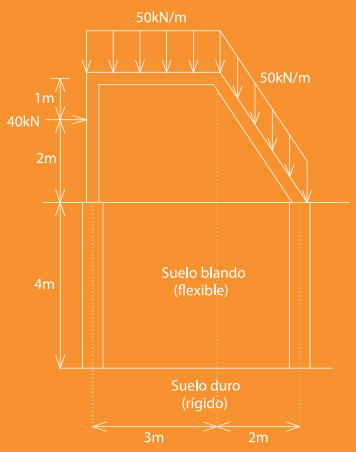
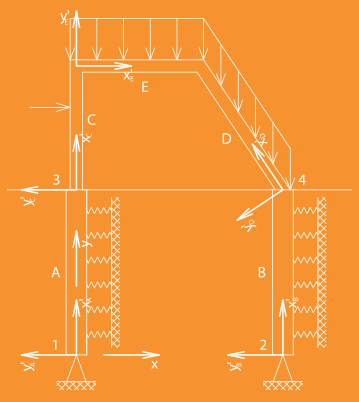
ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Métodos clásicos y matriciales

Juan Camilo Molina Villegas



(a) Estructura a resolver.



(b) Discritización.

ECOE EDICIONES

SISTEMA DE INFORMACIÓN EN LÍNEA
SIL
COMPLEMENTO VIRTUAL

ANÁLISIS ESTRUCTURAL

MÉTODOS CLÁSICOS Y MATRICIALES

JUAN CAMILO MOLINA VILLEGAS

Catalogación en la publicación - Biblioteca Nacional de Colombia

Molina Villegas, Juan Camilo
Análisis estructural : métodos clásicos y matriciales / Juan Camilo Molina Villegas. -- 1a ed. -- Bogotá : Ecoe Ediciones; 2021.
448 p. -- (Ingeniería. Ingeniería civil)

Incluye complemento virtual SIL (Sistema de Información en Línea). -- Incluye datos del autor en la pasta. -- Contiene referencias bibliográficas.

ISBN 978-958-503-118-0

1. Análisis estructural (Ingeniería) 2. Teoría de las estructuras I. Título II. Serie

CDD: 624.171 ed. 23 CO-BoBN– a1082250



Área: *Ingeniería y afines*
Subárea: *Ingeniería civil*

ECOE
EDICIONES

© Juan Camilo Molina Villegas

► Ecoe Ediciones S.A.S.
info@ecoeediciones.com
www.ecoeediciones.com
Carrera 19 # 63C 32, Tel.: 919 80 02
Bogotá, Colombia

Primera edición: Bogotá, octubre del 2021

ISBN: 978-958-503-118-0
e-ISBN: 978-958-503-119-7

Directora editorial: Claudia Garay Castro
Corrección de estilo: Harold Vacca González
Carátula: Wilson Marulanda Muñoz
Impresión: Carvajal Soluciones de Comunicación S.A.S
Carrera 69 #15 -24

Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.

Impreso y hecho en Colombia - Todos los derechos reservados

Índice

I Métodos clásicos **1**

1. Introducción **3**
1.1. ¿Qué es una estructura? . . . 3
1.2. ¿Qué es el análisis estructural? . . . 4
1.3. Convención positiva para las fuerzas internas . . . 4
1.4. Tipos de elementos . . . 5
1.5. Ecuaciones diferenciales gobernantes . . . 8
1.6. Condiciones de frontera, continuidad y equilibrio . . . 14
1.7. Sistemas coordenados . . . 16
1.8. Transformación de las fuerzas externas a coordenadas locales . . . 17
1.9. Cálculo de fuerzas internas . . . 21
1.10. Funciones de Green . . . 23
1.11. Ejemplos . . . 29
1.12. Problemas . . . 75

2. Método del trabajo virtual **87**
2.1. Descripción del método . . . 87
2.2. Formulación del método . . . 88
2.3. Demostraciones . . . 89
2.4. Implementación del método . . . 94
2.5. Ejemplos . . . 98
2.6. Problemas . . . 160

3. Método de pendiente deflexión para vigas **171**
3.1. Formulación del método . . . 171
3.2. Descripción del método . . . 180
3.3. Ejemplos . . . 187
3.4. Problemas . . . 231

II Método de rigidez **239**

4. Método de rigidez para cerchas planas **241**
4.1. Formulación del método . . . 241
4.2. Descripción del método . . . 247
4.3. Ejemplos . . . 250
4.4. Problemas . . . 274

5. Método de rigidez para vigas **279**
5.1. Formulación del método . . . 279
5.2. Descripción del método . . . 282
5.3. Ejemplos . . . 283
5.4. Problemas . . . 313

6. Método de rigidez para vigas sobre fundación flexible **315**
6.1. Deducción del método . . . 315
6.2. Descripción del método . . . 322
6.3. Ejemplos . . . 324
6.4. Problemas . . . 343

7. Método de rigidez para pórticos planos y estructuras mixtas **345**
7.1. Ecuaciones diferenciales gobernantes y condiciones de frontera . . . 345
7.2. Formulación del método . . . 348
7.3. Ejemplos . . . 355
7.4. Problemas . . . 427

III Apéndices **437**

Apéndice A. Convenciones y definición de variables **439**

Apéndice B. Solución de barras doblemente empotradas de sección transversal constante **447**

Apéndice C. Solución de vigas doblemente empotradas de sección transversal constante **451**

Apéndice D. Solución de vigas sobre fundación flexible doblemente empotradas de sección transversal constante **457**

Apéndice E. Resumen del método de rigidez **461**

Apéndice F. Formulación alternativa del método rigidez a partir de la forma débil de las ecuaciones diferenciales gobernantes **477**

Apéndice G. Respuestas a los problemas **483**

Referencias **535**

Dedicatoria

A mi hija Ana Sofía, mi esposa Catalina y a mis padres Olga y Francisco, quienes me han servido de apoyo, ejemplo y motivación para la elaboración de esta obra.

Prefacio

Este libro nació como unas notas de clase de los cursos de Análisis Estructural I y Mecánica Estructural que el autor ha dictado en los últimos años en la Universidad de Medellín y en la Universidad Nacional de Colombia - sede Medellín, respectivamente. Inicialmente, se trataba solo de un compendio de ejemplos de variado nivel que pretendía emular la muy celebre serie Schaum de McGraw-Hill; es decir, recurrir a la metodología didáctica del aprendizaje basado en problemas para afianzar aptitudes. Con el tiempo, se ha adicionado la teoría necesaria para la solución de dichos problemas, lo cual lo ha convertido en un libro teórico-práctico completo y autocontenido.

Durante la enseñanza de dichos cursos, el autor ha notado que los textos guía empleados tradicionalmente para el Análisis Estructural no se aprovechan ampliamente del legado de las materias de ciencias básicas y computación que los estudiantes han cursado al inicio de sus carreras. Con base en esto, el presente libro pretende dar continuidad y tender puentes sólidos con estas áreas. Como ejemplo de lo anterior, a continuación se mencionan algunos casos particulares del usos de conceptos de las ciencias básicas en este texto:

1. Álgebra lineal: escritura de sistemas de ecuaciones lineales en forma matricial y la solución de los mismos.
2. Máximos y mínimos: cálculo del valor máximo de fuerzas internas y su ubicación dentro de una estructura o elemento particular.
3. Optimización: obtención del valor óptimo de variables como dimensiones de elementos o ubicación de cargas, para minimizar uno o varios componentes de la respuesta estructural.
4. Ecuaciones diferenciales: deducción de todos los métodos presentados en este texto a partir de las ecuaciones diferenciales gobernantes de los elementos estudiados (barras, vigas, vigas sobre fundación flexible, pórticos planos y pilas sin fricción en el fuste). Además, en el capítulo 1 se realiza el Análisis Estructural directamente a partir de la solución de las ecuaciones diferenciales gobernantes para cada uno de elementos componentes de las estructuras; para lo cual, adicionalmente se emplean las condiciones de frontera, equilibrio, continuidad y compatibilidad en los nodos.
5. Funciones de Green: en el capítulo 1 se emplean las funciones de Green para analizar directamente estructuras, en el capítulo 2 para motivar la deducción del método del trabajo virtual, y en los demás capítulos para el cálculo de los campos de desplazamiento.
6. Integración: obtención de fuerzas internas para elementos sometidos a cargas externas arbitrarias a partir de la integración de esta últimas, cálculo de los campos de desplazamiento a partir de la integración de los campos de fuerzas internas y cálculo de los campos empotrados a partir de las cargas externas.
7. Matemática simbólica: cálculo de líneas de influencia en estructuras.

Aunque el objetivo general de este texto sea, para cada una de las tipologías de estructuras analizadas (barras, cerchas planas, resortes, vigas, vigas sobre función flexible, pórticos planos, pilas sin fricción en el fuste y estructuras mixtas), que el estudiante esté en capacidad de obtener sus desplazamientos nodales, reacciones, campos de fuerzas internas y de desplazamiento, es decir, resolverla; a continuación se presentan los objetivos particulares para cada uno de los capítulos y apéndices:

Capítulo 1: Introducción. Formular y resolver los problemas de valor en la frontera que gobiernan el comportamiento de estructuras formadas por elementos tipo barra, resorte, cercha plana, viga, viga sobre fundación flexible y pórticos planos, estáticamente determinadas o indeterminadas. Deducción y estudio de las funciones de Green para vigas, pórticos planos y vigas sobre fundación flexible. Resolver problemas estructurales empleando funciones de Green.

Capítulo 2: Método del trabajo virtual. Resolver por medio del método del trabajo virtual estructuras estáticamente determinadas o indeterminadas formadas por elementos tipo barra, resorte, cercha plana, viga y pórtico plano, las

cuales estén sometidas a cargas externas de cualquier distribución.

Capítulo 3: Método de pendiente deflexión para vigas. Resolver por medio del método de pendiente deflexión vigas estáticamente determinadas o indeterminadas sometidas a cargas externas con cualquier distribución.

Capítulo 4: Método de rigidez para cerchas planas. Resolver por medio del método de rigidez (con funciones de Green) cerchas planas cuyos apoyos tengan cualquier orientación.

Capítulo 5: Método de rigidez para vigas. Resolver por medio del método de rigidez (con funciones de Green) vigas estáticamente determinadas o indeterminadas, sometidas a cargas externas de cualquier distribución.

Capítulo 6: Método de rigidez para vigas sobre fundación flexible. Resolver por medio del método de rigidez (con funciones de Green) vigas sobre fundación flexible, sometidas a cargas externas de cualquier distribución.

Capítulo 7: Método de rigidez para pórticos planos y estructuras mixtas. Resolver por medio del método de rigidez (con funciones de Green) estructuras planas estáticamente determinadas o indeterminadas, compuestas por elementos tipo barra, resorte, viga, viga sobre fundación flexible, pórtico plano o pila sin fricción en el fuste, sometidas a cargas externas de cualquier distribución.

Apéndice A: Convenciones y definición de variables. Presentar en un solo sitio la nomenclatura empleada en todo el texto. Antes del inicio del estudio de algunos de los capítulos del texto, se sugiere al lector familiarizarse con la notación empleada en este, la cual se encuentra resumida en este apéndice.

Apéndice B: Solución barras doblemente empotradas de sección transversal constante. Calcular reacciones, fuerzas internas y campo de desplazamiento de elementos tipo barra doblemente empotrados sometidos a cualquier carga externa.

Apéndice C: Solución de vigas doblemente empotradas de sección transversal constante. Calcular reacciones, fuerzas internas y campo de desplazamiento de elementos tipo viga doblemente empotrados sometidos a cualquier carga externa.

Apéndice D: Solución de vigas sobre fundación flexible doblemente empotradas de sección transversal constante. Calcular reacciones, fuerzas internas y campo de desplazamiento de elementos tipo viga sobre fundación flexible doblemente empotrados sometidos a cualquier carga externa.

Apéndice E: Resumen método de rigidez. Resumen de la formulación por el método de rigidez (con funciones de Green) para todos los tipos de elementos estudiados en el texto.

Apéndice F: Formulación alternativa del método rigidez a partir de la forma débil de las ecuaciones diferenciales gobernantes. Formulación equivalente a la presentada en el método de rigidez (con funciones de Green), establecida a partir de la forma débil de las ecuaciones diferenciales gobernantes de cada uno de los tipos estructurales estudiados en esta obra.

Apéndice G: Respuestas a los problemas. Presentar las respuesta de los problemas propuestos al final de cada capítulo.

Además de lo presentado en los capítulos y apéndices anteriormente reseñados, cada capítulo contiene gran cantidad de ejemplos así como un conjunto de problemas con sus respuestas, los cuales pueden ser empleados por los estudiantes para autoevaluar si han cumplido con los objetivos de cada uno de estos. Con el fin de optimizar aquellos ejemplos o problemas que el estudiante resolverá para estudiar, se han empleado los siguientes iconos , , y para su caracterización, cuyo significado presentado es presentado a continuación:

💻: Indica que la solución del ejemplo o problema también se encuentra disponible en línea como un programa de Python. Es importante resaltar que en este texto se emplea la programación para facilitar la solución de los problemas propuestos; pero no se hace hincapié en temas de programación, computación u optimización en la implementación numérica de los métodos presentados. Para los interesados en esto último se les remite a textos como (Weaver & Gere, 2012).
✎: Indica que el ejemplo o problema ha sido resuelto con gran detalle y pude emplearse para afianzar conceptos básicos necesarios en la solución de problemas afines.
🚀: Indica que la dificultad del problema es mayor a la promedio.
📄: Aplica solo para los problemas e indica que se puede descargar de internet un archivo con su solución detallada.

Para el autor, el tema presentado en la segunda parte de este libro ha sido tan interesante, novedoso y general que incluso lo ha bautizado como el método de rigidez con funciones de Green, y lo ha motivado en la escritura de artículos tanto para el análisis estructural de problemas estáticos (Molina-Villegas, Diaz Giraldo, & Acosta Ochoa, 2020), como dinámicos.

Parte I

Métodos clásicos

Capítulo 1

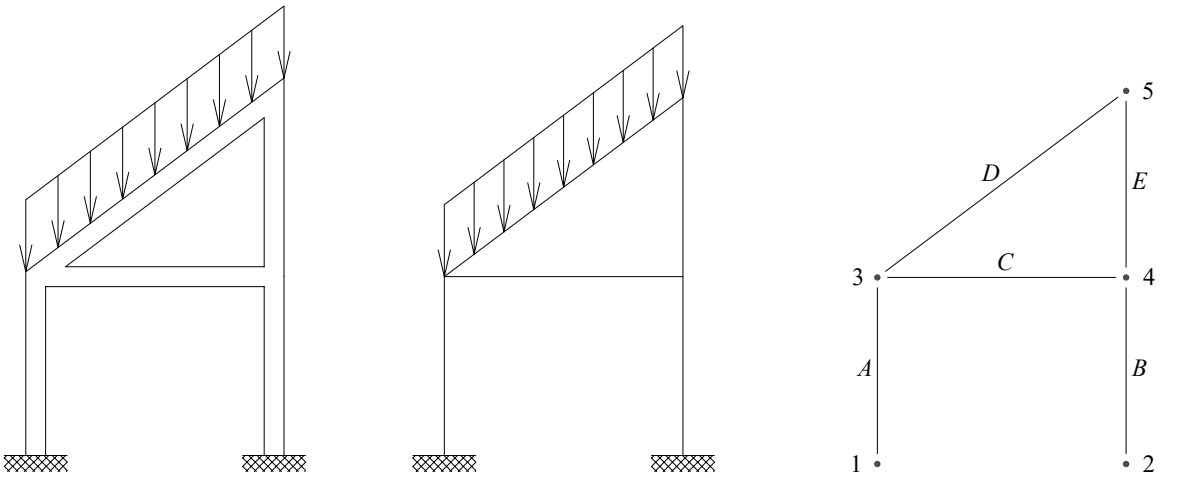
Introducción

1.1. ¿Qué es una estructura?

En este texto se define como estructura cualquier tipo de construcción formada por uno o varios elementos lineales o unidimensionales que se encuentran unidos entre sí por nodos (ver figura 1.1.1(a)), la cual se encuentra sometida a fuerzas externas a ella generadas por causas naturales o antrópicas, que ocasionan su cambio forma (mediante desplazamientos y deformaciones) y la creación de fuerzas en su interior.

La división de las estructuras en elementos y nodos es algo importante a tener en cuenta en su análisis; debido a que es usual realizar la formulación de los métodos de Análisis Estructural para cada elemento, y recurrir a condiciones de continuidad y compatibilidad de desplazamientos, así como equilibrio en los nodos, para ensamblar toda la estructura. Se debe tener en cuenta que los elementos no incluyen a los nodos, estos primeros se pueden definir como un dominio abierto (que no incluye sus extremos), los cuales se unen en cada uno de sus extremos a un punto o nodo (ver figuras 1.1.1(b) y 1.1.1(c)).

Figura 1.1.1: *Estructura real, modelo estructural y sus componentes básicos.*



(a) *Estructura real.* (b) *Modelo estructural.* (c) *Elementos y nodos del modelo estructural.*

1.2. ¿Qué es el análisis estructural?

El análisis estructural es la rama de la ingeniería civil que se ocupa del cálculo de la respuesta (reacciones, campos de fuerzas internas (o esfuerzos) y desplazamientos (o deformaciones)) de las estructuras, ya sean estas estáticamente determinadas o indeterminadas.

Entre las causas de las fuerzas internas y desplazamientos en las estructuras, sobresalen las siguientes cargas:

1. Peso propio de la estructura (carga muerta).
2. Peso de cargas móviles, bienes, enceres y personas que se encuentran dentro de la estructura (carga viga).
3. Carga debida al viento.
4. Carga debida al movimiento del terreno (eventos sísmicos).
5. Empujes de tierra.
6. Carga debidas al granizo o nieve.
7. Cargas generadas por fluidos, ya sean debidas a empozamiento o flujo.
8. Cambios de temperatura.

Pese a que no es muy usual dentro del análisis estructural calcular los campos de desplazamiento en los elementos (ver por ejemplo McCormac, 2007; o Kassimali, 2009, 2012), en este texto es recurrente su cálculo, debido a que a partir de estos es posible el cálculo de las fuerzas internas y reacciones de las estructuras. Además, por medio del control de los desplazamientos se puede prevenir el daño en elementos no estructurales así como brindar un confort a sus habitantes.

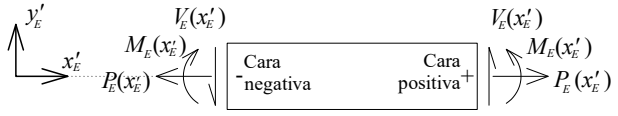
1.3. Convención positiva para las fuerzas internas

Por la acción de las fuerzas externas, cada uno de los puntos que conforman una estructura están sometidos a un estado de esfuerzos (normal y tangencial o cortante). Por simplicidad, en el Análisis Estructural se trabaja con las integrales de estos esfuerzos sobre cada una de las secciones transversales de los elementos, denominadas fuerzas internas. Esto quiere decir, que las estructuras no son modeladas por la ubicación de cada uno de sus puntos sino con el eje centroidal de cada elemento (en este texto todos los elementos son rectos y por ende se modelan con segmentos rectilineos).

En este texto se analizan solo estructuras planas, cuyos elementos están sometidos a las siguientes fuerzas internas: fuerza axial ($P_E(x'_E)$), que actúa en dirección del eje local x'_E, fuerza cortante uniaxial ($V_E(x'_E)$), la cual actúa en dirección del eje local y'_E y momento flector uniaxial ($M_E(x'_E)$), el cual actúa en dirección del eje local z'_E.

Debido a que las fuerzas internas son una propiedad de cada punto dentro de un elemento, es necesario emplear una convención universal para su definición. En la figura 1.3.1 se presenta dicha convención, la cual se basa en el hecho que las fuerzas internas positivas van en la dirección positiva de los ejes locales si actúan en una cara positiva (aquella con vector normal exterior en dirección del eje x'_E) y actúan en dirección contraria a la de los ejes locales si están aplicadas en una cara negativa (aquella con vector normal exterior en dirección contraria al eje x'_E).

Figura 1.3.1: *Convención positiva para las fuerzas internas.*



La anterior convención es inspirada en aquella para esfuerzos positivos empleada en mecánica del medio continuo y pese a que no es universal entre todos los autores, en este texto se emplea debido a su potencial para ser extrapolada para casos con otras fuerzas internas, como flexión o cortante biaxial y torsión.

1.4. Tipos de elementos

A continuación se presenta una definición de los tipos de elementos empleados en este texto, basada en las fuerzas internas en estos. Es de destacar, que una sola estructura, puede estar compuesta por un solo o diferentes tipos de elementos. En el primer caso, la forma de nombrarla es con el nombre de los elementos que contiene, por ejemplo, si una estructura está compuesta solo de elementos tipo viga, esta se llama viga (igual para las cerchas, vigas sobre fundación flexible y pórticos planos) y en caso de tener diferentes tipos de elementos se denomina como estructura mixta.

1.4.1. Elemento tipo resorte

Un elemento tipo resorte se caracteriza porque su única fuerza interna es la axial (constante en toda su longitud) y no tiene fuerzas externas, puntuales o distribuidas en toda su extensión (solo esta sometido a fuerzas puntuales en sus nodos, pero estos no hacen parte del elemento). Para el caso en que el resorte sea elástico lineal, es decir, que exista una relación lineal entre la fuerza axial que actúa en este y sus desplazamientos en los extremos, su ley constitutiva (ley de Hooke unidimensional), es:

$$P_E = k_E \Delta_E \tag{1.4.1}$$

Donde:
P_E: Fuerza axial en el resorte.
k_E: Constante de rigidez del resorte.
Δ_E: Cambio de longitud del resorte respecto a su configuración indeformada (sin carga), calculada como la resta de la longitud final (o deformada) del resorte y la longitud inicial.

Es de destacar que k_E siempre es positiva, y por ende la fuerza axial en el resorte es positiva solo si este se alarga; es decir, su longitud final es mayor a la inicial.

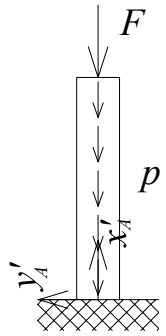
1.4.2. Elemento tipo barra

Este elemento se caracteriza porque su única fuerza interna es la axial (igual que en los resortes), pero esta puede ser variable, es decir, ser una función de x'_E (como ejemplo ver la estructura de la figura 1.4.1(a)).

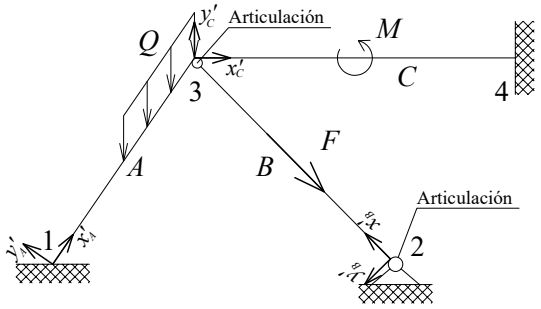
Un caso particular muy frecuente del elemento tipo barra es el elemento tipo cercha, el cual se caracteriza porque la fuerza axial es constante en toda su longitud, condición que se cumple si no existen fuerzas externas actuando en su longitud y sus extremos son articulados (o con momento flector cero).

En caso de que el elemento tipo barra haga parte de una estructura mixta, para considerarse tipo cercha este debe estar articulado en ambos extremos y no tener fuerzas externas. Un ejemplo de este tipo de elemento corresponde al elemento *B* de la estructura mixta presentada en la figura 1.4.1(b).

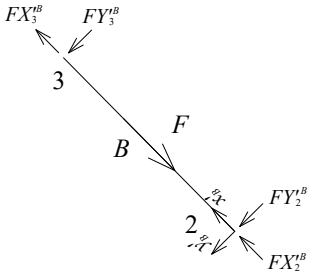
Figura 1.4.1: *Ejemplos de estructuras formadas por diferentes tipos de elementos.*



(a) *Estructura formada por un solo elemento tipo barra.*



(b) *Estructura formada por un elemento tipo cercha plana (barra con fuerza axial constante) y dos tipo pórtico plano.*



(c) *Diagrama de cuerpo libre del elemento B de la estructura presentada en la figura 1.4.1(b).*

Como prueba de que el elemento B de la estructura presentada en la figura 1.4.1(b) es tipo cercha plana, en la figura 1.4.1(c) se presenta su diagrama de cuerpo libre, donde se ha tenido en cuenta que, debido a que se encuentra articulado en sus extremos, el momento flector en estos puntos es cero. Realizando el equilibrio rotacional respecto al nodo 2 y en direcciones y'_B y x'_B, se obtiene respectivamente:

$$\sum M_2 = 0 = FY_3'^B L_B \qquad \therefore \qquad FY_3'^B = 0 \tag{1.4.2a}$$

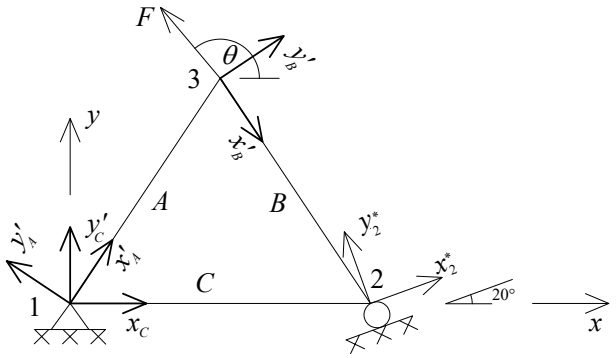
$$\sum FY'_B = 0 = FY_2'^B + FY_3'^B = FY_2'^B \qquad \therefore \qquad FY_2'^B = 0 \tag{1.4.2b}$$

$$\sum FX'_B = 0 = FX_2'^B + FX_3'^B \qquad \therefore \qquad FX_2'^B = -FX_3'^B \tag{1.4.2c}$$

Es decir, las únicas fuerzas que actúan en los extremos del elemento son $FX_2'^B$ y $FX_3'^B$, las cuales hacen que el elemento esté sometido a una fuerza axial constante en toda su longitud.

Las condiciones de frontera y continuidad típicas de los elementos tipo barra (o cercha plana) son: $a)$ desplazamiento conocido en una o varias direcciones en algún nodo (por ejemplo en el nodo 1 de la estructura presentada en la figura 1.4.2 tanto el desplazamiento horizontal como vertical son cero. Igual ocurre con el desplazamiento en dirección y_2^* del nodo 2), $b)$ fuerza puntual conocida en una o varias direcciones en algún nodo (en el nodo 3 de la misma estructura se sabe que la fuerza externa en dirección x es $P\cos(\theta)$, mientras que componente en dirección y es $P\sin(\theta)$), $c)$ continuidad de los campos de desplazamiento en los nodos (por ejemplo el desplazamientos del nodo 3 debe ser igual al desplazamiento al final elemento A y al inicio del elemento B), $d)$ el equilibrio de nodos (todos los nodos de la estructura deben estar en equilibrio).

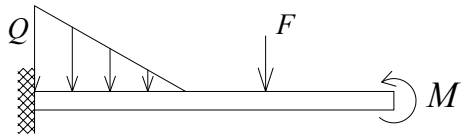
Figura 1.4.2: *Condiciones de frontera y continuidad en una cercha.*



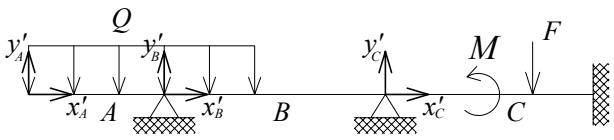
1.4.3. Elemento tipo viga

Un elemento tipo viga es aquel cuyas únicas fuerzas internas son la fuerza cortante y el momento flector; es decir, este tipo de elemento no tiene fuerza axial. Para que un elemento sea tipo viga se debe cumplir que las fuerzas externas actuantes en este no tengan componente axial (x'_E) y que las reacciones tampoco las tengan. En la figura 1.4.3(a) se presenta una estructura tipo viga compuesta por un solo elemento, mientras que en la figura 1.4.3(b) se presenta una estructura tipo viga compuesta por tres elementos.

Figura 1.4.3: *Ejemplos de estructuras formadas solo por elementos tipo viga.*



(a) *Viga formada por un solo elemento.*



(b) *Viga formada por tres elementos.*

En este punto es importante resaltar que no siempre que un apoyo tenga la potencialidad de tomar una reacción, esta es diferente a cero. Como caso particular se tiene que en los tres apoyos de la viga presentada figura 1.4.3(b) sus reacciones horizontales son cero, pese a que teóricamente estos apoyos pueden tomar reacciones horizontales. Lo anterior se puede probar al resolver la ecuación (1.5.7) con $p_E(x'_E) = 0$, la cual corresponde a la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento de un elemento tipo barra o la componente axial de un elemento tipo pórtico plano.

1.4.4. Elemento tipo viga sobre fundación flexible

Como su nombre lo indica, las vigas sobre fundación flexible son vigas que se encuentran soportadas sobre un suelo o medio flexible (no infinitamente rígido), el cual tiene la siguiente relación lineal entre la fuerza por unidad de longitud que el suelo ejerce sobre la viga y la rigidez por unidad de longitud del suelo:

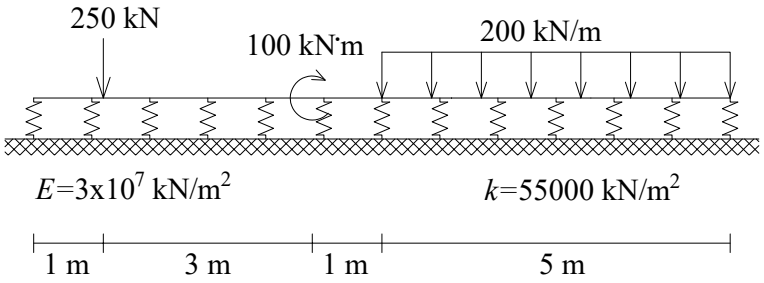
$$f_S(x'_E) = -k_E v_E(x'_E) \tag{1.4.3}$$

Donde:
$f_S(x'_E)$: Fuerza por unidad de longitud que el suelo ejerce sobre la viga, la cual es positiva en dirección del eje local y'_E. De (1.4.3), es claro que la fuerza que el suelo ejerce sobre la viga tiene dirección contraria a la del desplazamiento transversal de la viga $(v_E(x'_E))$.
k_E: Rigidez por unidad de longitud del suelo (esta suele calcularse como el producto del módulo de subrasante y el ancho de la viga en contacto con el suelo).
$v_E(x'_E)$: Campo de desplazamiento de la viga en dirección del eje y'_E (eje perpendicular a la dirección axial del elemento).

Al igual que para las vigas, las únicas fuerzas internas en una viga sobre fundación flexible son la cortante y el momento flector.

Como ejemplo, en la figura 1.4.4 se presenta el modelo de una viga sobre fundación flexible que se resuelve en el ejemplo 6.3.3.

Figura 1.4.4: *Viga sobre fundación flexible.*



Para aquellos lectores interesados en profundizar en otros modelos más complejos empleados para caracterizar a las vigas sobre fundación flexible se les recomienda la lectura de Biot (1937) y Y. Wang, Tham, & Cheung (2005).

1.4.5. Elemento tipo pórtico plano

El elemento tipo pórtico plano está caracterizado porque las fuerzas internas que soporta son fuerza axial, fuerza cortante y momento flector, y se define como la superposición de un elemento tipo barra (encargado del comportamiento en dirección longitudinal o x'_E) y uno tipo viga (encargado del comportamiento en dirección transversal o y'_E).

1.4.6. Elemento tipo pila sin fricción en el fuste

Al igual que en el elemento tipo pórtico plano, en el elemento tipo pila sin fricción en el fuste, las fuerzas internas son: fuerza axial, momento flector y fuerza cortante. Este elemento se define como la superposición de un elemento tipo barra (encargado del comportamiento en dirección longitudinal o x'_E) y uno tipo viga sobre fundación flexible (encargado del comportamiento en dirección transversal o y'_E).

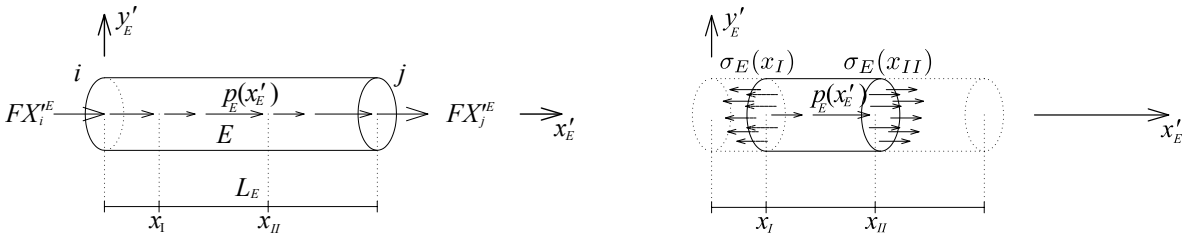
1.5. Ecuaciones diferenciales gobernantes

A continuación se deducen las ecuaciones diferenciales gobernantes para los elementos tipo barra, viga y viga sobre fundación flexible, los cuales son la base para todos los elementos estudiados en este texto.

1.5.1. Elemento tipo barra

En la figura 1.5.1(a) se presenta un elemento tipo barra el cual se encuentra en equilibrio, su sección transversal es constante con área A_E, su material es elástico lineal homogéneo con módulo de elasticidad E_E y su longitud indeformada es L_E. Este se encuentra sometido a dos fuerzas puntuales en sus extremos ($FX_i'^E$ y $FX_j'^E$) y a una fuerza distribuida por unidad de longitud en dirección del eje axial del elemento (eje x'_E) $p_E(x'_E)$.

Figura 1.5.1: *Elemento tipo barra.*



(a) *Diagrama de cuerpo libre de todo el elemento.*

(b) *Diagrama de cuerpo libre de una porción arbitraria del elemento.*

Dado que dicho elemento se encuentra en equilibrio, también lo está cualquier porción arbitraria del mismo, en particular, la figura 1.5.1(b) presenta una que va desde $x'_E = x_I$ hasta $x'_E = x_{II}$, cuyo equilibrio está gobernado por la siguiente ecuación:

$$A_E \left[\sigma_E(x_{II}) - \sigma_E(x_I)\right] + \int_{x_I}^{x_{II}} p_E(x'_E) dx'_E = 0 \tag{1.5.1}$$

Donde σ_E es el esfuerzo en dirección axial, el cual es positivo si es de tracción y negativo si es de compresión.

Aplicando el teorema fundamental del cálculo, la ecuación (1.5.1) se puede reescribir como:

$$A_E \int_{x_I}^{x_{II}} \frac{d\sigma_E}{dx'_E}(x'_E) dx'_E + \int_{x_I}^{x_{II}} p_E(x'_E) dx'_E = 0 \tag{1.5.2}$$

Debido a que las dos integrales presentadas al lado izquierdo de (1.5.2) tienen iguales límites y variable de integración, ambas se pueden reescribir en una sola:

$$\int_{x_I}^{x_{II}} \left[A_E \frac{d\sigma_E}{dx'_E}(x'_E) + p_E(x'_E)\right] dx'_E = 0 \tag{1.5.3}$$

Por su parte, en base a que los límites de integración fueron tomados de forma arbitraria, la única forma de que dicha integral sea siempre cero, es decir, que cualquier porción del elemento esté en equilibrio, es que el integrando también lo sea, de lo cual se obtiene:

$$A_E \frac{d\sigma_E}{dx'_E}(x'_E) + p_E(x'_E) = 0 \tag{1.5.4}$$

Esta es la ecuación diferencial básica de equilibrio uniaxial y representa la condición a cumplir para que cada punto de la barra esté en equilibrio. Ahora, debido a que el material de la barra es elástico lineal y homogéneo, se tiene que su ley constitutiva (relación entre esfuerzos y deformaciones, la cual en este caso es conocida como la ley de Hooke unidimensional) es:

$$\sigma_E(x'_E) = E_E \epsilon(x'_E) = E_E \frac{du_E}{dx'_E}(x'_E) \tag{1.5.5}$$

Donde $u_E(x'_E)$ es el campo de desplazamiento en dirección axial y $\epsilon(x'_E)$ es la deformación en esta misma dirección.

A partir de la cual, la fuerza axial se puede calcular en términos del campo de desplazamiento axial, como:

$$P_E(x'_E) = A_E \sigma_E(x'_E) = A_E E_E \frac{du_E}{dx'_E}(x'_E) \tag{1.5.6}$$

Por último, reemplazando (1.5.5) en (1.5.4), se obtiene:

$$A_E E_E \frac{d^2 u_E}{dx'^2_E}(x'_E) = -p_E(x'_E) \tag{1.5.7}$$

La cual es la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento de los elementos tipo barra de sección transversal constante y material elástico lineal homogéneo, y corresponde a una ecuación diferencial lineal, de segundo grado, no homogénea y de coeficientes constantes.

Algo importante de resaltar de la ecuación (1.5.7) es que, pese a que $p_E(x'_E)$ se definió como una carga distribuida (o por unidad de longitud), también puede emplearse para representar a una fuerza puntual externa en dirección axial. En particular, si la fuerza externa es puntual, de magnitud F, aplicada en dirección x'_E y ubicada a una distancia ξ'_E medida desde el origen de coordenadas, se tiene que la carga $p_E(x'_E)$ que la representa se define por medio de la siguiente función:

$$p_E(x'_E) = F\delta(x'_E - \xi'_E) \tag{1.5.8}$$

Donde $\delta()$ es la función generalizada delta de Dirac.

Como generalización de la ecuación (1.5.7), si el elemento es de sección transversal variable, cuya área está definida por la función $A_E(x'_E)$, su ecuación diferencial gobernante es (esta prueba corresponde al problema 1.4):

$$E_E \frac{d}{dx'_E}\left[A_E(x'_E)\frac{du_E}{dx'_E}(x'_E)\right] = -p_E(x'_E) \tag{1.5.9}$$

Mientras que la fuerza axial se calcula como:

$$P_E(x'_E) = A_E(x'_E)\sigma_E(x'_E) = A_E(x'_E)E_E\epsilon(x'_E) = A_E(x'_E)E_E\frac{du_E}{dx'_E}(x'_E) \tag{1.5.10}$$

Debido a que la ecuación diferencial gobernante para este problema ((1.5.7) o (1.5.9)) está expresada en función del campo de desplazamiento en dirección axial, las condiciones de frontera y/o continuidad deben expresarse en función de este campo. En la sección 1.6.1 se dicuten estas condiciones.

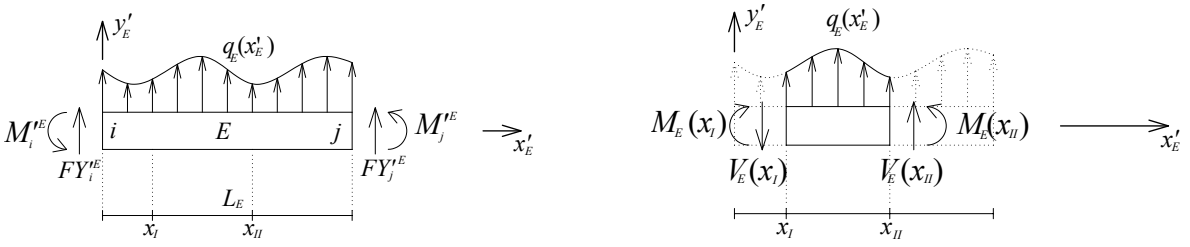
Es importante mencionar que debido a que la ecuación diferencial a resolver es de segundo grado, deben tenerse dos condiciones de frontera para que el problema de valor en la frontera (P.V.F.)[1] gobernante tenga solución y esta sea única.

En los ejemplos 1.11.1 a 1.11.4 se formulan y resuelven problemas de barras de sección transversal constante y variable, partiendo de sus ecuaciones diferenciales gobernantes y empleando sus condiciones de frontera y/o continuidad.

1.5.2. Elemento tipo viga

En la figura 1.5.2(a) se presenta un elemento tipo viga genérico de sección transversal constante, cuyo momento de inercial respecto al eje z'_E (perpendicular al plano $x'_E y'_E$) es I_E; su material es elástico lineal y homogéneo con módulo de elasticidad E_E, y se encuentra sometido a una fuerza distribuida por unidad de longitud $q_E(x'_E)$, la cual actúa en dirección del eje y'_E.

Figura 1.5.2: *Elemento tipo viga.*



(a) *Diagrama de cuerpo libre de todo el elemento.* (b) *Diagrama de cuerpo libre de una porción arbitraria del elemento.*

Debido a que el elemento presentado en la figura 1.5.2(a) se encuentra en equilibrio, así también lo está cualquier porción arbitraria del mismo, en particular del equilibrio en dirección y'_E del cuerpo libre definido por los planos $x = x_I$ y $x = x_{II}$, se obtiene (ver figura 1.5.2(b)):

$$V_E(x_{II}) - V_E(x_I) + \int_{x_I}^{x_{II}} q_E(x'_E)dx'_E = 0 \tag{1.5.11}$$

La que, aplicando el teorema fundamental del cálculo, puede expresarse en forma integral como:

$$\int_{x_I}^{x_{II}} \left[\frac{dV_E}{dx'_E}(x'_E) + q_E(x'_E)\right]dx'_E = 0 \tag{1.5.12}$$

[1] En este caso el P.V.F. está definido por una ecuación diferencial de segundo grado y dos condiciones de frontera. El número de condiciones de frontera necesarias para resolver de forma única un P.F.V. está relacionado directamente con el grado de la ecuación diferencial a resolver.

Tomando el hecho que los límites de integración son arbitrarios, es decir, cualquier porción del elemento debe estar en equilibrio, se tiene que el integrando de la ecuación anterior debe ser cero, es decir:

$$\frac{dV_E}{dx'_E}(x'_E) = -q_E(x'_E) \tag{1.5.13}$$

Por su parte, aplicando el equilibrio rotacional respecto al origen de coordenadas de la porción del elemento presentado en la figura 1.5.2(b), se obtiene:

$$M_E\left(x_{II}\right) - M_E\left(x_I\right) + V_E\left(x_{II}\right) x_{II} - V_E\left(x_I\right) x_I + \int_{x_I}^{x_{II}} q_E(x'_E) x'_E dx'_E = 0 \tag{1.5.14}$$

La que, aplicando de nuevo el teorema fundamental del cálculo, puede reescribirse como:

$$\int_{x_I}^{x_{II}} \frac{dM_E}{dx'_E}(x'_E)dx'_E + \int_{x_I}^{x_{II}} \frac{d}{dx'_E}[V_E(x'_E)x'_E]dx'_E + \int_{x_I}^{x_{II}} q_E(x'_E)x'_E dx'_E = 0 \tag{1.5.15}$$

Agrupando en una sola integral el lado izquierdo de (1.5.15) se obtiene:

$$\int_{x_I}^{x_{II}} \left\{ \frac{dM_E}{dx'_E}(x'_E) + \frac{d}{dx'_E}[V_E(x'_E)x'_E] + q_E(x'_E)x'_E \right\} dx'_E = 0 \tag{1.5.16}$$

La que, luego de realizar la derivada del producto, da como resultado:

$$\int_{x_I}^{x_{II}} \left[\frac{dM_E}{dx'_E}(x'_E) + \frac{dV_E}{dx'_E}(x'_E)x'_E + V_E(x'_E) + q_E(x'_E)x'_E \right] dx'_E = 0 \tag{1.5.17}$$

Ahora, reemplazando (1.5.13) en (1.5.17) se obtiene:

$$\int_{x_I}^{x_{II}} \left[\frac{dM_E}{dx'_E}(x'_E) + V_E(x'_E) \right] dx'_E = 0 \tag{1.5.18}$$

De nuevo, debido a que los límites de integración en (1.5.18) son arbitrarios, la única forma que el resultado de dicha integral sea siempre cero es que el integrando así lo sea, es decir:

$$V_E(x'_E) = -\frac{dM_E}{dx'_E}(x'_E) \tag{1.5.19}$$

Esta ecuación es importante pues define una relación directa entre ambas fuerzas internas en un elemento tipo viga.

Por otro lado, si se asume la condición de flexión de Euler, en la que secciones inicialmente planas continúan siéndolo luego de la flexión, entonces la relación entre la curvatura y el momento flector es:

$$M_E(x'_E) = E_E I_E \frac{d^2 v_E}{dx'^2_E}(x'_E) \tag{1.5.20}$$

Derivando una vez (1.5.20) respecto a x'_E y empleando (1.5.19), da como resultado:

$$V_E(x'_E) = -\frac{dM_E}{dx'_E}(x'_E) = -E_E I_E \frac{d^3 v_E}{dx'^3_E}(x'_E) \tag{1.5.21}$$

Derivando de nuevo a (1.5.21) y empleando (1.5.13), se obtiene:

$$E_E I_E \frac{d^4 v_E}{dx'^4_E}(x'_E) = q_E(x'_E) \tag{1.5.22}$$

La cual es la ecuación diferencial que gobierna a los elementos tipo viga de sección transversal constante y material elástico lineal homogéneo, y representa el equilibrio vertical de cada punto de la viga. Entre sus propiedades

principales se encuentra que es de cuarto grado, lineal, no homogénea y de coeficientes constantes.

Pese a que por definición $q_E(x'_E)$ es una carga externa por unidad de longitud o carga distribuida, esta se puede emplear incluso para definir fuerzas o momentos puntuales. Para el caso de una carga externa puntual en dirección y'_E, de magnitud F y localizada una distancia ξ'_E del origen de coordenadas, la función $q_E(x'_E)$ que la define es:

$$q_E(x'_E) = F\delta\left(x'_E - \xi'_E\right) \tag{1.5.23}$$

Mientras que para el caso de un momento puntual M que actúa en dirección z'_E y está ubicado a una distancia ξ'_E del origen de coordenadas, la función $q_E(x'_E)$ que lo define es (ver el ejemplo 3.3.1):

$$q_E(x'_E) = M\frac{\partial\delta(x'_E - \xi'_E)}{\partial x'_E} \tag{1.5.24}$$

La generalización de (1.5.22) para elementos de sección transversal variable, cuya inercia se define por medio de la función $I_E(x'_E)$ es (esta deducción corresponde al problema 1.5):

$$E_E\frac{d^2}{dx'^2_E}\left[I_E(x'_E)\frac{d^2v_E}{dx'^2_E}(x'_E)\right] = q_E(x'_E) \tag{1.5.25}$$

Mientras que las fuerzas internas para este tipo de elemento se calculan como:

$$M_E(x'_E) = E_E I_E(x'_E)\frac{d^2v_E}{dx'^2_E}(x'_E) \tag{1.5.26a}$$

$$V_E(x'_E) = -\frac{dM_E}{dx'_E}(x'_E) = -E_E\frac{d}{dx'_E}\left[I_E(x'_E)\frac{d^2v_E}{dx'^2_E}(x'_E)\right] \tag{1.5.26b}$$

En este punto es importante hacer hincapié que aunque se ha indicado que los elementos tipo viga se encuentran sometidos tanto a fuerza cortante como a momento flector, solo se ha tenido en cuenta el efecto de este último en los desplazamientos de la viga, lo cual se debe a que para las vigas tradicionales el efecto de los desplazamientos causados por la fuerza cortante es despreciable respecto a los de flexión[2].

Algo importante de comentar respecto a la ecuación (1.5.22) es que, aunque se basa en (1.5.20), la solución directa de (1.5.20) suele no poder obtenerse para las estructuras estáticamente indeterminadas. Mientras que (1.5.22) o (1.5.25) siempre se pueden emplear, pues la carga externa ($q_E(x'_E)$) debe conocerse en cada problema.

Dado que (1.5.22) o (1.5.25) son ecuaciones diferenciales de cuarto grado, para su solución deben emplearse cuatro condiciones de frontera, equilibrio y/o continuidad, las cuales se discuten en la sección 1.6.2.

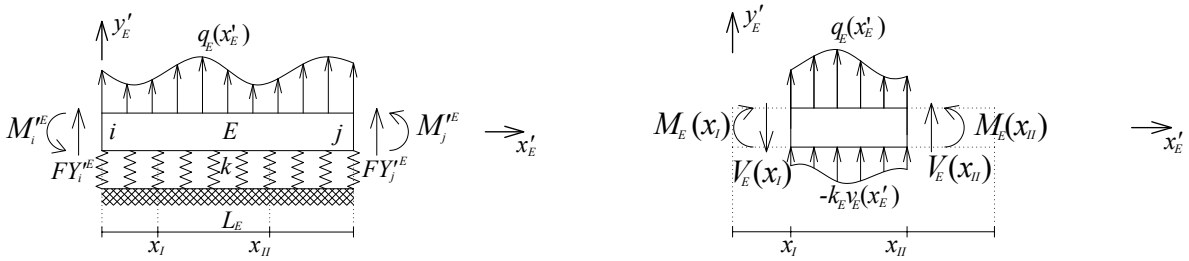
En los ejemplos 1.11.5 a 1.11.7 se presenta la solución de varios problemas de vigas que van desde la definición del problema de valor en la frontera gobernante, hasta el cálculo de los campos de desplazamiento y las fuerzas internas.

1.5.3. Elemento tipo viga sobre fundación flexible

En la figura 1.5.3(a) se presenta un elemento tipo viga sobre fundación flexible que está formado por una viga de sección transversal constante cuyo momento de inercia es I_E, material elástico lineal cuyo módulo de elasticidad es E_E, apoyada sobre un suelo cuya rigidez por unidad de longitud es k_E (constante) y está sometido a una fuerza externa por unidad de longitud $q_E(x'_E)$ que actúa en dirección y'_E.

[2]El efecto de la fuerza cortante se vuelve importante para elementos tipo muro, que no se tratan en este libro, y están caracterizados porque su sección transversal tiene dimensiones del mismo orden de magnitud que la longitud del mismo.

Figura 1.5.3: *Elemento tipo viga sobre fundación flexible.*



(a) *Diagrama de cuerpo libre de todo el elemento.* (b) *Diagrama de cuerpo libre de una porción arbitraria del elemento.*

Del equilibrio en dirección y'_E de una porción arbitraria de la viga sobre fundación flexible estudiada, se obtiene (ver figura 1.5.3(b)):

$$\begin{aligned}
V_E(x_{II}) - V_E(x_I) - k_E \int_{x_I}^{x_{II}} v_E(x'_E)dx'_E + \int_{x_I}^{x_{II}} q_E(x'_E)dx'_E = 0 \\
\int_{x_I}^{x_{II}} \frac{dV_E}{dx'_E}(x'_E)dx'_E - k_E \int_{x_I}^{x_{II}} v_E(x'_E)dx'_E + \int_{x_I}^{x_{II}} q_E(x'_E)dx'_E = 0 \\
\int_{x_I}^{x_{II}} \left[\frac{dV_E}{dx'_E}(x'_E) - k_E v_E(x'_E) + q_E(x'_E) \right] dx'_E = 0 \\
\frac{dV_E}{dx'_E}(x'_E) - k_E v_E(x'_E) + q_E(x'_E) = 0
\end{aligned} \tag{1.5.27}$$

La cual representa el equilibrio en dirección y'_E en cada punto de la viga sobre fundación flexible.

Ahora, realizando el equilibrio rotacional de la porción del elemento presentado en la figura 1.5.3(b), se obtiene:

$$\begin{aligned}
M_E(x_{II}) - M_E(x_I) + V_E(x_{II})x_{II} - V_E(x_I)x_I - k_E \int_{x_I}^{x_{II}} v_E(x'_E)x'_E dx'_E + \int_{x_I}^{x_{II}} q_E(x'_E)x'_E dx'_E = 0 \\
\int_{x_I}^{x_{II}} \frac{dM_E}{dx'_E}(x'_E)dx'_E + \int_{x_I}^{x_{II}} \frac{d}{dx'_E}\left[V_E(x'_E)x'_E\right]dx'_E - k_E \int_{x_I}^{x_{II}} v_E(x'_E)x'_E dx'_E + \int_{x_I}^{x_{II}} q_E(x'_E)x'_E dx'_E = 0 \\
\int_{x_I}^{x_{II}} \left\{ \frac{dM_E}{dx'_E}(x'_E) + \frac{d}{dx'_E}\left[V_E(x'_E)x'_E\right] - k_E v_E(x'_E)x'_E + q_E(x'_E)x'_E \right\} dx'_E = 0 \\
\int_{x_I}^{x_{II}} \left\{ \frac{dM_E}{dx'_E}(x'_E) + V_E(x'_E) + \left[\frac{dV_E}{dx'_E}(x'_E) - k_E v_E(x'_E) + q_E(x'_E) \right] x'_E \right\} dx'_E = 0 \\
\int_{x_I}^{x_{II}} \left[\frac{dM_E}{dx'_E}(x'_E) + V_E(x'_E) \right] dx'_E = 0 \\
\frac{dM_E}{dx'_E}(x'_E) + V_E(x'_E) = 0
\end{aligned} \tag{1.5.28}$$

Donde se ha usado (1.5.27) en su deducción.

Si se asume la condición de flexión de Euler, la relación entre la curvatura y el momento flector en la viga es:

$$M_E(x'_E) = E_E I_E \frac{d^2 v_E}{dx'^2_E}(x'_E) \tag{1.5.29}$$

Derivando (1.5.28) respecto a x'_E y reemplazando en (1.5.27) se obtiene:

$$-\frac{d^2 M_E}{dx'^2_E}(x'_E) - k_E(x'_E)v_E(x'_E) + q_E(x'_E) = 0 \tag{1.5.30}$$

Por último, reemplazando (1.5.29) en la ecuación anterior se obtiene la ecuación diferencial gobernante para la viga sobre fundación flexible:

$$E_E I_E \frac{d^4 v_E}{dx_E'^4}(x_E') + k_E v_E(x_E') = q_E(x_E') \tag{1.5.31}$$

Una forma alternativa de obtener (1.5.31) consiste notar que la viga sobre fundación flexible puede entenderse como una viga cuya carga externa en lugar de ser $q_E(x_E')$ es $q_E(x_E') - k_E v_E(x_E')$ y reemplazar este valor en (1.5.22).

La forma tradicional de presenta (1.5.31) se obtiene en dividirla a ambos lados por $E_E I_E$, obteniéndose:

$$\frac{d^4 v_E}{dx_E'^4}(x_E') + 4\lambda_E^4 v_E(x_E') = \frac{q_E(x_E')}{E_E I_E} \tag{1.5.32}$$

Donde $\lambda_E = \sqrt[4]{\dfrac{k_E}{4E_E I_E}}$.

1.5.4. Elemento tipo pórtico plano

Al estar este elemento definido como la superposición de los elementos tipo barra y viga, además de que las ecuaciones diferenciales que gobiernan a cada uno de estos están desacopladas entre sí (una no dependen de la otra), se tiene que su comportamiento está gobernado por el siguiente par de ecuaciones diferenciales:

$$A_E E_E \frac{d^2 u_E}{dx_E'^2}(x_E') = -p_E(x_E') \tag{1.5.33a}$$

$$E_E I_E \frac{d^4 v_E}{dx_E'^4}(x_E') = q_E(x_E') \tag{1.5.33b}$$

1.5.5. Elemento tipo pila sin fricción en el fuste

Debido a que este tipo de elemento es resultado de la superposición de los elementos tipo barra y viga sobre fundación flexible y que las ecuaciones diferenciales de cada uno de estos dos elementos están desacopladas entre sí (una no depende de la otra), su comportamiento está gobernado por las siguientes dos ecuaciones diferenciales:

$$A_E E_E \frac{d^2 u_E}{dx_E'^2}(x_E') = -p_E(x_E') \tag{1.5.34a}$$

$$\frac{d^4 v_E}{dx_E'^4}(x_E') + 4\lambda_E^4 v_E(x_E') = \frac{q_E(x_E')}{E_E I_E} \tag{1.5.34b}$$

1.6. Condiciones de frontera, continuidad y equilibrio

1.6.1. Elemento tipo barra

Debido a que la ecuación diferencial gobernante para este problema está expresada en función del campo de desplazamiento en dirección axial, las condiciones de frontera deben expresarse en función de este campo. Las principales condiciones de frontera para este tipo de elementos son:

1. Desplazamiento conocido: este caso suele ocurrir cuando los apoyos restringen el desplazamiento de algún punto en la frontera del elemento. Dichas condiciones de frontera se encuentran de forma nativa expresadas en función del campo de desplazamiento longitudinal.

2. Esfuerzo o fuerza axial conocidos: estas condiciones de frontera existen cuando se aplica alguna fuerza puntual en un extremo de un elemento. Pese a que tales condiciones de frontera no se encuentran de forma nativa en función del campo de desplazamiento longitudinal, fácilmente esto puede realizarse al emplear la ley de Hooke, a través de la que este tipo de condiciones de frontera se relaciona con la primera derivada del campo de desplazamiento lingitudinal.

3. Continuidad de desplazamientos: esta condición se emplea cuando se deben unir dos elementos, y consiste en que todos los elementos que lleguen a un nodo deben tener el mismo desplazamiento en su extremo que se conecta a dicho nodo, el no cumplimiento de esta condición significaría que la estructura ha fallado pues se ha roto.

4. Equilibrio: al igual de las condiciones de continuidad de desplazamiento, esta condición se debe cumplir en los nodos que sirven de unión a más de un elemento y se emplean para forzar que el equilibrio se cumpla.

5. Mixtas: este caso ocurre cuando la condición de frontera se expresa en función del campo de desplazamiento longitudinal y de la primera derivada de este. Es usual tener este tipo de condiciones de frontera en elementos en cuyos extremos se encuentre algún resorte.

Es importante mencionar que debido a que la ecuación diferencial a resolver al analizar barras es de segundo grado, deben tenerse dos condiciones de frontera para que el problema de valor en la frontera (P.V.F.) gobernante tenga solución y esta sea única.

1.6.2. Elemento tipo viga o viga sobre fundación flexible

En este caso la ecuación diferencial a resolver es de cuarto grado y está expresada en función del campo de desplazamiento en dirección transversal del elemento. Las principales condiciones de frontera para estos tipos de elementos son:

1. Desplazamiento o rotación conocido: como su nombre lo indica, esta condición de frontera se tiene cuando el desplazamiento y/o rotación de un punto de la frontera del elemento es conocido, lo anterior es típico de los diferentes apoyos empleados en las estructuras. En el primer caso el desplazamiento se conoce de forma explícita, mientras que en el segundo se conoce su primera derivada.

2. Momento o cortante conocido: en este tipo de apoyo es conocida la fuerza cortante o momento flector en un punto del elemento; lo anterior es típico cuando se aplica una carga (fuerza o momento) en un extremo de un elemento. Por medio de las ecuaciones $M_E(x'_E) = E_E I_E(x'_E)\dfrac{d^2 v_E}{dx'^2_E}(x'_E)$ y $V_E(x'_E) = -E_E I_E(x'_E)\dfrac{d^3 v_E}{dx'^3_E}(x'_E)$ es posible expresar dichas condiciones de frontera en función del campo de desplazamiento en dirección perpendicular a la viga ($v_E(x'_E)$).

3. Continuidad de desplazamientos y/o rotaciones: esta condición se emplea cuando se unen dos o más elementos en un nodo. Siempre se tiene como premisa que dos elementos que se unen comparten el mismo desplazamiento en su punto común (nodo), concepto comúnmente llamado como nodo rígido. Lo mismo ocurre con sus rotaciones a menos que dicho punto común corresponda a una articulación.

4. Equilibrio nodal: en los puntos de unión de dos o más elementos se debe cumplir el equilibrio traslacional y rotacional.

5. Mixtas: esta condición es típica cuando existen apoyos tipo resorte en los cuales la fuerza cortante y/o momento flector que actúa en sus puntos ubicación es proporcional al desplazamiento y/o rotación de dichos puntos.

1.6.3. Elemento tipo pórtico plano o pila sin fricción en el fuste

Debido a que estos tipos de elementos han sido definidos como la superposición de elementos tipo barra y viga o barra y viga sobre fundación flexible, los tipos de condiciones de frontera presentadas en las secciones 1.6.1 y 1.6.2 también aplican.

1.7. Sistemas coordenados

En el análisis estructural es usual emplear tres familias de sistemas coordenados diferentes. La primera está formada por un solo sistema coordenado conocido como sistema global de coordenadas y su nombre indica que es usado en toda la estructura; la segunda familia es conocida como sistema de ejes locales y cada elemento de la estructura tiene uno de estos sistemas coordenados asignado; mientras que la tercera familia conocida como sistema de ejes nodales está compuesta por un sistema coordenado para cada uno de los nodos que conforman la estructura (es usual que estos coincidan con los ejes globales a menos que exista un apoyo inclinado que imposibilite expresar sus condiciones de frontera en el sistema global).

1.7.1. Sistema coordenado global

Este sistema coordenado cartesiano de mano derecha es propio de toda la estructura y está formado por los ejes x, y, z. En este texto todas las estructuras se encuentran en el plano xy, donde el eje x es horizontal y está orientado hacia la derecha, el eje y es vertical y está orientado hacia arriba, el eje z es perpendicular a dicho plano y es positivo hacia afuera del plano de la estructura (papel).

Los principales usos de este sistema coordenado son:

1. Definición de la posición de los nodos (puntos de unión de los elementos) de la estructura.
2. Definición de las fuerzas externas. Esto se debe a que muchas de las cargas típicas en las estructuras tienen naturaleza gravitacional y por ende su dirección es contraria al eje y.
3. Cálculo de las reacciones de la estructura. Esto debido a que es usual que todas las reacciones de las estructuras se presenten en el mismo sistema coordenado. Lo anterior para poder revisar su equilibrio de forma fácil.
4. Cálculo de los desplazamientos nodales de la estructura, a menos que se empleen ejes nodales.

1.7.2. Sistema coordenado local

Este sistema coordenado cartesiano de mano derecha es propio de cada elemento, de tal manera que cada uno de ellos tenga un sistema coordenado local propio, el cual está formado por los ejes x'_E, y'_E y z'_E, donde E representa al nombre del elemento. Siempre el eje coordenado x'_E está dirigido en la dirección axial del elemento, comenzando en un nodo (llamado de forma genérica, nodo i) y apuntando hacia el otro nodo del elemento (nodo j). Lo anterior se entiende como que al definir este eje local se definen de forma implícita los nodos inicial y final del elemento. El eje y'_E se encuentra en el mismo plano de la estructura y a 90º desde el eje x'_E medidos en sentido antihorario, mientras que el eje z'_E tiene la misma dirección del eje global z; es decir, apunta hacia afuera del plano de la estructura.

La importancia de estos sistemas coordenados radica en el hecho que las ecuaciones diferenciales gobernantes para cada uno de los elementos están escritas en términos de estos (ver sección 1.5). Algo similar ocurre con las fuerzas internas, de las cuales la fuerza axial siempre esta dirigida en la dirección del eje x'_E, la fuerza cortante en la dirección del eje y'_E y el momento flector en dirección del eje z'_E y siguiendo la convención presentada en la sección 1.3.

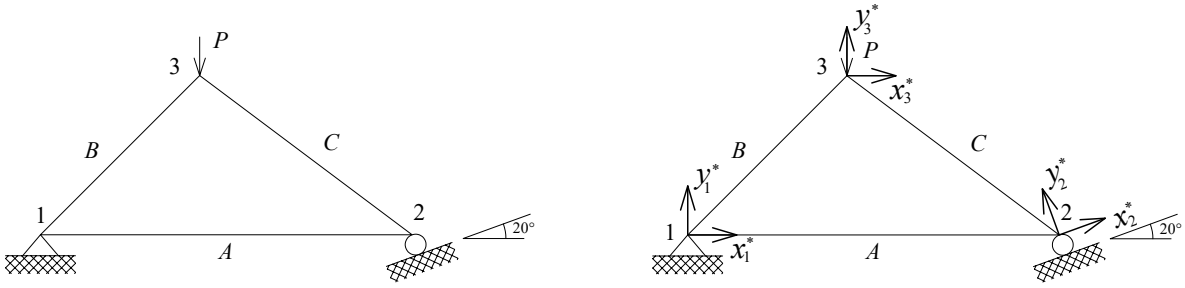
Los principales usos de este sistema coordenado son:

1. Formulación de las ecuaciones diferenciales gobernantes para cada tipo de elemento.
2. Formulación de las métodos de Análisis Estructural (todos los métodos de Análisis Estructural se formulan originalmente en dichos sistemas coordenados).
3. Cálculo de las fuerzas internas en los elementos.
4. Cálculo de los campos de desplazamiento.

1.7.3. Sistema coordenado nodal

En algunas estructuras, como la presentada en la figura 1.7.1(a), existen apoyos cuyas condiciones de frontera no pueden ser expresadas una a una de forma directa en coordenadas globales. Para esto es necesario el empleo de los sistemas nodales de coordenadas, los cuales son propios de cada uno de los nodos y están formados por los eje x_n^*, y_n^* y z_n^* donde n representa el nodo en el cual están definidos. Como convención, los ejes nodales tienen como origen el nodo al cual están asociados (ver figura 1.7.1(b)). Al igual que los sistemas coordenados presentados anteriormente estos son también cartesianos de mano derecha, de tal manera que los eje x_n^* y y_n^* están ubicados en el plano de la estructura mientras que el eje z_n^* está dirigido hacia afuera del plano de la estructura.

Figura 1.7.1: *Definición de los ejes nodales.*



(a) *Estructura.* (b) *Ejes nodales.*

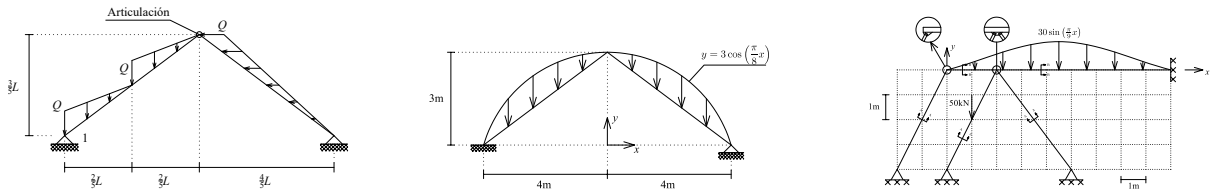
Los principales usos de este sistema coordenado son:

1. Cálculo de las reacciones.
2. Cálculo de los deplazazamientos de los nodos (desplazamientos nodales).

1.8. Transformación de las fuerzas externas a coordenadas locales

Como se vio en la sección 1.5, las ecuaciones diferenciales que gobiernan a cada uno de los tipos de elementos estudiados en este libro son función de las fuerzas externas que actúan en los mismos expresadas en coordenadas locales, es decir, $p_E(x'_E)$ y $q_E(x'_E)$. Pese a lo anterior, no siempre las cargas externas se encuentran definidas a priori en dirección de los ejes locales de cada elemento, entre otras razones, porque una porción importante de las cargas tienen naturaleza gravitacional y por ende su dirección es vertical. Como ejemplo de la anterior idea, en la figura 1.8.1 se presentan tres estructuras resueltas en este texto y cuyas cargas externas no se encuentran definidas en dirección de los ejes locales.

Figura 1.8.1: *Estructuras cuyas cargas externas no se encuentran definidas a priori en las direcciones de los ejes locales.*



(a) *Pórtico plano formado por dos elementos oblicuos sometido a cargas distribuidas horizontales y verticales (ejemplo 2.5.8).*

(b) *Pórtico plano formado por dos elementos oblicuos sometido a cargas distribuidas verticales (ejemplo 7.3.5).*

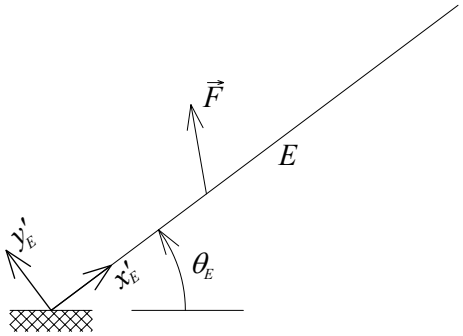
(c) *Estructura mixta sometida a fuerzas distribuidas y fuerza puntual vertical no paralela u oblicua al elemento de acción (ejemplo 7.3.8).*

Por lo anterior es importante saber como expresar o descomponer en coordenadas locales aquellas fuerzas externas originalmente definidas en globales. A continuación se explica el procedimiento para lograr esto ya se trate de fuerzas puntuales o distribuidas.

1.8.1. Fuerzas puntuales

Al ser las fuerzas puntuales vectores, estas se descomponen de igual manera que los vectores. Como ejemplo, en la figura 1.8.2 se presenta un elemento oblicuo sometido a una fuerza puntual que no es paralela o perpendicular a este.

Figura 1.8.2: *Elemento sometido a una fuerza externa puntual.*



En coordenadas globales dicha fuerza $\vec{F}$ se expresa como:

$$\vec{F} = FX\vec{i} + FY\vec{j} \tag{1.8.1}$$

Mientras que en coordenadas locales la fuerza $\vec{F}$, ahora se expresa como:

$$\vec{F} = \left[FX\cos\left(\theta_E\right) + FY\sin\left(\theta_E\right)\right]\vec{i'_E} + \left[-FX\sin\left(\theta_E\right) + FY\cos\left(\theta_E\right)\right]\vec{j'_E} \tag{1.8.2}$$

Donde θ_E es el ángulo que hay entre el eje x global y el eje x'_E local.

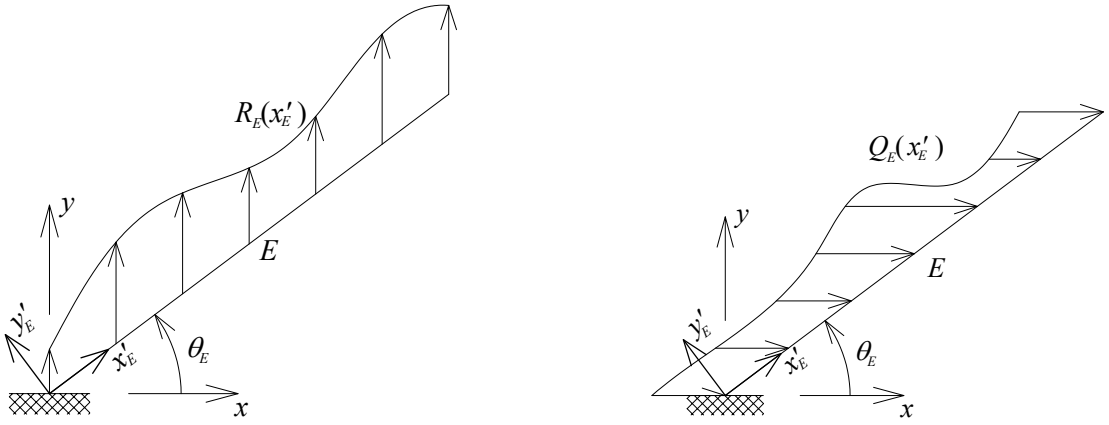
1.8.2. Fuerzas distribuidas

Con las fuerzas distribuidas pasa algo particular y es que estas no son vectores, por lo cual no es posible descomponerlas de igual manera que se hace con estos últimos (ver Pujol (2003) para una definición matemática del concepto de vector, la cual relaciona el valor de sus componentes en diferentes sistemas coordenados). Para poder remediar esta situación es necesario emplear el concepto de diferencial de fuerza, ya que este sí es un vector y por ende se puede descomponer como se presentó en la sección 1.8.1.

Para ilustrar lo anterior, se emplean los dos casos particulares presentados en la figura 1.8.3. En ambos un elemento oblicuo se encuentra sometido a cargas externas distribuidas en dirección de los ejes globales y, x, respectivamente, y lo que se busca es poder expresar las cargas externas en coordenadas locales de la siguiente manera:

$$\vec{dF}(x'_E) = p_E(x'_E)dx'_E\vec{i'_E} + q_E(x'_E)dx'_E\vec{j'_E} \tag{1.8.3}$$

Figura 1.8.3: *Elementos sometidos a fuerzas externas distribuidas verticales y horizontales.*

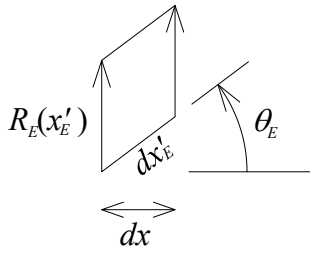


(a) *Fuerza externa vertical.* (b) *Fuerza externa horizontal.*

A continuación se discute en detalle cómo se obtienen las cargas $p_E(x'_E)$ y $q_E(x'_E)$ para el caso de la carga vertical, la cual se expresa en función de x'_E, es decir, $R_E(x'_E)$. Para iniciar se toma el diferencial de fuerza presentado en la figura 1.8.4, el cual se expresa en función de la carga $R_E(x'_E)$ como:

$$\vec{dF}(x'_E) = R_E(x'_E)|dx|\vec{j} \tag{1.8.4}$$

Figura 1.8.4: *Diferencial de fuerza vertical.*



Ahora es necesario expresar el vector diferencial de fuerza $\vec{dF}(x'_E)$ en sus componentes en coordenadas locales, para lo cual el vector unitario $\vec{j}$ debe expresarse en términos de los vectores unitarios $\vec{i'_E}$ y $\vec{j'_E}$:

$$\vec{dF}(x'_E) = R_E(x'_E)|dx|\left[\sin(\theta_E)\vec{i'_E} + \cos(\theta_E)\vec{j'_E}\right] \tag{1.8.5}$$

Por último teniendo en cuenta que $|dx| = |\cos(\theta_E)dx'_E|$, el diferencial de fuerza se expresa como:

$$\vec{dF}(x'_E) = p_E(x'_E)\vec{i'_E} + q_E(x'_E)\vec{j'_E} = R_E(x'_E)\left[\sin(\theta_E)\vec{i'_E} + \cos(\theta_E)\vec{j'_E}\right]|\cos(\theta_E)|\,dx'_E \tag{1.8.6}$$

Luego de comparar (1.8.6) y (1.8.3), se obtiene que las cargas externas por unidad de longitud en coordenadas locales, para el caso de la fuerza externa en dirección vertical $R_E(x'_E)$, son:

$$p_E(x'_E) = R_E(x'_E)\,|\cos(\theta_E)|\sin(\theta_E) \qquad 0 < x'_E < L_E \tag{1.8.7a}$$
$$q_E(x'_E) = R_E(x'_E)\,|\cos(\theta_E)|\cos(\theta_E) \qquad 0 < x'_E < L_E \tag{1.8.7b}$$

Para el caso en que la fuerza externa se aplique en dirección y (vertical), el diferencial de fuerza a emplear es:

$$\vec{dF}(x'_E) = Q_E(x'_E)|dy|\vec{i} \tag{1.8.8}$$

Donde $Q_E(x'_E)$ es la carga horizontal por unidad de longitud expresada como función del eje local x'_E (ver figura 1.8.3(b)). Procediendo de forma similar a como se hizo para el caso de la carga vertical, se tiene que las cargas distribuidas en dirección de los ejes locales son:

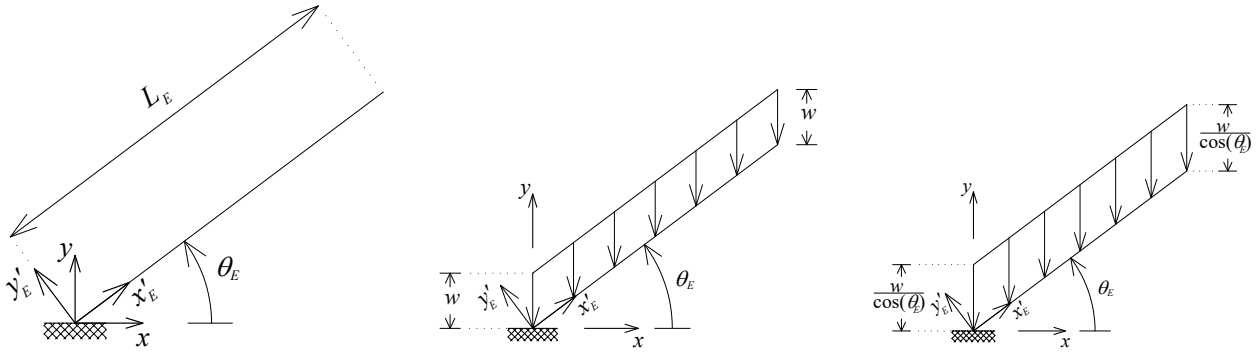
$$p_E(x'_E) = Q_E(x'_E)\,|\sin(\theta_E)|\cos(\theta_E) \qquad 0 < x'_E < L_E \tag{1.8.9a}$$

$$q_E(x'_E) = -Q_E(x'_E)\,|\sin(\theta_E)|\sin(\theta_E) \qquad 0 < x'_E < L_E \tag{1.8.9b}$$

Para el interesado en afianzar el uso de las ecuaciones (1.8.7) y 1.8.9, en los problemas 1.6 a 1.13 se presentan algunos de estos ejercicios, además en los ejemplos de pórticos planos de los capítulos 2 y 7 se resuelven estructuras con este tipo de cargas y se calculan los valores de las funciones $p_E(x'_E)$ y $q_E(x'_E)$.

En este punto es importante mencionar que la presente metodología para descomponer las fuerzas distribuidas a los ejes locales, es propia del autor y tiene como objetivo principal mantener la igualdad entre la magnitud de la resultante de las fuerzas distribuidas y el área de la figura empleada para su representación gráfica. Pese a que esto parece normal e intuitivo para el caso de vigas (elementos horizontales sometidos a fuerzas verticales), no siempre es igual de claro para el caso de cargas que no sean paralelas o perpendiculares al elemento sobre el cual actúan. Como ejemplo particular, en la figura 1.8.5(a) se presenta un elemento cuya única carga externa es el peso propio y cuenta con un peso por unidad de longitud w.

Figura 1.8.5: *Posibles alternativas para expresar el peso propio de un elemento.*



(a) *Elemento sometido a su peso propio.*

(b) *Alternativa 1 para representar gráficamente el peso propio del elemento como una carga distribuida.*

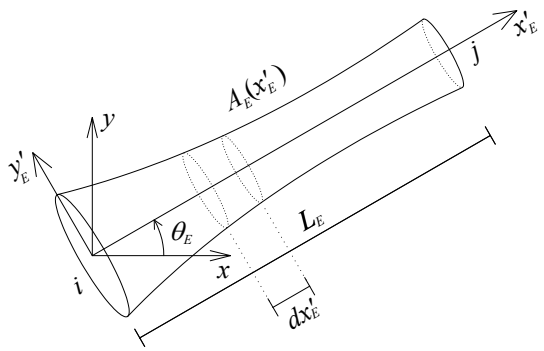
(c) *Alternativa 2 para representar gráficamente el peso propio del elemento como una carga distribuida.*

Una alternativa para expresar la carga externa de este elemento se presenta en la figura 1.8.5(b), basada en que para cada punto la carga por unidad de longitud es una función constante de valor w. Pese a que esta forma de representar las cargas distribuidas es empleada en textos como Kassimali (2009, 2012), Hibbeler & Kiang (2015) y Ghali & Neville (2017); el problema con esta alternativa es que el área empleada para expresar la carga es $wL_E\cos(\theta_E)$, la cual es diferente al peso del elemento que es wL_E. Esta discrepancia se debe a que los ejes empleados para representar la carga (x'_E y el eje y) no son ortogonales y por ende, el producto de una cantidad medida en una de estas direcciones (L_E) y la otra cantidad expresada la otra dirección (w), no representa el área o resultante. Como una segunda alternativa para representar al peso del elemento se presenta la figura 1.8.5(c), la cual ahora sí tiene la propiedad que el área bajo la curva representa a la resultante de la fuerza. Es esta última alternativa la que se emplea en este texto, debido a que tradicionalmente se acostumbra a que el área bajo la curva represente siempre la magnitud de la fuerza resultante, y a que hay gran variedad de cargas cuyo valor es proporcional al área o volumen de material que la causa (ver el ejemplo 7.3.5, donde la carga es debida al peso de la nieve sobre una cubierta); y más importante aun porque la carga está presentada gráficamente dentro del sistema coordenado empleado para graficar a la estructura, el cual es cartesiano.

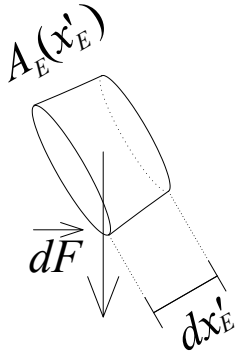
1.8.3. Peso propio

En la figura 1.8.6(a) se presenta un elemento de sección transversal variable, cuya área de la sección transversal está definida por la función $A_E(x'_E)$ y tiene un material con un peso por unidad de volumen $\gamma_E(x'_E)$.

Figura 1.8.6: *Elemento de sección transversal variable sometido a su peso propio y diferencial de este.*



(a) *Elemento completo.*



(b) *Diferencial.*

Analizando el diferencial del elemento que se presenta en la figura 1.8.6(b), se tiene que el diferencial de fuerza debido al peso propio es:

$$\vec{dF} = -A_E(x'_E)\gamma_E(x'_E)dx'_E\vec{j} \tag{1.8.10}$$

El cual se encuentra expresado en coordenadas globales. Para poder transformar $\vec{dF}$ a coordenadas locales, se comienza por expresar al vector unitario $\vec{j}$ en coordenadas locales:

$$\vec{j} = \sin(\theta_E)\vec{i'_E} + \cos(\theta_E)\vec{j'_E} \tag{1.8.11}$$

Reemplazando (1.8.11) en (1.8.10), se obtiene:

$$\vec{dF} = p_E(x'_E)dx'_E\vec{i'_E} + q_E(x'_E)dx'_E\vec{j'_E} = -A_E(x'_E)\gamma_E(x'_E)\sin(\theta_E)dx'_E\vec{i'_E} - A_E(x'_E)\gamma_E(x'_E)\cos(\theta_E)dx'_E\vec{j'_E} \tag{1.8.12}$$

Ahora, comparando (1.8.12) con (1.8.3), se obtiene que las fuerzas externas por unidad de longitud en coordenadas locales debidas al peso propio del elemento, son:

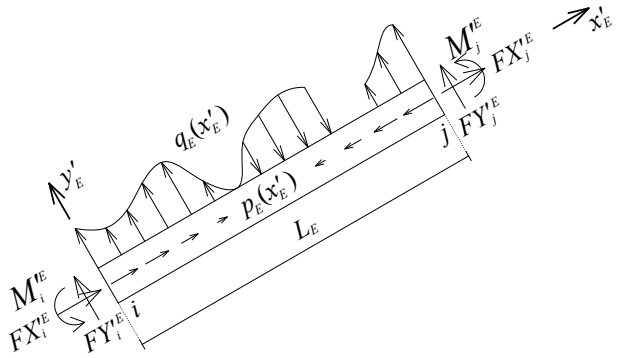
$$p_E(x'_E) = -A_E(x'_E)\gamma_E(x'_E)\sin(\theta_E) \qquad 0 < x'_E < L_E \tag{1.8.13a}$$

$$q_E(x'_E) = -A_E(x'_E)\gamma_E(x'_E)\cos(\theta_E) \qquad 0 < x'_E < L_E \tag{1.8.13b}$$

1.9. Cálculo de fuerzas internas

A continuación se presenta un procedimiento general para calcular las fuerzas internas en un elemento tipo pórtico plano del cual se conocen sus fuerzas en dirección de los ejes locales en sus extremos $\left(FX_i'^E, FY_i'^E, M_i'^E, FX_j'^E, FY_j'^E \text{ y } M_j^E\right)$ y sus fuerzas externas en coordenadas locales $\left(p_E(x'_E) \text{ y } q_E(x'_E)\right)$ (ver figura 1.9.1).

Figura 1.9.1: *Diagrama de cuerpo libre de un elemento tipo pórtico plano el cual se encuentra sometido a fuerzas externas $p_E(x'_E)$ y $q_E(x'_E)$ y fuerzas en sus extremos.*



Para esto se analizan dos posibles escenarios. El primero corresponde a un diagrama de cuerpo libre (estáticamente determinado) que comienza inmediatamente después[3] del nodo i y finaliza en un punto genérico en el interior del elemento, que se encuentra a una distancia x'_E del nodo i (ver figura 1.9.2(a)). De realizar el equilibrio en direcciones x'_E, y'_E y rotacional respecto al punto final del corte, es decir el punto $(x'_E, 0)$, se obtiene respectivamente:

$$\sum FX'_E = 0 = FX'^E_i + P_E(x'_E) + \int_0^{x'_E} p_E(k'_E)dk'_E \tag{1.9.1a}$$

$$\sum FY'_E = 0 = FY'^E_i + V_E(x'_E) + \int_0^{x'_E} q_E(k'_E)dk'_E \tag{1.9.1b}$$

$$\sum M_{x'_E} = 0 = M'^E_i + M_E(x'_E) - FY'^E_i \cdot x'_E - \int_0^{x'_E} q_E(k'_E)(x'_E - k'_E)dk'_E \tag{1.9.1c}$$

Donde k'_E es una variable auxiliar muda (no aparece en el resultado final de las fuerzas internas) y no debe confundirse con alguna rigidez.

A partir de lo anterior, las fuerzas internas en este elemento son:

$$P_E(x'_E) = -FX'^E_i - \int_0^{x'_E} p_E(k'_E)dk'_E \qquad 0 < x'_E < L_E \tag{1.9.2a}$$

$$V_E(x'_E) = -FY'^E_i - \int_0^{x'_E} q_E(k'_E)dk'_E \qquad 0 < x'_E < L_E \tag{1.9.2b}$$

$$M_E(x'_E) = -M'^E_i + FY'^E_i \cdot x'_E + \int_0^{x'_E} q_E(k'_E)(x'_E - k'_E)dk'_E \qquad 0 < x'_E < L_E \tag{1.9.2c}$$

Por otro lado, el segundo escenario corresponde a un diagrama de cuerpo libre que comienza a una distancia arbitraria x'_E y termina al final del elemento (inmediatamente antes del nodo j), del equilibrio en direcciones x'_E, y'_E y rotacional respecto al punto inicial del corte (punto $(x'_E, 0)$), se obtiene (ver figura 1.9.2(b)):

$$\sum FX'_E = 0 = -P_E(x'_E) + FX'^E_j + \int_{x'_E}^{L_E} p_E(k'_E)dk'_E \tag{1.9.3a}$$

$$\sum FY'_E = 0 = -V_E(x'_E) + FY'^E_j + \int_{x'_E}^{L_E} q_E(k'_E)dk'_E \tag{1.9.3b}$$

$$\sum M_{x'_E} = 0 = -M_E(x'_E) + M'^E_j + FY'^E_j\,(L_E - x'_E) + \int_{x'_E}^{L_E} q_E(k'_E)(k'_E - x'_E)dk'_E \tag{1.9.3c}$$

[3]Recordar que en este texto las estructuras están constituidas por elementos y nodos, y los primeros no incluyen a los segundos. Por ejemplo, para el caso de la figura 1.9.1 el elemento E está compuesto por los puntos que pertenecen al dominio abierto $x'_E \in (0, L_E)$, mientras que los nodos i y j corresponden respectivamente a los puntos $x'_E = 0$ y $x'_E = L_E$.

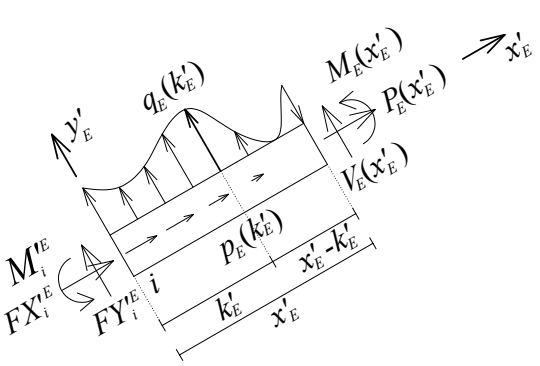
De donde se obtiene que el campo de fuerzas internas está dado por:

$$P_E(x'_E) = FX'^E_j + \int_{x'_E}^{L_E} p_E(k'_E)dk'_E \qquad 0 < x'_E < L_E \tag{1.9.4a}$$

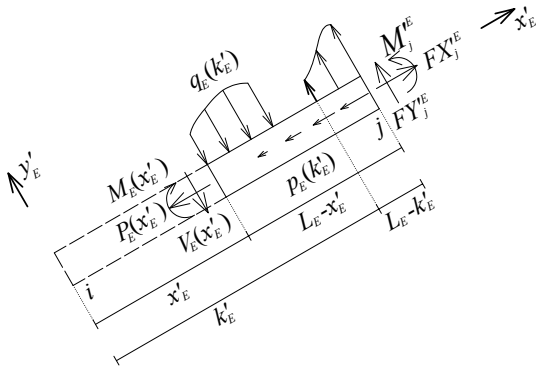
$$V_E(x'_E) = FY'^E_j + \int_{x'_E}^{L_E} q_E(k'_E)dk'_E \qquad 0 < x'_E < L_E \tag{1.9.4b}$$

$$M_E(x'_E) = M'^E_j + FY'^E_j\,(L_E - x'_E) + \int_{x'_E}^{L_E} q_E(k'_E)(k'_E - x'_E)dk'_E \qquad 0 < x'_E < L_E \tag{1.9.4c}$$

Figura 1.9.2: *Posibles diagramas de cuerpo libre empleados para calcular las fuerzas internas.*



(a) *Diagrama de cuerpo libre de incluye al nodo i.*



(b) *Diagrama de cuerpo libre de incluye al nodo j (las líneas discontinuas son solo de referencia y no hacen parte del cuerpo libre).*

La importancia de las ecuaciones (1.9.2) y (1.9.4) radica en que son generales, por lo que pueden ser aplicadas para cualquier tipo de carga, incluso para fuerzas y momentos puntuales, para lo cual debe recurrirse al empleo de la función generalizada delta de Dirac.

1.10. Funciones de Green

Las funciones de Green representan el campo de desplazamiento (respuesta) de un medio (o estructura) ante la acción de una fuerza puntual unitaria aplicada en este. Son empleadas como una alternativa para la solución de problemas de valor en la frontera y/o inicial para una gran variedad de fenómenos físicos (Duffy, 2015); además de ser la base de algunos métodos numéricos como el método directo de elementos de frontera (Banerjee & Butterfield, 1981; Brebbia & Dominguez, 1992) así como del método indirecto de elementos de frontera (Sánchez-Sesma, Ramos-Martínez, & Campillo, 1993).

Para el caso particular de la ingeniería civil, en geotecnia se emplean, entre otras, las funciones de Green debidas a Kelvin, Boussinesq, Flamant, Curriti, Melan y Mindlin (Podio-Guidugli & Favata, 2014), para el caso de la sismología e ingeniería sísmica es frecuente el empleo de las funciones de Green debidas a Lamb, Chao, Stokes y Garvin (Kausel, 2006; Aki & Richards, 2002), en transferencia de calor las principales se deben a Hobson y Sommerfeld (Duffy, 2015). Al lector interesado en profundizar en este tema se le recomienda la lectura de los siguientes textos: Duffy, (2015), y Barton, (1989).

1.10.1. Funciones de Green a emplear en este libro

En este texto se deducen y emplean las funciones de Green en los siguiente casos:

1. Cálculo directo de la respuesta estructural (sección 1.10.2).

2. Como definición de la estructura virtual en el método del trabajo virtual (capítulo 2).

3. Cálculo de las fuerzas y campos de empotramiento en elementos tipo barra, esto hace parte del método de rigidez con funciones de Green para pórticos planos y estructuras mixtas (capítulo 7).

4. Cálculo de las fuerzas y campos de empotramiento para elementos tipo viga, esto hace parte del método de pendiente deflexión para vigas (capítulo 3) y del método de rigidez con funciones de Green para vigas, pórticos planos y estructuras mixtas (capítulos 5 y 7).

5. Cálculo de las fuerzas y campos de empotramiento para elementos tipo viga sobre fundación flexible, esto hace parte del método de rigidez con funciones de Green para vigas sobre fundación flexible (capítulo 6) y elementos tipo pila sin fricción en el fuste (capítulo 7).

6. Cálculo de líneas de influencia en vigas y pórticos planos (ejemplos 2.5.5 y 5.3.5).

Además, en los problemas de este capítulo se presenta un compendio con funciones de Green para barras de sección transversal constante y variable, vigas de sección transversal constante y variable, vigas de sección transversal constante con conexiones semirrigidas (resortes en sus extremos) y vigas de sección transversal constante sobre fundación flexible.

Usualmente en las diferentes áreas de la física donde se emplean las funciones de Green, estas se suelen denotar como $G_{ab}(\vec{x},\vec{\xi})$ (la letra G es en honor a su desarrollador George Green (Challis & Sheard, 2003)), $\vec{x}$ corresponde al punto donde se calcula el desplazamiento, $\vec{\xi}$ es la ubicación de la carga puntual unitaria externa, a es la dirección en la cual se mide el desplazamiento y b corresponde a la dirección en la cual se aplica la carga.

En este texto, por emplearse solo funciones de Green para elementos unidimensionales (cuyas propiedades se encuentran definidas sobre una línea recta) y que la respuesta en estos depende de sus coordenadas locales, en lugar del vector $\vec{x}$ se empleará el escalar x'_E para denotar el punto donde se calcula el desplazamiento y para el punto donde se encuentra aplicada la carga puntual unitaria se empleará ξ'_E en lugar de $\vec{\xi}$. Además, para facilitar la notación, como subindices se emplean las letras x, y y θ en lugar de x'_E, y'_E y θ_z para denotar la dirección en la cual se calcula el desplazamiento o rotación y se aplica la carga externa respectivamente. Como ejemplo $G_{xy}(x'_E,\xi'_E)$ corresponde al desplazamiento en dirección del eje local x'_E del punto cuya abscisa en coordenadas locales es x'_E, debido a la acción de una fuerza puntual unitaria en dirección del eje local y'_E ubicada en un punto cuya abscisa en coordenadas locales es ξ'_E.

Es importante tener presente que para evitar confusiones al lector, y debido a que las funciones de Green de elementos doblemente empotrados jugarán un papel muy importante en la formulación de los métodos de pendiente deflexión y rigidez, las funciones de Green de estos elementos se denotarán como se indicó anteriormente, es decir; empleando la letra G, mientras que para los elementos que no sean doblemente empotrados o para estructuras formas por más de un elemento a su nombre se le pondrá una barra sobre la G ($\bar{G}$).

1.10.1.1. Barra de sección transversal constante.

La ecuación diferencial que gobierna el desplazamiento (y la respuesta) de una barra de sección transversal constante y material elástico lineal homogéneo, sometida a una fuerza puntual unitaria en dirección axial (x'_E), y ubicada en $x'_E = \xi'_E$, es:

$$A_E E_E \frac{\partial^2 G_{xx}}{\partial x'^2_E}(x'_E,\xi'_E) = -\delta(x'_E - \xi'_E) \tag{1.10.1}$$

La cual corresponde a un caso particular de (1.5.7), donde la fuerza externa $p_E(x'_E)$ ha sido reemplazada por $\delta(x'_E-\xi'_E)$ (función generalizada delta de Dirac) y $u_E(x'_E)$ por $G_{xx}(x'_E,\xi'_E)$.

En los problemas 1.26 a 1.28 se presentan las funciones de Green para diferentes tipos de barras de un solo tramo o elemento.

1.10.1.2. Viga de sección transversal constante.

La ecuación diferencial que gobierna el desplazamiento (y la respuesta) de una viga de sección transversal constante y material elástico lineal homogéneo, sometida a una fuerza puntual unitaria en dirección transversal (y'_E) y ubicada en $x'_E = \xi'_E$, es:

$$E_E I_E \frac{\partial^4 G_{yy}}{\partial x'^4_E}(x'_E, \xi'_E) = \delta(x'_E - \xi'_E) \tag{1.10.2}$$

La cual corresponde a reemplazar $q_E(x'_E)$ por $\delta(x'_E - \xi'_E)$ y $v_E(x'_E)$ por $G_{yy}(x'_E, \xi'_E)$ en (1.5.22).

En los problemas 1.32 a 1.41 se presentan las funciones de Green para varias vigas de una sola luz.

1.10.1.3. Viga sobre fundación flexible de sección transversal constante.

La ecuación diferencial que gobierna el desplazamiento (y la respuesta) de una viga sobre fundación flexible de sección transversal constante, material elástico lineal homogéneo y rigidez del terreno constante, la cual se encuentra sometida a una fuerza puntual unitaria en dirección transversal (y'_E) y ubicada en $x'_E = \xi'_E$, es:

$$\frac{\partial^4 G_{yy}}{\partial x'^4_E}(x'_E, \xi'_E) + 4\lambda_E^4 G_{yy}(x'_E, \xi'_E) = \frac{\delta(x'_E, \xi'_E)}{E_E I_E} \tag{1.10.3}$$

La cual ha sido obtenida a partir de 1.5.32, reemplazando $q_E(x'_E)$ por $\delta(x'_E - \xi'_E)$ y $v_E(x'_E)$ por $G_{yy}(x'_E, \xi'_E)$.

En los problemas 1.48 a 1.51 se presentan las funciones de Green de diferentes tipos de vigas sobre fundación flexible de una sola luz.

1.10.1.4. Barra y viga de sección transversal variable.

En los problemas 1.29, 1.30, 1.43 y 1.44 se presentan las funciones de Green para elementos tipo barra y viga de sección transversal variable tanto circular de radio variable linealmente como rectangular de base constante y altura variable linealmente.

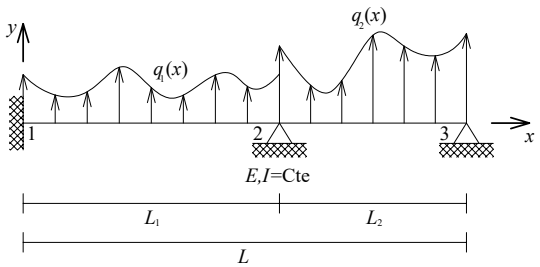
1.10.2. Uso de las funciones de Green para resolver problemas estructurales

En este texto se emplean las funciones de Green para resolver problemas estructurales en los dos siguientes escenarios:

1. Solución directa de problemas de análisis estructural, procedimiento que al autor le gusta llamar como "método de las funciones de Green para analizar estructuras".
2. Como parte de los métodos de pendiente deflexión (capítulo 3) y de rigidez (capítulos 4, 5, 6 y 7), los cuales son la columna vertebral de esta obra y cuya teoría común también se presentada en Molina-Villegas y cols., (2020).

Debido a que el segundo caso de empleo de las funciones de Green para resolver problemas estructurales se describe ampliamente en los siguientes capítulos, a continuación se hace énfasis en el primero, para lo que se emplea como ejemplo el cálculo del campo de desplazamiento de la viga estáticamente indeterminada presentada en la figura 1.10.1.

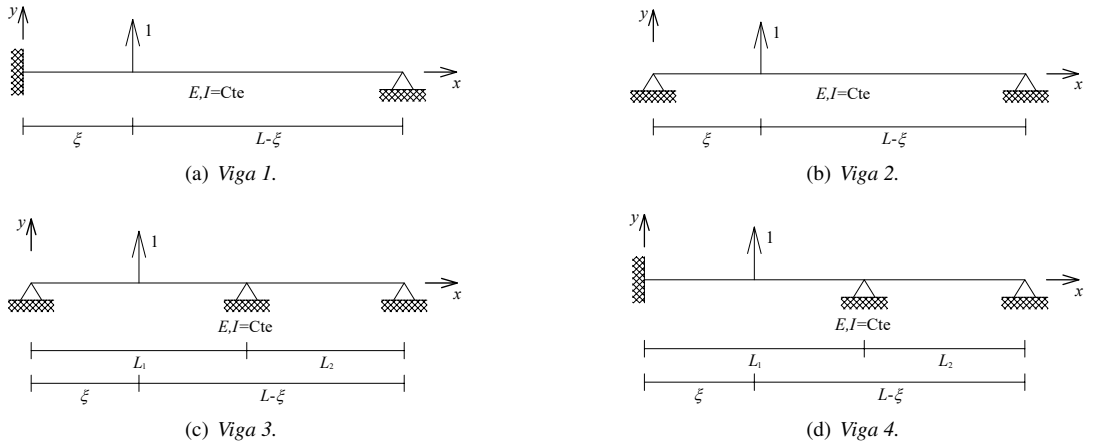
Figura 1.10.1: *Estructura a resolver empleando funciones de Green.*



El primer paso en la solución de este problema consiste en seleccionar una función de Green que cumpla algunas o todas las condiciones de frontera homogéneas de la estructura a resolver (en los problemas al final de este capítulo se presentan una gran cantidad de funciones de Green, especialmente para barras, vigas y vigas sobre fundación flexible de un solo tramo). Por ejemplo, la función de Green de la viga presentada en la figura 1.10.2(a) cumple las condiciones de frontera $v(0) = 0$, $\theta(0) = \dfrac{dv}{dx}(0) = 0$ y $M(L) = EI\dfrac{d^2v}{dx^2}(L) = 0$, pero no cumple que $v(L_1) = 0$, ni presenta una fuerza puntual $x = L_1$ (salto en la cortante). La función de Green de la viga de la figura 1.10.2(b) cumple las condiciones $v(0) = 0$, $v(L) = 0$ y $M(L) = EI\dfrac{d^2v}{dx^2}(L) = 0$, pero no cumple que $\theta(0) = \dfrac{dv}{dx}(0) = 0$, $v(L_1) = 0$, ni que en $x = 0$ el momento flector sea cero, o que en $x = L_1$ exista una fuerza puntual (salto en la cortante). La función de Green de la viga presentada en la figura 1.10.2(c) cumple las condiciones $v(0) = 0$, $v(L_1) = 0$, $v(L) = 0$ y $M(L) = EI\dfrac{d^2v}{dx^2}(L) = 0$, y no cumple $\theta(0) = \dfrac{dv}{dx}(0) = 0$, ni que en $x = 0$ exista un momento flector diferente a cero. Mientras que la función de Green de la viga presentada en la figura 1.10.2(d) cumple todas las condiciones descritas anteriormente.

De las funciones de Green presentadas en la figura 1.10.2, la óptima para resolver el problema planteado es aquella de la viga presentada en 1.10.2(d), pero por su poca generalidad no es fácil encontrarla y su cálculo sería tan demandante como la solución directa del problema en estudio. La segunda función de Green que más compatibilidad tiene con el problema en estudio corresponde a aquella de la viga presentada en la figura 1.10.2(c), pero de nuevo es poco genérica y por ende difícil de conseguir. Mientras que las funciones de Green de las vigas presentadas en las figuras 1.10.2(a) y 1.10.2(b) son fáciles de conseguir (se presentan en los problemas 1.35 y 1.34) y como caso particular a continuación se explica como emplear aquella correspondiente a la figura 1.10.2(b) para resolver este ejercicio (debido a que la otra se ha empleado en la solución ejemplo 1.11.12).

Figura 1.10.2: *Posibles funciones de Green a emplear para resolver el problema presentado en la figura 1.10.1.*



(a) *Viga 1.* (b) *Viga 2.*

(c) *Viga 3.* (d) *Viga 4.*

Como se presentó en la figura 1.10.1, la carga externa en toda la viga tiene dos tramos y está definida de la siguiente manera:

$$q(x) = \begin{cases} q_1(x) & 0 < x < L_1 \\ q_2(x) & L_1 < x < L \end{cases} \tag{1.10.4}$$

Mientras que la función de Green a emplear, correspondiente a la viga de la figura 1.10.2(b), es:

$$\bar{G}_{yy}(x,\xi) = \begin{cases} \bar{G}^{I}_{yy}(x,\xi) = \dfrac{L^3}{6EI}\left\{\dfrac{x}{L}\left[2\dfrac{\xi}{L} - 3\left(\dfrac{\xi}{L}\right)^2 + \left(\dfrac{\xi}{L}\right)^3\right] + \left(\dfrac{x}{L}\right)^3\left(-1 + \dfrac{\xi}{L}\right)\right\} & 0 < x \le \xi \\ \bar{G}^{II}_{yy}(x,\xi) = \dfrac{L^3}{6EI}\left\{\dfrac{\xi}{L}\left[2\dfrac{x}{L} - 3\left(\dfrac{x}{L}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{L}\right)^3\right] + \left(\dfrac{\xi}{L}\right)^3\left(-1 + \dfrac{x}{L}\right)\right\} & \xi \le x < L \end{cases} \tag{1.10.5}$$

Por su parte, la función de Green $\bar{G}_{y\theta}(x,\xi)$ (desplazamiento vertical debido a un momento puntual unitario) se puede obtener fácilmente a partir de $\bar{G}_{yy}(x,\xi)$, como (ver ejemplo 3.3.1):

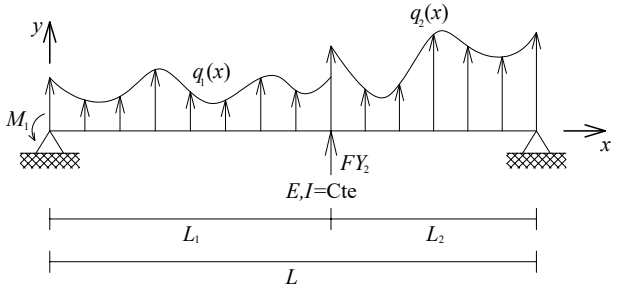
$$\bar{G}_{y\theta}(x,\xi) = \frac{\partial \bar{G}_{yy}}{\partial \xi}(x,\xi) = \begin{cases} \bar{G}^I_{y\theta}(x,\xi) & 0 < x \leq \xi \\ \bar{G}^{II}_{y\theta}(x,\xi) & \xi \leq x < L \end{cases} \tag{1.10.6}$$

Con las anteriores dos funciones de Green, ahora sí es posible resolver el problema. Para comenzar es importante mencionar la viga presentada en la figura 1.10.2(b) para ser equivalente a aquella a resolver (ver figura 1.10.1) debe tener un momento puntual en $x = 0$ (M_1), una fuerza puntual vertical en $x = L_1$ (FY_2) (ver figura 1.10.3), las cargas $q_1(x)$ y $q_2(x)$, además de cumplir las siguientes condiciones:

$$\frac{dv}{dx}(0) = 0 \tag{1.10.7a}$$

$$v(L_1) = 0 \tag{1.10.7b}$$

Figura 1.10.3: *Estructura equivalente a aquella a resolver, la cual debe cumplir las condiciones* $\frac{dv}{dx}(0) = 0$ *y* $v(L_1) = 0$.



Empleando las funciones de Green (1.10.5) y (1.10.6), las condiciones (1.10.7) se expresan en términos de M_1 y FY_2 como:

$$\frac{dv}{dx}(0) = 0 = M_1 \frac{\partial \bar{G}^I_{y\theta}}{\partial x}(0,0) + FY_2 \frac{\partial \bar{G}^I_{yy}}{\partial x}(0,L_1) + \int_0^{L_1} q_1(\xi) \frac{\partial \bar{G}^I_{yy}}{\partial x}(0,\xi) d\xi + \int_{L_1}^{L} q_2(\xi) \frac{\partial \bar{G}^I_{yy}}{\partial x}(0,\xi) d\xi \tag{1.10.8a}$$

$$v(L_1) = 0 = M_1 \bar{G}^I_{y\theta}(L_1,0) + FY_2 \bar{G}^I_{yy}(L_1,L_1) + \int_0^{L_1} q_1(\xi) \bar{G}^{II}_{yy}(L_1,\xi)\, d\xi + \int_{L_1}^{L} q_2(\xi) \bar{G}^I_{yy}(L_1,\xi)\, d\xi \tag{1.10.8b}$$

Donde los valores de M_1 y FY_2 serán aquellos que cumplan de forma simultanea a (1.10.8). Estas ecuaciones pueden ser entendidas como la aplicación del principio de superposición para calcular la rotación en $x = 0$ y el desplazamiento en $x = L_1$. Como ejemplo en (1.10.8a) el término $M_1 \frac{\partial \bar{G}^I_{y\theta}}{\partial x}(0,0)$ representa la rotación en $x = 0$ debido a la aplicación del momento M_1 en ese mismo punto, $FY_2 \frac{\partial \bar{G}^I_{yy}}{\partial x}(0,L_1)$ representa la rotación en $x = 0$ debido a la carga FY_2 ubicada en $x = L_1$, $\int_0^{L_1} q_1(\xi) \frac{\partial \bar{G}^I_{yy}}{\partial x}(0,\xi) d\xi$ representa la rotación en $x = 0$ debida a la carga distribuida $q_1(x)$ (la integral representa la suma de cada uno de los diferenciales de fuerza $q_1(\xi)d\xi$) y $\int_{L_1}^{L_2} q_2(\xi) \frac{\partial \bar{G}^I_{yy}}{\partial x}(0,\xi) d\xi$ representa la rotación en $x = 0$ debida a la carga distribuida $q_2(x)$.

De resolver conjuntamente (1.10.8) se obtienen los valores de M_1 y FY_2 que hacen que exista una rotación cero en $x = 0$ y un desplazamiento vertical cero en $x = L_1$. Ahora, con dichos valores el campo de desplazamiento en toda la

viga se calcula como:

$$v(x) = \begin{cases} v_1(x) & 0 < x \leq L_1 \\ v_2(x) & L_1 \leq x < L \end{cases} \tag{1.10.9}$$

Donde:

$$v_1(x) = M_1 G^{II}_{y\theta}(x,0) + FY_2 G^{I}_{yy}(x,L_1) + \int_0^x G^{II}_{yy}(x,\xi) q_1(\xi) d\xi + \int_x^{L_1} G^{I}_{yy}(x,\xi) q_1(\xi) d\xi + \int_{L_1}^{L} G^{I}_{yy}(x,\xi) q_2(\xi) d\xi \tag{1.10.10}$$

$$v_2(x) = M_1 G^{II}_{y\theta}(x,0) + FY_2 G^{II}_{yy}(x,L_1) + \int_0^{L_1} G^{II}_{yy}(x,\xi) q_1(\xi) d\xi + \int_{L_1}^{x} G^{II}_{yy}(x,\xi) q_2(\xi) d\xi + \int_x^{L} G^{I}_{yy}(x,\xi) q_2(\xi) d\xi \tag{1.10.11}$$

Donde, de nuevo, ambas ecuaciones se pueden entender mediante el principio de superposición.

En los ejemplos 1.11.12, 1.11.13 y 1.11.14 se resuelven detalladamente ejercicios de vigas y vigas sobre fundación flexible empleando este método. A los interesados en ahondar en esta metodología para el análisis de vigas sobre fundación flexible se les remite a los textos de Dinev, (2012) y Molina-Villegas, Ballesteros Ortega, & Quintero Toro, (2021).

1.11. Ejemplos

Barras de sección transversal constante

1. Barra sometida a fuerza externa distribuida constante (1.11.1).
2. Barra sometida a fuerzas externas distribuidas y puntuales (1.11.2).

Barras de sección transversal variable

3. Barra de sección transversal variable sometida a fuerza externa distribuida constante (1.11.3).
4. Deducción del método de rigidez para una barra de sección transversal variable sometida a fuerza externa distribuida constante (1.11.4).

Vigas de sección transversal constante

5. Viga en voladizo sometida a fuerza distribuida constante y un momento puntual (1.11.5).
6. Viga en voladizo apoyada sobre un resorte y sometida a fuerza externa distribuida con variación lineal (1.11.6).
7. Viga de dos luces sometida a fuerza externa distribuida (1.11.7).

Vigas sobre fundación flexible de sección transversal constante

8. Viga sobre fundación flexible simplemente apoyada sometida a fuerza externa sinusoidal (1.11.8).

Pórticos planos

9. Elemento tipo pórtico plano sometido a fuerza externa distribuida (1.11.9).
10. Pórtico plano de dos elementos sometido a cargas externas distribuidas (1.11.10).
11. Pórtico plano de dos elementos de sección transversal variable sometido a su peso propio (1.11.11).

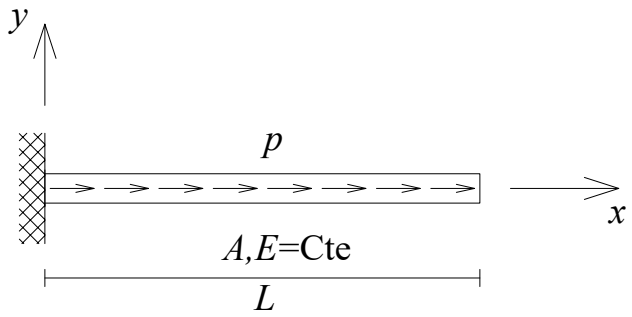
Análisis de estructuras empleando funciones de Green

12. Viga de dos luces sometida a cargas externas distribuidas y puntuales (1.11.12).
13. Viga y resorte que no están en contacto sometidos a cargas distribuidas (1.11.13).
14. Viga sobre fundación flexible sometida a una carga distribuida constante (1.11.14).

1.11.1. Ejemplo 1: barra sometida a fuerza externa distribuida constante

Para la barra presentada en la figura E1.1.1 obtener su problema de valor en la frontera gobernante y resolverlo.

Figura E1.1.1: *Barra a resolver.*



Solución

El problema de valor en la frontera que gobierna a la barra presentada en la figura E1.1.1, es:

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) = -\frac{p}{AE} \qquad 0 < x < L \tag{E1.1.1a}$$

$$u(0) = 0 \tag{E1.1.1b}$$

$$\frac{du}{dx}(L) = 0 \tag{E1.1.1c}$$

La solución del problema de valor en la frontera (E1.1.1) se obtiene como la suma de la solución de la ecuación diferencial homogénea ($u_h(x)$) asociada con (E1.1.1a) y una solución particular ($u_p(x)$) de la misma:

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) \tag{E1.1.2}$$

La solución de la ecuación diferencial homogénea es:

$$u_h(x) = C_1 + C_2 x \tag{E1.1.3}$$

Mientras que la solución particular es de la forma:

$$u_p(x) = C_3 x^2 \tag{E1.1.4}$$

Para obtener el valor del coeficiente indeterminado C_3 se obtienen las dos primeras derivadas de la solución particular:

$$\frac{du_p}{dx}(x) = 2C_3 x \tag{E1.1.5a}$$

$$\frac{d^2u_p}{dx^2}(x) = 2C_3 \tag{E1.1.5b}$$

Con lo cual, al reemplazar (E1.1.5b) en (E1.1.1a) se obtiene:

$$2C_3 + \frac{p}{AE} = 0 \qquad \therefore \qquad C_3 = -\frac{p}{2AE} \tag{E1.1.6}$$

De esta manera el campo de desplazamiento solución de la ecuación diferencial (E1.1.1a) es:

$$u(x) = C_1 + C_2 x - \frac{p}{2AE}x^2 \tag{E1.1.7}$$

Que tiene dos constantes indeterminadas, las cuales se obtienen al emplear las condiciones de frontera (E1.1.1b) y (E1.1.1c). Evaluando la condición de frontera (E1.1.1b), se obtiene que $C_1 = 0$. Para evaluar la condición de frontera (E1.1.1c) es preciso calcular previamente la primera derivada del campo de desplazamiento:

$$\frac{du}{dx}(x) = C_2 - \frac{p}{AE}x \tag{E1.1.8}$$

Ahora, evaluando la condición de frontera (E1.1.1c), se obtiene:

$$C_2 - \frac{p}{AE}L = 0 \qquad \therefore \qquad C_2 = \frac{p}{AE}L \tag{E1.1.9}$$

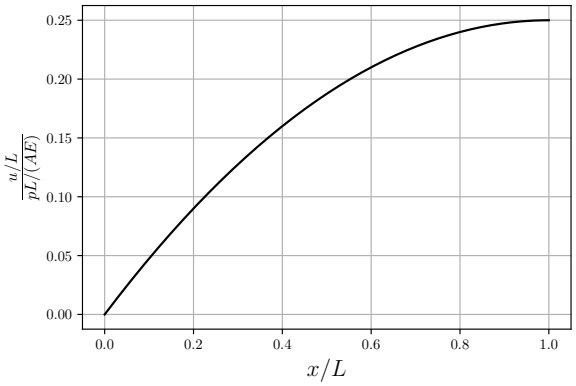
Con lo cual los campos de desplazamiento y fuerza axial son respectivamente:

$$u(x) = \frac{pL^2}{AE}\left[\frac{x}{L} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right] \qquad 0 < x < L \tag{E1.1.10a}$$

$$P(x) = AE\frac{du}{dx}(x) = pL\left(1 - \frac{x}{L}\right) \qquad 0 < x < L \tag{E1.1.10b}$$

En la figura E1.1.2 se presenta de forma adimensional el campo de desplazamiento del elemento analizado:

Figura E1.1.2: *Campo de desplazamiento adimensionalizado.*



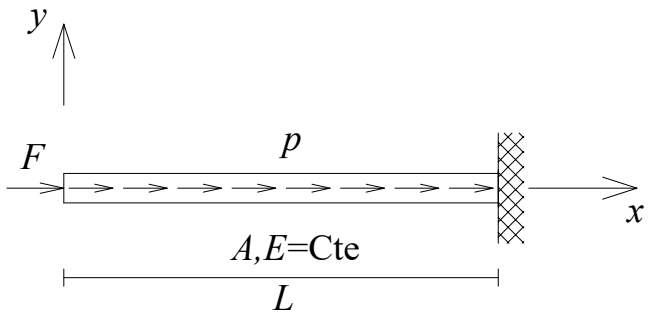
Desde el siguiente enlace puede descargarse el código de Python que resuelve este problema:

💻: `https://drive.google.com/file/d/1xun4h_sU-ZhRUi-n9-Orhf56QxZjIPNc`

1.11.2. Ejemplo 2: barra sometida a fuerzas externas distribuidas y puntuales

Para la barra presentada en la figura E1.2.1 obtener su problema de valor en la frontera gobernante y resolverlo.

Figura E1.2.1: *Barra a resolver.*



Solución

Para esta barra su problema de valor en la frontera gobernantes es:

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) = -\frac{p}{AE} \qquad 0 < x < L \tag{E1.2.1a}$$

$$AE\frac{du}{dx}(0) = -F \tag{E1.2.1b}$$

$$u(L) = 0 \tag{E1.2.1c}$$

Cuya solución general se expresa como:

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) \tag{E1.2.2}$$

Donde:
$u_h(x)$: Solución de la ecuación diferencial homogénea asociada con (E1.2.1a).
$u_p(x)$: Solución particular de la ecuación diferencial (E1.2.1a).

La solución de la ecuación diferencial homogénea asociada con (E1.2.1a), es:

$$u_h(x) = C_1 + C_2x \tag{E1.2.3}$$

Mientras que como solución particular asociada con (E1.2.1a), se propone a:

$$u_p(x) = C_3x^2 \tag{E1.2.4}$$

Cuyas primera y segunda derivada son respectivamente:

$$\frac{du_p}{dx}(x) = 2C_3x \tag{E1.2.5a}$$

$$\frac{d^2u_p}{dx^2}(x) = 2C_3 \tag{E1.2.5b}$$

Con lo cual al reemplazar (E1.2.5b) en (E1.2.1a), se obtiene que la solución particular es:

$$u_p(x) = -\frac{p}{2AE}x^2 \tag{E1.2.6}$$

Por lo tanto la solución de (E1.2.1a) es:

$$u(x) = C_1 + C_2x - \frac{p}{2AE}x^2 \tag{E1.2.7}$$

Para obtener el valor de los coeficientes indeterminados C_1 y C_2 de (E1.2.7) se debe recurrir a las condiciones de frontera (E1.2.1b) y (E1.2.1c). Como primer paso se obtiene la primera derivada de (E1.2.7):

$$\frac{du}{du}(x) = C_2 - \frac{p}{AE}x \tag{E1.2.8}$$

Con lo cual a partir de (E1.2.1b) se obtiene que:

$$C_2 = -\frac{F}{AE} \tag{E1.2.9}$$

Y el campo de desplazamiento, ahora es:

$$u(x) = C_1 - \frac{F}{AE}x - \frac{p}{2AE}x^2 \tag{E1.2.10}$$

Evaluando la condición de frontera (E1.2.1c) en (E1.2.7), se obtiene:

$$C_1 = \frac{FL}{AE} + \frac{pL^2}{2AE} \tag{E1.2.11}$$

Con lo cual , el campo de desplazamiento que da solución al P.V.F. (E1.2.1) es:

$$u(x) = \frac{FL}{AE}\left(1 - \frac{x}{L}\right) + \frac{pL^2}{2AE}\left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right] \qquad 0 < x < L \tag{E1.2.12}$$

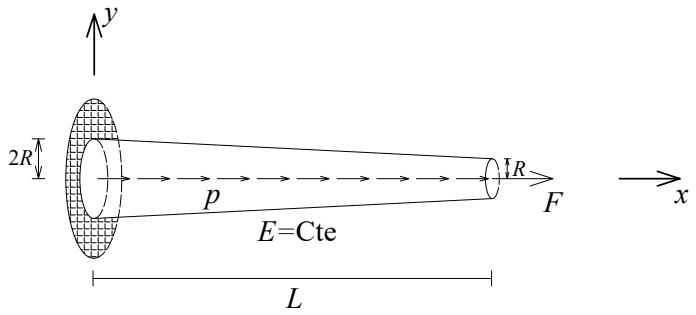
Desde el siguiente enlace puede descargarse el código de Python que resuelve este problema:

💻: `https://drive.google.com/file/d/11oriZs6vWZabBs6ci_rcnLZ8o-gHbl-P`

1.11.3. Ejemplo 3: barra de sección transversal variable sometida a fuerza externa distribuida constante

Para la barra de sección transversal variable, cuyo radio varía linealmente de $2R$ en $x = 0$ a R en $x = L$, es de material elástico lineal con módulo de elasticidad E y está sometida a la fuerza externa presentada en la figura E1.3.1, definir su problema de valor en la frontera gobernante y resolverlo.

Figura E1.3.1: *Barra circular de radio variable linealmente empotrada en su extremo izquierdo.*



Solución

Según el enunciado, el radio del elemento varia linealmente, y está definido por la siguiente función:

$$r(x) = R\left(2 - \frac{x}{L}\right) \qquad 0 < x < L \tag{E1.3.1}$$

Con lo cual, a partir de lo presentado en la ecuación (1.5.9), el problema de valor en la frontera gobernantes para este ejercicio es:

$$\pi E R^2 \frac{d}{dx}\left[\left(2 - \frac{x}{L}\right)^2 \frac{du}{dx}(x)\right] = -p \qquad 0 < x < L \tag{E1.3.2a}$$

$$u(0) = 0 \tag{E1.3.2b}$$

$$\frac{du}{dx}(L) = \frac{F}{\pi E R^2} \tag{E1.3.2c}$$

A continuación se resuelve el P.V.F. (E1.3.2) a partir de la integración directa de (E1.3.2a). Para comenzar se reescribe esta última como:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(2 - \frac{x}{L}\right)^2 \frac{du}{dx}(x)\right] = -\frac{p}{\pi E R^2} \tag{E1.3.3}$$

Ahora, integrando de forma indefinida a ambos lados de (E1.3.3), se obtiene:

$$\left(2 - \frac{x}{L}\right)^2 \frac{du}{dx}(x) = -\frac{p}{\pi E R^2} x + C_1 \tag{E1.3.4}$$

De lo cual se obtiene:

$$\frac{du}{dx}(x) = -\frac{p}{\pi E R^2} \frac{x}{\left(2 - \frac{x}{L}\right)^2} + \frac{C_1}{\left(2 - \frac{x}{L}\right)^2} \tag{E1.3.5}$$

Separando variables e integrando de forma indefinida a ambos lados de la ecuación diferencial (E1.3.5), se obtiene:

$$u(x) = -\frac{p}{\pi E R^2} \int \frac{x}{\left(2 - \frac{x}{L}\right)^2} dx + C_1 \int \frac{1}{\left(2 - \frac{x}{L}\right)^2} dx + C_2 \tag{E1.3.6}$$

Luego de realizar las integrales, se tiene como resultado:

$$u(x) = -\frac{pL^2}{\pi ER^2}\left[2\left(2-\frac{x}{L}\right)^{-1} + \ln\left(2-\frac{x}{L}\right)\right] + C_1 L\left(2-\frac{x}{L}\right)^{-1} + C_2 \tag{E1.3.7}$$

De evaluar las condiciones de frontera (E1.3.2b) y (E1.3.2c) en (E1.3.7), se obtienen respectivamente las siguientes dos ecuaciones lineales para C_1 y C_2:

$$-\frac{pL^2}{\pi ER^2}[1+\ln(2)] + C_1\frac{L}{2} + C_2 = 0 \tag{E1.3.8a}$$

$$-\frac{pL}{\pi ER^2} + C_1 = \frac{F}{\pi ER^2} \tag{E1.3.8b}$$

Cuya solución es:

$$C_1 = \frac{pL}{\pi ER^2} + \frac{F}{\pi ER^2} \tag{E1.3.9a}$$

$$C_2 = \frac{pL^2}{\pi ER^2}[1+\ln(2)] - \frac{L}{2}\left(\frac{pL}{\pi ER^2} + \frac{F}{\pi ER^2}\right) \tag{E1.3.9b}$$

Reemplazando los valores previamente calculados de C_1 y C_2 en (E1.3.7), se obtiene que el campo de desplazamientos solución del P.V.F. (E1.3.2) es:

$$u(x) = \frac{L}{2\pi ER}\left\{pL\left[1+2\ln(2)-2\left(2-\frac{x}{L}\right)^{-1} - 2\ln\left(2-\frac{x}{L}\right)\right] + F\left[-1+2\left(2-\frac{x}{L}\right)^{-1}\right]\right\} \qquad 0 < x < L \tag{E1.3.10}$$

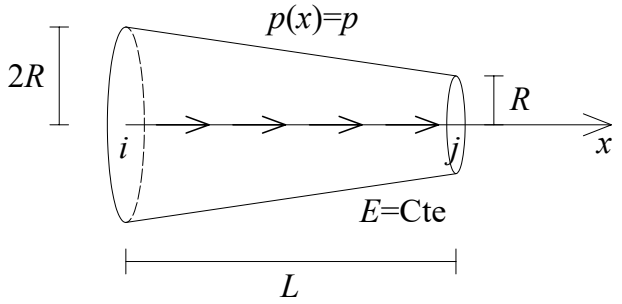
Desde el siguiente enlace puede descargarse el código de Python que resuelve este problema:

💻: `https://drive.google.com/file/d/1UkrT31ImZZNVdbkDSkswIMkFthIxz7dX`

1.11.4. Ejemplo 4: deducción del método de rigidez para una barra de sección transversal variable sometida a fuerza externa distribuida constante

Calcular la formulación exacta del método de rigidez (relación entre fuerzas en dirección x y desplazamientos en esta misma dirección en los extremos del elemento) del elemento presentado en la figura E1.4.1, para esto se nombra al extremo izquierdo del elemento como nodo i y al derecho como j.

Figura E1.4.1: *Elemento de longitud L, módulo de elasticidad constante E y cuyo radio de su sección transversal varía linealmente.*



Solución

La ecuación diferencial que gobierna a las barras de sección transversal variable se presenta en (1.5.9).

La función que define el radio de la sección transversal del elemento es:

$$r(x) = 2R - R\frac{x}{L} = R\left(2 - \frac{x}{L}\right) \qquad 0 < x < L \tag{E1.4.1}$$

A partir de lo cual se tiene que el área de la sección transversal es:

$$A(x) = \pi r(x)^2 = \pi R^2 \left(2 - \frac{x}{L}\right)^2 \qquad 0 < x < L \tag{E1.4.2}$$

El problema de valor en la frontera gobernante para la formulación exacta del método de rigidez para el elemento analizado es (ver el capítulo 7):

$$\pi E R^2 \frac{d}{dx}\left[\left(2 - \frac{x}{L}\right)^2 \frac{du}{dx}(x)\right] + p = 0 \qquad 0 < x < L \tag{E1.4.3a}$$

$$u(0) = u_i \tag{E1.4.3b}$$

$$u(L) = u_j \tag{E1.4.3c}$$

La ecuación diferencial (E1.4.3a) puede reescribirse como:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(2 - \frac{x}{L}\right)^2 \frac{du}{dx}(x)\right] = -\frac{p}{\pi E R^2} \tag{E1.4.4}$$

Integrando a ambos lados de (E1.4.4), se obtiene:

$$\left(2 - \frac{x}{L}\right)^2 \frac{du}{dx}(x) = -\frac{p}{\pi E R^2} x + \frac{C_1}{L} \tag{E1.4.5}$$

Expresión que puede reescribirse como:

$$\frac{du}{dx}(x) = -\frac{p}{\pi E R^2} \frac{x}{\left(2 - \frac{x}{L}\right)^2} + \frac{C_1}{L} \frac{1}{\left(2 - \frac{x}{L}\right)^2} \tag{E1.4.6}$$

Separando variables e integrando de forma indefinida a ambos lados de la ecuación (E1.4.6), se obtiene:

$$u(x) = -\frac{p}{\pi E R^2}\int \frac{x}{\left(2-\frac{x}{L}\right)^2}dx + \frac{C_1}{L}\int \frac{1}{\left(2-\frac{x}{L}\right)^2}dx \tag{E1.4.7}$$

Luego de realizar las integrales presentes se obtiene:

$$u(x) = -\frac{pL^2}{\pi E R^2}\left[\frac{2}{2-\frac{x}{L}} + \ln\left(2-\frac{x}{L}\right)\right] + C_1\frac{1}{2-\frac{x}{L}} + C_2 \tag{E1.4.8}$$

Donde se empleó:

$$\int \frac{1}{(x+a)^2}dx = -\frac{1}{x+a} + C \tag{E1.4.9a}$$

$$\int \frac{x}{(x+a)^2}dx = \frac{a}{x+a} + \ln|x+a| + C \tag{E1.4.9b}$$

De evaluar las condiciones de frontera (E1.4.3b) y (E1.4.3c) se obtiene, el siguiente sistema lineal de dos ecuaciones para C_1 y C_2:

$$\frac{C_1}{2} + C_2 = u_i + \frac{pL^2}{\pi E R^2}[1+\ln(2)] \tag{E1.4.10a}$$

$$C_1 + C_2 = u_j + 2\frac{pL^2}{\pi E R^2} \tag{E1.4.10b}$$

Cuya solución es:

$$C_1 = -2u_i + 2u_j + 2\frac{pL^2}{\pi E R^2}[1-\ln(2)] \tag{E1.4.11a}$$

$$C_2 = 2u_i - u_j + 2\frac{pL^2}{\pi E R^2}\ln(2) \tag{E1.4.11b}$$

Con lo que el campo de desplazamiento y su primera derivada (campo de deformaciones) son respectivamente:

$$u(x) = -\frac{pL^2}{\pi E R^2}\left[\frac{2}{2-\frac{x}{L}} + \ln\left(2-\frac{x}{L}\right)\right] + \left[-2u_i + 2u_j + 2\frac{pL^2}{\pi E R^2}[1-\ln(2)]\right]\frac{1}{2-\frac{x}{L}} + \left[2u_i - u_j + 2\frac{pL^2}{\pi E R^2}\ln(2)\right] \tag{E1.4.12}$$

$$\frac{du}{dx}(x) = \frac{1}{L\left(2-\frac{x}{L}\right)^2}\left\{-2u_i + 2u_j + \frac{pL^2}{\pi E R^2}\left[2 - 2\ln(2) - \frac{x}{L}\right]\right\} \tag{E1.4.13}$$

A partir de lo anterior, es posible calcular las fuerzas en los extremos del elemento en función de los desplazamientos en dichos puntos, como:

$$FX_i = -A(0)E\frac{du}{dx}(0) = 2\frac{\pi E R^2}{L}\left\{u_i - u_j - \frac{pL^2}{\pi E R^2}[1-\ln(2)]\right\} \tag{E1.4.14a}$$

$$FX_j = A(L)E\frac{du}{dx}(L) = 2\frac{\pi E R^2}{L}\left\{-u_i + u_j + \frac{pL^2}{\pi E R^2}\left[\frac{1}{2} - \ln(2)\right]\right\} \tag{E1.4.14b}$$

Ecuaciones que pueden expresarse matricialmente como:

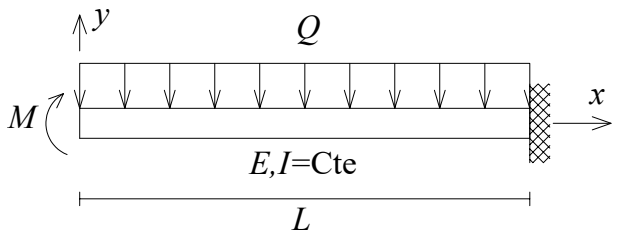
$$\begin{Bmatrix} FX_i \\ FX_j \end{Bmatrix} = \frac{2\pi E R^2}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} + pL\begin{Bmatrix} -2+2\ln(2) \\ 1-2\ln(2) \end{Bmatrix} \tag{E1.4.15}$$

Que corresponde a la formulación del método de rigidez de la barra de sección transversal presentada en el enunciado.

1.11.5. Ejemplo 5: viga en voladizo sometida a fuerza distribuida constante y un momento puntual 💻

Obtener y resolver el problema de valor en la frontera para la viga presentada en la figura E1.5.1.

Figura E1.5.1: *Problema a resolver.*



Solución

El problema de valor en la frontera gobernantes para esta viga es:

$$\frac{d^4v}{dx^4}(x) + \frac{Q}{EI} = 0 \qquad 0 < x < L \tag{E1.5.1a}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}(0) = \frac{M}{EI} \tag{E1.5.1b}$$

$$\frac{d^3v}{dx^3}(0) = 0 \tag{E1.5.1c}$$

$$v(L) = 0 \tag{E1.5.1d}$$

$$\frac{dv}{dx}(L) = 0 \tag{E1.5.1e}$$

La solución de la ecuación diferencial homogénea asociada con (E1.5.1a), es:

$$v_h(x) = C_1 + C_2\frac{x}{L} + C_3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + C_4\left(\frac{x}{L}\right)^3 \tag{E1.5.2}$$

Mientras que la solución particular asociada con (E1.5.1a), es de la forma:

$$v_p(x) = C_5\left(\frac{x}{L}\right)^4 \tag{E1.5.3}$$

De reemplazar (E1.5.3) en (E1.5.1a) se obtiene:

$$C_5 = -\frac{QL^4}{24EI} \tag{E1.5.4}$$

Con lo cual la solución particular es:

$$v_p(x) = -\frac{QL^4}{24EI}\left(\frac{x}{L}\right)^4 \tag{E1.5.5}$$

De esta forma, se tiene que la solución general de la ecuación diferencial (E1.5.1a), es:

$$v(x) = v_h(x) + v_p(x) = C_1 + C_2\frac{x}{L} + C_3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + C_4\left(\frac{x}{L}\right)^3 - \frac{QL^4}{24EI}\left(\frac{x}{L}\right)^4 \tag{E1.5.6}$$

Cuyas tres primeras derivadas corresponden a:

$$\frac{dv}{dx}(x) = \frac{C_2}{L} + 2\frac{C_3}{L}\frac{x}{L} + 3\frac{C_4}{L}\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{QL^3}{6EI}\left(\frac{x}{L}\right)^3 \tag{E1.5.7a}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}(x) = 2\frac{C_3}{L^2} + 6\frac{C_4}{L^2}\frac{x}{L} - \frac{QL^2}{2EI}\left(\frac{x}{L}\right)^2 \tag{E1.5.7b}$$

$$\frac{d^3v}{dx^3}(x) = 6\frac{C_4}{L^3} - \frac{QL}{EI}\frac{x}{L} \tag{E1.5.7c}$$

De evaluar las condiciones de frontera (E1.5.1a) y (E1.5.1b) se obtiene respectivamente:

$$C_3 = \frac{ML^2}{2EI} \tag{E1.5.8a}$$

$$C_4 = 0 \tag{E1.5.8b}$$

Empleando los valores obtenidos en (E1.5.8), el valor de C_2 que hace cumplir la condición (E1.5.1e) es:

$$C_2 = \frac{QL^4}{6EI} - \frac{ML^2}{EI} \tag{E1.5.9}$$

Ahora, evaluando (E1.5.1e) y empleando las ecuaciones (E1.5.8) y (E1.5.9), se obtiene:

$$C_1 = -\frac{QL^4}{8EI} + \frac{ML^2}{2EI} \tag{E1.5.10}$$

Por lo que, luego de reemplazar los valores de C_1, C_2, C_3 y C_4 en (E1.5.6), se obtiene que el campo de desplazamiento es:

$$v(x) = \frac{QL^4}{24EI}\left[-3 + 4\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^4\right] + \frac{ML^2}{EI}\left[\frac{1}{2} - \frac{x}{L} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right] \qquad 0 < x < L \tag{E1.5.11}$$

A partir del cual es posible obtener los campos de rotación, momento flector y fuerza cortante:

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx}(x) = \frac{QL^3}{6EI}\left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right] + \frac{ML}{EI}\left(-1 + \frac{x}{L}\right) \qquad 0 < x < L \tag{E1.5.12a}$$

$$M(x) = EI\frac{d^2v}{dx^2}(x) = -\frac{QL^2}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{M}{EI} \qquad 0 < x < L \tag{E1.5.12b}$$

$$V(x) = -EI\frac{d^3v}{dx^3}(x) = QL\frac{x}{L} \qquad 0 < x < L \tag{E1.5.12c}$$

Desde el siguiente enlace puede descargarse el código de Python que resuelve este problema:

💻: `https://drive.google.com/file/d/1Zdb20fL0pDu0Da9jM1bSmR-zzpIKfnzh`