qui définit un torseur d'actions mécaniques.

Il devient alors possible de balayer les liaisons mécaniques et de compléter leur description par les torseurs d'actions transmissibles entre solides dans le cas d'un contact parfait (pas de frottement ou avec frottement mais dans le cas du roulement sans glissement ce qui est le cas dans un roulement à billes). Le cas du contact non parfait est traité dans quelques cas particuliers sachant que cela complique sérieusement les calculs (surtout en dynamique).

Les deux théorèmes de la résultante et du moment ainsi que celui des actions réciproques (issus du principe fondamental de la statique) fournissent les équations nécessaires à la résolution d'un problème de statique des solides indéformables.

Ce chapitre se termine par une courte description des liaisons (parallèle ou série) de solides avec les chaînes dites ouvertes, fermées ou complexes.

La *Cinétique du solide indéformable* est un chapitre de transition, technique, qui donne l'occasion de mettre en place l'opérateur d'inertie et la matrice d'inertie. Nous débutons par la construction du torseur cinétique - dans la lignée des torseurs cinématique et d'actions mécaniques - constitué de la quantité de mouvement et du moment cinétique. Nous montrons que l'utilisation du centre de masse (confondu avec le centre de gravité dans le cadre des applications présentées) permet de simplifier l'expression de la quantité de mouvement que nous pouvons calculer uniquement en connaissant la vitesse de ce point.

Les moments d'inertie d'un solide par rapport à un plan, à un axe ou à un point sont présentés. En reprenant le calcul du moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe quelconque, il est possible, après manipulations, de faire apparaître ce que l'on appelle l'opérateur d'inertie caractérisé par sa matrice dans une base de travail. Il faut alors se familiariser avec cette matrice d'inertie en la calculant pour un certain nombre de solides simples (cylindres à base circulaire ou non, sphère, disque...). Nous nous intéressons aux axes principaux d'inertie et aux valeurs propres associées, ce qui simplifiera les calculs. Cet opérateur d'inertie peut alors être utilisé dans la définition du moment d'inertie pour montrer qu'il y a deux contributions, l'une dépendant de la vitesse du point de calcul et de celle du centre de masse et l'autre de cet opérateur d'inertie. De nombreux exemples montreront l'intérêt de cette présentation. Nous terminons ce chapitre par la définition et le calcul de l'énergie cinétique d'un solide en mouvement.

La *Dynamique des solides* débute de façon logique par la présentation du torseur dynamique. De la même façon que pour le torseur cinétique, nous montrons que le centre de masse permet de simplifier l'expression de la résultante dynamique. Le moment dynamique, quant à lui, est calculé à partir du moment cinétique pour aboutir à une formule de même structure.

Le principe fondamental de la dynamique est présenté avec les applications en repère galiléen ou non galiléen. Nous expliquons comment équilibrer - statiquement et dynamiquement - un solide en rotation, ce qui est d'intérêt pratique dans de nombreuses situations.

Enfin le théorème de l'énergie cinétique dans le cas général de solides en liaisons parfaites ou non, permet de retrouver de façon simple et automatique les équations de mouvements du système étudié, équations que l'on obtient *via* le principe fondamental de la dynamique mais de manière plus complexe.

Des annexes complètent cet ouvrage pour donner des précisions sur les produits scalaire et vectoriel, sur les torseurs et enfin sur les unités.