PTSI

MATHS

1 DEVOIR CORRIGÉ PAR SEMAINE



avec copies
& corrigés commentés

Abdelkhalak El Hami
Bouchaïb Radi

ellipses

PTSI

MATHS

1 DEVOIR CORRIGÉ PAR SEMAINE



Bouchaïb RADI
Professeur des universités
Faculté des Sciences et Techniques
Settat, Maroc

Abdelkhalak EL HAMI
Professeur des universités
Institut National des Sciences
Appliquées de Rouen, France

ellipses

Conception graphique couverture : Nathalie FOULLOY

ISBN 9782340-117532

Dépôt légal : août 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Cet ouvrage est conforme au nouveau programme de mathématiques (mai 2021) des classes de PTSI Première année et il progresse au rythme de ce programme officiel.

Organisé en seize chapitres qui s'enchaînent ainsi logiquement, le livre développe successivement les différents thèmes de ce programme de mathématiques depuis le vocabulaire ensembliste et le calcul algébrique jusqu'au dénombrement et aux probabilités. Chaque chapitre est divisé en deux parties :

- La première partie est l'énoncé du problème de synthèse avec le thème abordé, la durée de sa résolution et ses mots-clés.
- La deuxième partie est le corrigé du problème proposé avec les différents rappels et méthodes utilisées.

Pour permettre un travail régulier et ordonné, ces exercices et problèmes ne font appel qu'aux seules connaissances des cours déjà développés, assurant ainsi une possibilité de véritable autocontrôle continu durant toute l'année.

Pour les élèves des classes de PTSI, dont il suit exactement le nouveau programme, ou des préparations intégrées des INSA, ENSAM et UT, comme pour les étudiants de première année universitaire universitaires MI, ce livre est un outil de travail pour acquérir des bases solides en mathématiques et il peut devenir un indispensable compagnon d'étude.

Sommaire

Avant-propos 3

Introduction méthodologique 7

Chapitre 1. Raisonnement et vocabulaire ensembliste

- Devoir 1.1 10
- Devoir 1.2 11
- Corrigé du devoir 1.1 12
- Corrigé du devoir 1.2 14

Chapitre 2. Calcul algébrique et trigonométrie

- Devoir 2.1 18
- Devoir 2.2 20
- Devoir 2.3 21
- Devoir 2.4 22
- Corrigé du devoir 2.1 23
- Corrigé du devoir 2.2 26
- Corrigé du devoir 2.3 28
- Corrigé du devoir 2.4 29

Chapitre 3. Nombres complexes

- Devoir 3.1 32
- Devoir 3.2 33
- Devoir 3.3 34
- Corrigé du devoir 3.1 35
- Corrigé du devoir 3.2 37
- Corrigé du devoir 3.3 40

Chapitre 4. Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

- Devoir 4.1 44
- Devoir 4.2 45
- Devoir 4.3 46
- Devoir 4.4 47
- Corrigé du devoir 4.1 49
- Corrigé du devoir 4.2 51
- Corrigé du devoir 4.3 53
- Corrigé du devoir 4.4 55

Chapitre 5. Suites réelles

- Devoir 5.1 60
- Devoir 5.2 61
- Devoir 5.3 62
- Devoir 5.4 63
- Corrigé du devoir 5.1 65
- Corrigé du devoir 5.2 67
- Corrigé du devoir 5.3 69
- Corrigé du devoir 5.4 73

Chapitre 6. Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité, dérivabilité

- Devoir 6.1 76
- Devoir 6.2 77
- Corrigé du devoir 6.1 78
- Corrigé du devoir 6.2 82

Chapitre 7. Calcul matriciel et systèmes linéaires

- Devoir 7.1 86
- Devoir 7.2 87
- Corrigé du devoir 7.1 88
- Corrigé du devoir 7.2 91

Chapitre 8. Analyse asymptotique

- Devoir 8.1 96
- Devoir 8.2 97
- Devoir 8.3 99
- Corrigé du devoir 8.1 101
- Corrigé du devoir 8.2 104
- Corrigé du devoir 8.3 107

Chapitre 9. Géométrie du plan et de l'espace

- Devoir 9.1 114
- Devoir 9.2 116
- Corrigé du devoir 9.1 118
- Corrigé du devoir 9.2 120

Chapitre 10. Polynômes

- Devoir 10.1 126
- Devoir 10.2 129
- Corrigé du devoir 10.1 131
- Corrigé du devoir 10.2 137

Chapitre 11. Espaces vectoriels et applications linéaires

- Devoir 11.1 144
- Devoir 11.2 145
- Corrigé du devoir 11.1 147
- Corrigé du devoir 11.2 150

Chapitre 12. Matrices et déterminants

- Devoir 12.1 156
- Devoir 12.2 158
- Devoir 12.3 160
- Corrigé du devoir 12.1 161
- Corrigé du devoir 12.2 164
- Corrigé du devoir 12.3 167

Chapitre 13. Intégration

- Devoir 13.1 172
- Devoir 13.2 173
- Corrigé du devoir 13.1 177
- Corrigé du devoir 13.2 180

Chapitre 14. Dénombrement

- Devoir 14.1 190
- Devoir 14.2 191
- Corrigé du devoir 14.1 196
- Corrigé du devoir 14.2 198

Chapitre 15. Probabilités

- Devoir 15.1 210
- Devoir 15.2 212
- Corrigé du devoir 15.1 214
- Corrigé du devoir 15.2 218

Chapitre 16. Séries numériques

- Devoir 16.1 224
- Devoir 16.2 226
- Corrigé du devoir 16.1 228
- Corrigé du devoir 16.2 232

Chapitre 17. Fonctions de deux variables

- Devoir 17.1 238
- Devoir 17.2 241
- Corrigé du devoir 17.1 244
- Corrigé du devoir 17.2 251

Introduction méthodologique

Objectif pédagogique

Ce manuel d'exercices et problèmes corrigés est conçu spécifiquement pour les étudiants de première année de la filière **PTSI** (Physique, Technologie et Sciences de l'Ingénieur), adapté au nouveau programme de mai 2021. Il vise à :

- **Consolider les bases mathématiques** par une pratique régulière et progressive.
- **Favoriser l'autonomie** grâce à des corrigés détaillés incluant rappels et méthodes.
- **Préparer aux épreuves de synthèse** via des problèmes multi-thématiques et chronométrés.

Structure et organisation

L'ouvrage est divisé en 16 chapitres couvrant l'intégralité du programme de première année, dans un ordre logique. Chaque chapitre suit une **structure bipartite** :

Partie 1 : Énoncés des problèmes

- Thèmes abordés
- Durée indicative de résolution
- Mots-clés
- Énoncé mathématique

Partie 2 : Corrigés détaillés

- Méthode explicitée
- Rappels théoriques
- Conseils pédagogiques

Démarche d'apprentissage proposée

Le manuel encourage une **approche active et progressive** :

1. **Travail en autonomie** : Les problèmes ne font appel qu'aux connaissances déjà vues en cours.
2. **Auto-évaluation** : Vérification immédiate grâce aux corrigés.
3. **Approche par compétences** : Chaque problème cible des compétences précises (raisonnement, calcul, modélisation, etc.).
4. **Variété des formats** : Exercices techniques, problèmes de synthèse, questions théoriques et applications concrètes.

Conseils d'utilisation méthodologique

Pour tirer le meilleur parti de cet ouvrage :

- **Respectez les temps indicatifs** pour vous entraîner dans des conditions proches des examens.
- **Lisez les corrigés même si vous avez réussi** pour comparer les méthodes.
- **Utilisez les mots-clés** pour identifier rapidement les notions mobilisées.
- **Travaillez par chapitres dans l'ordre du programme** pour une progression cohérente.
- **Notez les méthodes récurrentes** dans un cahier de synthèse personnel.

Ce document se présente comme un compagnon d'étude structuré et exigeant, alliant rigueur mathématique et accompagnement pédagogique, idéal pour qui souhaite maîtriser les fondements des mathématiques de l'enseignement supérieur.

CHAPITRE 1. RAISONNEMENT ET VOCABULAIRE ENSEMBLISTE

Devoir 1.1

Raisonnement mathématique

Thèmes abordés : Les thèmes principaux abordés par ce raisonnement mathématique mettent un accent sur :

- les propriétés des nombres rationnels,
- la parité des entiers naturels,
- les égalités algébriques,
- la démonstration par récurrence,
- l'étude d'une suite récurrente d'ordre 2.

Ce problème vise à entraîner la rigueur démonstrative chez les étudiants.

Temps de résolution : 1 heure 30.

Énoncé du problème :

1. Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.
3. Soient $a, b \geq 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.
5. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}.$$

   Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0.$$

Mots clés

Raisonnement mathématique ; Preuve ; Logique ; Récurrence ; Algèbre élémentaire ; Suite numérique.

Devoir 1.2

Notions ensemblistes

Thèmes abordés : Le thème principal est également le raisonnement mathématique, mais avec des exercices un peu plus variés et abstraits que le premier problème, incluant :

- Un problème de logique et pesées (problème classique des 9 billes avec une intruse).
- Des preuves par contraposition en théorie des ensembles.
- Un exercice de limite (convergence d'une suite) avec quantification ε–N.
- Des questions sur les itérées d'une fonction et les propriétés des bijections.

Temps de résolution : 2 heures.

Énoncé du problème :

1. On dispose de neuf billes visuellement identiques, elles ont toutes la même masse sauf une. Comment, à l'aide d'une balance à deux plateaux, démasquer l'intruse en trois pesées ?
2. Montrer par contraposition les assertions suivantes, E étant un ensemble :
   (a) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$,
   (b) $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.
3. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que
$$n \geq N \Rightarrow 2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \epsilon.$$
4. Soit X un ensemble. Pour $f \in \mathcal{F}(X, X)$, on définit $f^0 = id$ et par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f^n \circ f$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f \circ f^n$.
   (b) Montrer que si f est bijective alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$.

Mots clés

Preuve mathématique ; Théorie des ensembles ; Convergence ; Fonctions et applications ; Récursivité.

Devoir 1.1

Raisonnement mathématique

1. On prend $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$. On rappelle que $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des réels s'écrivant $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Alors $a = \frac{p}{q}$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$ et un certain $q \in \mathbb{N}^*$. De même $b = \frac{p'}{q'}$ avec $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{N}^*$. On a $a+b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq'+qp'}{qq'}$. Or le numérateur $pq'+qp'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$; le dénominateur qq' est lui un élément de $\mathbb{N}^*$. Donc $a+b$ s'écrit bien de la forme $a+b = \frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}$, $q'' \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $a+b \in \mathbb{Q}$.

   Méthode

   On utilise une approche directe de la structure des rationnels pour prouver la stabilité de l'addition.

2. Par l'absurde, on suppose que n n'est pas pair. On veut montrer que n^2 n'est pas pair. Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2l+1$ avec $l = 2k^2+2k \in \mathbb{N}$, et donc n^2 est impair. On a montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

   Méthode

   La méthode utilisée est une preuve par contraposée (ou implication logique équivalente), présentée via un raisonnement par l'absurde dans la rédaction donnée.

3. On raisonne par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$. Comme $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a(1+a) = b(1+b)$ donc $a+a^2 = b+b^2$ d'où $a^2-b^2 = b-a$. Cela conduit à $(a-b)(a+b) = -(a-b)$. Comme $a \neq b$ alors $a-b \neq 0$ et donc en divisant par $a-b$ on obtient $a+b = -1$. La somme de deux nombres positifs ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction. Conclusion : si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

   Méthode

   C'est une preuve par l'absurde : on suppose la négation de la conclusion pour aboutir à une impossibilité.

4. Pour $n \geq 0$, on note $P(n)$ l'assertion suivante : $2^n > n$.
   On va démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

Initialisation. Pour $n = 0$ on a $2^0 = 1 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. On fixe $n \geq 0$. On suppose que $P(n)$ est vraie. On montre que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n + 2^n \\ &> n + 2^n \quad \text{car par } P(n) \text{ on sait que } 2^n > n, \\ &> n + 1 \quad \text{car } 2^n \geq 1. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire $2^n > n$ pour tout $n \geq 0$.

Méthode

On utilise une récurrence standard sur les entiers naturels, avec une initialisation à $n = 0$ et une étape d'hérédité.

5. Initialisation : Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1 > 0$, et pour $n = 2$, on a

$$u_2 = \frac{u_1 + u_0}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

donc la propriéte est vraie pour $n = 1$ et pour $n = 2$.

Hérédité : Supposons que la formule soit vraie pour n et $n+1$, où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé. On a donc $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$, d'où $\frac{u_{n+1}+u_n}{2} > 0$, donc la propriété est vraie pour $n + 2$.
Ce qui montre, par récurrence à deux pas, que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Méthode

La méthode utilisée est une récurrence forte (ou récurrence à deux pas), car la relation de récurrence fait intervenir u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n.

Devoir 1.2

Notions ensemblistes

1. On note $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ nos billes.
   On commence par comparer 2 lots constitués de $1, 2, 3$ et de $4, 5, 6$. Si ceux-ci ont même masse alors l'intruse est parmi $7, 8, 9$ et l'on peut utiliser la bille 1 comme bille témoin. On compare alors les billes 1 et 7 puis les billes 1 et 8 pour démasquer l'intruse. Si en revanche les deux premiers lots n'ont pas même masse, l'intruse se trouve parmi l'un deux. La bille 9 servira alors de bille témoin. Pour fixer les idées (et sans perte de généralités), on suppose que le premier lot est plus lourd que le second. On compare les billes 1 et 4 avec les billes 2 et 5.

   Si celles-ci ont même masse commune, l'intruse se trouve dans les deux autres billes 3 et 6. Une comparaison de 3 avec 9 permet alors de savoir qui est l'intrus de 3 ou de 6. Si celles-ci n'ont pas même masse commune, pour fixer les idées (et sans perte de généralités), on suppose que 1 et 4 soient plus lourdes que 2 et 5. Si l'intruse est plus lourde que ses congénères alors cela ne peut ni être 4 ni être 2 à cause respectivement des première et deuxième pesées. Si l'intruse est plus légere que ses congénères alors cela ne peut ni être 2 ni être 4 à cause respectivement des première et deuxième pesées. Dans tous les cas l'intrus est soit 1, soit 5. Une comparaison de la bille 1 avec la bille 9 permet alors de démasquer cette intruse.

   Méthode

   Cette méthode repose sur une division du problème et une utilisation stratégique des résultats intermédiaires pour réduire les possibilités à chaque étape, en garantissant que l'intruse est identifiée en exactement 3 pesées.

2. On va démontrer l'assertion 1. de deux manières différentes.

   (a) Tout d'abord de façon "directe". On suppose que A et B sont telles que $A \cap B = A \cup B$. On montre que $A = B$.

   Pour cela étant donné $x \in A$ montrons qu'il est aussi dans B. Comme $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cap B$ (car $A \cup B = A \cap B$). Ainsi $x \in B$.

   On prend $x \in B$ et le même raisonnement implique $x \in A$. Donc tout élément de A est dans B et tout élément de B est dans A. Cela veut dire $A = B$.

   (b) Ensuite par contraposition. On suppose que $A \neq B$ et on monte que
   $A \cap B \neq A \cup B$.

Si $A \neq B$ cela veut dire qu'il existe un élément $x \in A \setminus B$ ou alors un élément $x \in B \setminus A$. Quitte à échanger A et B, on suppose qu'il existe $x \in A \setminus B$. Alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$. Donc $A \cap B \neq A \cup B$.

Méthode

La méthode utilisée est une double démonstration : d'abord une preuve directe par double inclusion, puis une preuve par contraposition.

3. On remarque d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2n+1}{n+2} \leq 2$ car $2n+1 \leq 2(n+2)$. Étant donné $\epsilon > 0$, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \; \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \epsilon$$

On cherche maintenant une condition sur n pour que l'inégalité $2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+2}$ soit vraie.

$$\begin{aligned} 2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+2} &\Leftrightarrow (2-\epsilon)(n+2) < 2n+1 \\ &\Leftrightarrow 3 < \epsilon(n+2) \\ &n > \frac{3}{\epsilon} - 2 \end{aligned}$$

Ici ϵ est donné, on prend un $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{3}{\epsilon} - 2$. Alors pour tout $n \geq N$ on a $n \geq N > \frac{3}{\epsilon} - 2$ et par conséquent : $2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+2}$. Conclusion : étant donné $\epsilon > 0$, on a trouvé un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+2}$ et $\frac{2n+1}{n+2} < 2 + \epsilon$.

Méthode

La méthode utilisée est une preuve par analyse de limite utilisant la définition –N de la convergence.

4. (a) On montre la proposition demandée par récurrence : soit A_n l'assertion
$f^{n+1} = f \circ f^n$. Cette assertion est vraie pour $n = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose A_n vraie. Alors

$$f^{n+2} = f^{n+1} \circ f = (f \circ f^n) \circ f = f \circ (f^n \circ f) = f \circ f^{n+1}.$$

On a utilisé la definition de f^{n+2}, puis la proposition A_n, puis l'associativité de la composition, puis la définition de f^{n+1}. Donc A_{n+1} est vraie. Par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^n \circ f = f \circ f^n.$$

(b) On procède de même par récurrence : soit A_n l'assertion $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$. Cette assertion est vraie pour $n = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on suppose A_n vraie. Alors

$$(f^{-1})^{n+1} = (f^{-1})^n \circ f^{-1} = (f^n)^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ f^n)^{-1} = (f^n \circ f)^{-1} = (f^{n+1})^{-1}.$$

Donc A_{n+1} est vraie. Par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (f^{-1})^n = (f^n)^{-1}.$$

Méthode

On utilise une démonstration par récurrence sur n pour établir l'égalité de composition.

CHAPITRE 2. CALCUL ALGÉBRIQUE ET TRIGONOMÉTRIE

Devoir 2.1

Coefficients binomiaux et factoriels

Thèmes abordés : Le problème contient une série d'exercices de mathématiques portant principalement sur :

- Sommes et produits (manipulation d'indices, formules de factorisation) ;
- Coefficients binomiaux et factoriels ;
- Comparaison de racines (puissances fractionnaires) ;
- Inégalités classiques (Cauchy–Schwarz, inégalité triangulaire pour les normes euclidiennes) ;
- Encadrement avec des racines carrées et séries.

Temps de résolution : 2 heure 30.

Énoncé du problème :

1. Soit n un entier naturel. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} k = \frac{3}{2}n(n+1)$. En déduire que, pour tout réel positif ou nul x :
$$\prod_{k=n}^{2n} x^k = (\sqrt{x^3})^{n(n+1)}.$$

2. Soient n et m deux entiers tels que $1 \leq n \leq m$. Montrer que :
$$\prod_{k=n}^{m} k = \binom{m}{n-1}(m-n+1)!.$$

3. Comparer les nombres réels
$$\alpha = \sqrt{2}, \quad \beta = \sqrt[3]{3} \quad \text{et} \quad \gamma = \sqrt[5]{5}.$$

4. Soient a_1, b_1, a_2, b_2, $\ldots$, a_n, b_n des nombres réels. Montrer les inégalités suivantes :
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \tag{2.1}$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.2}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'on a

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

En déduire un encadrement du nombre réel

$$a = 9\left(\frac{1}{\sqrt{100}} + \frac{1}{\sqrt{101}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right).$$

Mots clés

Sommes et produits ; coefficients binomiaux et factoriels ; comparaison de nombres réels ; inégalités classiques ; encadrement.

Devoir 2.2

Développement algébrique

Thèmes abordés : Le problème aborde différents thèmes :

- Manipulation de la formule du binôme de Newton ;
- Inégalités avec développement limité ;
- Développement combinatoire et inégalités avec factorielles.

Temps de résolution : 2 heures.

Énoncé du problème :

1. En utilisant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ; \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} ; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

2. Soit $\alpha > 0$, montrer que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1,2\}, \quad (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2.$$

En déduire l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1,2\}, \quad \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n > \frac{1}{8}\left(13 - \frac{1}{n}\right).$$

3. Montrer que, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{p!}\left(\frac{n}{p}\right)^p = \sum_{i=0}^{p} \frac{(n-p)^i}{i!(p-i)!p^i}.$$

En déduire l'inégalité

$$\frac{1}{p!}\left(\frac{n}{p}\right)^p > \frac{1}{p!} + \frac{n-p}{p!} + \frac{(n-p)^2}{2p^2(p-2)!}$$

pour tout $n > p \geq 3$.

Mots clés

Binôme de Newton / Coefficients binomiaux ; techniques de calcul; inégalités ; développement algébrique.

Devoir 2.3

Pivot de Gauss

Thème abordé : L'utilisation de l'algorithme du pivot de Gauss.

Temps de résolution : 1 h 30.

Énoncé du problème :

Résoudre par l'algorithme du pivot de Gauss les systèmes suivants :

1.
$$(S_1)\begin{cases} 2x & +y & -z & +t & = 1 \\ -4x & -2y & +3z & -4t & = -1 \\ 2x & +y & +2z & & = 4 \\ -2x & -y & +2z & -2t & = 0 \end{cases}$$

2.
$$(S_2)\begin{cases} x & +2y & -z & = 2 \\ x & +y & -3z & = -1 \\ 2x & +y & +z & = 4 \\ x & -y & +z & = 1 \end{cases}$$

3.
$$(S_3)\begin{cases} x & +2y & = 3 \\ 2x & -3y & = -1 \\ x & -y & = 1 \end{cases}$$

Mots clés

Algorithme ; pivot ; Gauss ; système linéaire.

Devoir 2.4

Fonctions trigonométriques

Thèmes abordés : Le problème aborde principalement le thème de la trigonométrie analytique. C'est un problème typique de renforcement technique sur les fonctions circulaires.

Temps de résolution : 1 h 30.

Énoncé du problème :

1. Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant :
$$\begin{cases} 2\cos(x) - \sin(x) &= \sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ \cos(x) + 2\sin(x) &= \frac{\sqrt{3}}{2} - 1. \end{cases}$$

2. Pour quelles valeurs de m l'équation $\sqrt{3}\cos x - \sin x = m$ admet-elle des solutions? Les déterminer lorsque $m = \sqrt{2}$.

3. Soient x et y dans $]0, \pi/2[$ vérifiant $\tan x = \frac{1}{7}$ et $\tan y = 2$.
   (a) En utilisant $\tan(x + 2y)$, calculer $x + 2y$
   (b) Calculer $\cos(2y)$.
   (c) Soit $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\cos(a) = \frac{3}{5}$. Exprimer x et y en fonction de a.

Mots clés

Équations et systèmes trigonométriques ; relations trigonométriques et angles ; expression d'angles en fonction d'un paramètre.

Devoir 2.1

Coefficients binomiaux et factoriels

1. On sait que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. On a alors :

$$\sum_{k=n}^{2n} k = \left(\sum_{k=1}^{2n} k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\right) = \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{3}{2}n(n+1).$$

On en déduit :

$$\prod_{k=n}^{2n} x^k = x^{\sum_{k=n}^{2n} k} = x^{\frac{3}{2}n(n+1)} = (\sqrt{x^3})^{n(n+1)}.$$

2. La formule est vraie pour $n = 1$, puisque dans ce cas : $\prod_{k=1}^{m} k = m!$ et $\binom{m}{0} = 1$.

Pour $n > 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=n}^{m} k &= (\prod_{k=1}^{m} k)/(\prod_{k=1}^{n-1} k) \\
&= \frac{m!}{(n-1)!} \\
&= \frac{m!}{(n-1)!(m-n+1)!}(m-n+1)! \\
&= \binom{m}{n-1}(m-n+1)!
\end{aligned}$$

3. On a

$$\alpha^6 - \beta^6 = (\alpha - \beta)(\alpha^5 + \alpha^4\beta + \alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3 + \alpha\beta^4 + \beta^5)$$

L'inégalité $\alpha^5 + \alpha^4\beta + \alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3 + \alpha\beta^4 + \beta^5 > 0$, montre que $\alpha - \beta$ est de même signe que $\alpha^6 - \beta^6$:

$$\alpha^6 - \beta^6 = 8 - 9 = -1,$$

on a $\alpha - \beta > 0$. D'où $\alpha < \beta$. De la même manière, on montre que $\alpha - \gamma$ est de même signe que $\alpha^{10} - \gamma^{10}$. Puisqu'on a

$$\alpha^{10} - \gamma^{10} = 32 - 25 = 7$$

on en déduit que $\alpha > \gamma$. En résumé, on a : $\gamma < \alpha < \beta$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(a_i x + b_i)^2 \geq 0,\ \forall i = 1, \ldots, n\,;$$

c'est-à-dire,

$$a_i^2 x^2 \ + \ 2a_i b_i x + b_i^2 \geq 0,\ \forall i = 1, \ldots, n.$$

D'où

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 + 2 \ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq 0.$$

Par la suite

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0.$$

Ceci implique l'inégalité (2.1).

D'autre part, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \ + \ b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2,$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \ + \ b_i)^2 \ \leq \ \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \ + \ \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

D'où l'inégalité (2.2).

Méthode

La méthode repose sur l'utilisation d'un trinôme toujours positif pour Cauchy–Schwarz et l'exploitation directe de Cauchy–Schwarz pour prouver l'inégalité triangulaire.

5. On a bien

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

et

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

D'où

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$