

TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE

Cours et exercices corrigés

Yves Félix

Professeur à l'université libre de Louvain

Daniel Tanré

Professeur à l'université de Lille 1

DUNOD

Illustration de couverture :
© Christopher Ursitti - Fotolia.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2010
ISBN 978-2-10-055642-7

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

AVANT-PROPOS	IX
PRINCIPALES NOTATIONS UTILISÉES	XV
CHAPITRE 1 • LE GROUPE DE POINCARÉ	1
1.1 Homotopie	1
1.2 Groupe fondamental	5
1.3 Groupe fondamental du cercle	11
1.4 Applications de $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$	16
1.5 Groupe fondamental des sphères S^n pour $n \geq 2$	19
1.6 Expressions analytiques du degré d'un lacet	20
EXERCICES	24
SOLUTION DES EXERCICES	27
CHAPITRE 2 • CONSTRUCTIONS D'ESPACES	31
2.1 Topologie quotient	31
2.2 Espaces cellulaires	34
2.3 Actions de groupes	38
2.4 Surfaces	44
EXERCICES	57
SOLUTION DES EXERCICES	59

CHAPITRE 3 • LE THÉORÈME DE SEIFERT ET VAN KAMPEN	65
3.1 Produits libres et sommes amalgamées de groupes	65
3.2 Théorème de Seifert et Van Kampen	69
3.3 Groupe fondamental d'un bouquet d'espaces	72
3.4 Groupe fondamental et attachement d'une cellule	74
EXERCICES	78
SOLUTION DES EXERCICES	80
CHAPITRE 4 • REVÊTEMENTS	85
4.1 Définitions	85
4.2 Relèvements d'applications	87
4.3 Constructions de revêtements par actions de groupes	92
4.4 Groupe fondamental et monodromie	96
4.5 Revêtements galoisiens	99
4.6 Groupe des automorphismes d'un revêtement	103
4.7 Revêtement universel et réalisation d'une classe de conjugaison	105
EXERCICES	110
SOLUTION DES EXERCICES	114
CHAPITRE 5 • LE MONDE DES COMPLEXES DE CHÂÎNES	121
5.1 Complexes de chaînes	122
5.2 Complexes simpliciaux. Homologie simpliciale	129
5.3 Homologie singulière d'un espace topologique	134
5.4 Théorème des coefficients universels	141
EXERCICES	150
SOLUTION DES EXERCICES	154
CHAPITRE 6 • L'HOMOLOGIE SINGULIÈRE ET SES APPLICATIONS	159
6.1 Homologie relative	160

6.2	Théorèmes d'excision	162
6.3	Homologie singulière et homologie simpliciale	167
6.4	Applications des théorèmes d'excision	169
6.5	Homologie cellulaire	175
6.6	Le transfert et ses applications	180
6.7	Le théorème de Brouwer et ses applications.....	184
	EXERCICES	188
	SOLUTION DES EXERCICES	191
CHAPITRE 7 •	HOMOLOGIE ET HOMOTOPIE	197
7.1	Groupe fondamental et premier groupe d'homologie	197
7.2	Groupes d'homotopie d'ordre supérieur	200
7.3	Fibrations – Fibrés localement triviaux.....	203
7.4	Suite exacte longue d'homotopie d'une fibration.....	210
7.5	Quelques résultats sans démonstration	214
7.6	Choix social ou moyenne	216
7.7	Produits symétriques et configurations.....	218
ANNEXE A •	UN PEU DE TOPOLOGIE GÉNÉRALE	221
	EXERCICES	222
	SOLUTION DES EXERCICES	225
	BIBLIOGRAPHIE	229
	LISTE DES FIGURES	233
	INDEX	235

Avant-Propos

Savez-vous,

- que, sur la Terre, il existe toujours deux lieux antipodaux ayant même température et même altitude ?
- que si l'on essaie de recouvrir le globe terrestre par 3 fermés, on ne peut éviter que l'un d'entre eux contienne deux points antipodaux ?
- que la plupart des jeux admettent une position d'équilibre dans laquelle aucun des joueurs n'a intérêt à changer sa stratégie ?
- que l'on ne peut peigner une boule de billard chevelue sans éviter un "tourbillon" ?
- qu'il n'existe que cinq polyèdres réguliers en dimension 3 ?
- que si l'on veut recouvrir complètement une chambre à air par des rustines en forme de triangles, il faudra au moins 7 sommets ?

Avec la diversité d'un tel inventaire, on peut imaginer que les preuves font intervenir plusieurs domaines mathématiques mais il n'en est rien. Ces propriétés se démontrent facilement avec les méthodes de ce qui est appelée la Topologie Algébrique et nous le faisons dans ce livre. Appelée parfois la science du caoutchouc, la Topologie Algébrique identifie des objets que l'on peut déformer continûment (sans rupture) de l'un vers l'autre. Bien sûr, avec de telles méthodes, la taille n'importe plus. On ne peut cependant pas identifier tout et c'est souvent le fait que deux objets ne sont pas déformables l'un sur l'autre qui constitue l'information importante. Par exemple, on peut déformer un triangle sur un disque mais, comme on le verra assez vite, on ne peut déformer un pneu sur un globe. Plus formellement, il s'agit d'une identification d'objets par ce que l'on appelle une relation d'équivalence. Comme lorsque l'on considère le modulo 2 d'un nombre entier, et que l'on identifie ainsi tous les nombres pairs entre eux et tous les nombres impairs entre eux, ne voyant plus que deux éléments. Il ne subsiste ainsi qu'une information partielle pour chaque nombre, cette dernière s'avérant plus facile d'utilisation et quelquefois suffisante pour résoudre un problème particulier.

Cette démarche d'identification s'applique aussi bien aux ensembles qu'aux nombres. Par exemple, on peut identifier deux ensembles X et Y s'il existe une

bijection entre eux. Lorsque ces ensembles sont munis d'une structure additionnelle, l'identification requiert l'existence d'une bijection compatible avec la structure étudiée :

- pour des espaces topologiques, on impose l'existence d'un homéomorphisme,
- pour des variétés différentiables (plus simplement pour des ouverts de $\mathbb{R}^n$), l'identification est la notion de difféomorphisme.

La structure additionnelle modifie profondément les classes d'isomorphismes. Par exemple,

- on peut montrer que les ensembles $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ sont en bijection, pour tout $n \geq 1$ et tout $p \geq 1$,
- si l'on considère deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ respectivement, reliés par un difféomorphisme $f: U \rightarrow V$, alors l'approximation linéaire, $df: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, est un isomorphisme linéaire, donc on a obligatoirement $n = p$.

Avec l'une des structures, on identifie tous les espaces $\mathbb{R}^n$ entre eux, avec l'autre on en identifie aucun. Qu'en est-il pour les *espaces topologiques* $\mathbb{R}^n$? Peut-on avoir $\mathbb{R}^n$ homéomorphe à $\mathbb{R}^p$ avec $n \neq p$? Abordons cette question par des exemples simples :

- pour $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$, la réponse est non : si $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une application continue, on choisit un point quelconque $a \in \mathbb{R}$ et on considère la restriction $\varphi_a: \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{\varphi(a)\}$ de φ . Si φ est un homéomorphisme, il en est de même pour φ_a , ce qui est impossible car $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ n'est pas connexe alors que $\mathbb{R}^2 \setminus \{\varphi(a)\}$ l'est.
- pour $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ un raisonnement identique ne fonctionne pas car $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ et $\mathbb{R}^3 \setminus \{\varphi(a)\}$ sont tous les deux connexes. On pourrait envisager d'étudier l'image de $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ où Δ est une droite mais l'image d'une droite par une application continue n'est généralement pas une droite et on perd la possibilité d'argumenter comme ci-dessus.

Restons donc avec les espaces privés d'un point. Fixons un point $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ et un point $y_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\varphi(a)\}$. Par définition, un lacet d'origine x_0 est un chemin continu de source et but le point x_0 . Considérons un tel lacet entourant le point a . En tirant sur les extrémités du lacet, il est impossible de ramener toute la boucle sur le point x_0 sans passer par le point a , tout en restant dans le plan $\mathbb{R}^2$. Par contre, dans $\mathbb{R}^3$ il est possible de ramener cette boucle en x_0 tout en évitant le point $\varphi(a)$. Dans les chapitres 1 et 3, nous formalisons cette idée et donnons une démonstration précise du fait que $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^3$. Pour cela, nous sommes amenés à introduire deux notions :

- la déformation continue d'applications continues,
- les lacets d'origine un point.

L'ensemble des lacets, étudiés à déformation continue près, constitue un groupe appelé *groupe fondamental* ou *groupe de Poincaré* (1895) et noté $\pi_1(X)$. Il est le premier objet d'intérêt de ce cours qui s'articule ainsi.

Le *Chapitre 1* est essentiellement consacré à la preuve que le groupe fondamental du cercle est égal au groupe additif des entiers, $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. De ce résultat, nous pouvons déjà déduire plusieurs conséquences :

- une preuve courte du *théorème de D'Alembert* ;
- le *théorème de Brouwer* : toute application continue du disque de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même a un point fixe ;
- le *théorème de Borsuk-Ulam* : pour toute application continue f de la sphère S^2 dans le plan $\mathbb{R}^2$, il existe un point $x \in S^2$ tel que $f(x) = f(-x)$. De façon plus imagée : il existe toujours sur la Terre deux points antipodaux ayant même altitude et même température ;
- le *théorème de Lusternik-Schnirelmann* : si la sphère S^2 est recouverte par 3 ensembles fermés, alors l'un d'entre eux contient des points antipodaux ;
- le *théorème de la dimension* : un ouvert de $\mathbb{R}^2$ n'est jamais homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, pour $n \neq 2$.

Le *Chapitre 2* est un chapitre de Topologie Générale. Partant des résultats connus des années antérieures, nous introduisons la notion de topologie quotient et d'action de groupe sur un espace topologique. Le but est d'enrichir notre herbier d'espaces et d'obtenir les outils nécessaires à leur étude. Dans ce chapitre, est introduite aussi la notion de surface, définie intuitivement comme un objet à deux dimensions. Nous présentons leur classification en montrant que les surfaces orientables compactes et sans bord sont, à homéomorphisme près, la sphère S^2 , le tore T , le tore à 2 trous T_2 , etc. À ce moment du cours, nous ne pouvons pas montrer que deux quelconques de ces objets ne sont pas homéomorphes. Pour cela, nous avons besoin de savoir calculer leur groupe fondamental. C'est le théorème de Seifert et Van Kampen introduit au *Chapitre 3* qui nous permet de le faire. Ce Chapitre 3 comporte quelques difficultés d'ordre algébrique, comme la définition d'un groupe par générateurs et relations, mais, une fois celles-ci levées, nous pouvons déterminer le groupe fondamental des surfaces et terminer leur classification commencée au chapitre précédent.

Le calcul de $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ mené au Chapitre 1 s'est effectué à partir des propriétés de l'application exponentielle de $\mathbb{R}$ dans S^1 . Dans le *Chapitre 4*, nous synthétisons ces propriétés pour en tirer la notion de *revêtement*. Un revêtement est une application continue, $p: E \rightarrow B$, telle que tout point de B admet un voisinage V vérifiant la propriété suivante : en imaginant V sous la forme d'une assiette, l'image réciproque de V est une pile d'assiettes identiques à V . L'espace B est appelé la base, E l'espace total et l'ensemble des points de E envoyés par p sur un point $x \in B$ donné, la

fibre au-dessus de x . Une particularité remarquable des revêtements est que la propriété topologique d'existence du relèvement d'une application est équivalente à une propriété algébrique :

plus précisément, si on se donne un revêtement p et une application continue φ , comme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \tilde{\varphi} & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{\varphi} & X, \end{array}$$

il existe une application continue $\tilde{\varphi}$ telle que $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$ si, et seulement si, on a $\varphi_* \pi_1(Y) \subset p_* \pi_1(\tilde{X})$, où φ_* et p_* sont les applications induites par φ et p entre les groupes fondamentaux. Nous démontrons l'existence de nombreux exemples de revêtements à partir de l'action d'un groupe G sur un espace topologique E . Une question naturelle est alors de savoir si tous les revêtements s'obtiennent de cette façon et, une nouvelle fois, nous avons un problème topologique dont la réponse est une caractérisation algébrique, à savoir :

un revêtement $p: E \rightarrow X$ s'obtient comme quotient de E sous l'action d'un groupe si, et seulement si, $p_* \pi_1(E)$ est un sous-groupe distingué de $\pi_1(X)$. Un tel revêtement est dit galoisien.

Dans un revêtement, deux groupes interagissent, le groupe fondamental $\pi_1(B, x)$, qui permute les éléments de la fibre au-dessus de x , et le groupe des automorphismes du revêtement, qui permute les assiettes dans les piles. Nous étudions en détail cette interaction, en distinguant le cas galoisien, d'un abord assez facile, du cas général, qui fait l'objet de la Section 4.6. Terminons la présentation de ce chapitre clé, en mentionnant que le groupe fondamental sert également à classifier les revêtements, cf. Théorème 4.18, et que la dernière section explicite la classification des revêtements dont le groupe fondamental de la base est finiment présenté, avec l'exemple du nœud de trèfle complètement détaillé lorsque la pile comporte 3 assiettes.

Après ce tour d'horizon du groupe fondamental et de ses implications dans divers problèmes, nous revenons aux applications du calcul de $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ présentées dans le Chapitre 1. Pour y éliminer les restrictions de dimension, il nous faut utiliser des structures de dimensions supérieures, comme les triangles ou les tétraèdres. C'est ce que nous faisons avec *l'homologie* qui constitue la deuxième partie de ce livre. En fait, nous avons, non pas un groupe, mais une famille de groupes abéliens, constitués de sommes formelles de points, de chemins, de triangles dans lesquelles on identifie les points qui sont les extrémités d'un chemin, les sommes de chemins qui sont le bord d'un triangle, les sommes de triangles qui sont les faces d'un tétraèdre, etc. Ces groupes se révèlent plus faciles à déterminer que le groupe fondamental et aussi plus faciles à utiliser mais, au départ, ils présentent le paradoxe d'être plus difficiles à introduire car ils nécessitent la formalisation de ces sommes d'objets géométriques. Ce sont

les *complexes de chaînes* étudiés au *Chapitre 5*. Nous y développons les techniques nécessaires, en particulier les suites exactes, à la base de la plupart des résultats, et présentons deux complexes de chaînes, le complexe des chaînes simpliciales d'un complexe simplicial et celui des chaînes singulières d'un espace topologique. Les divers complexes étudiés sont définis sur des familles de R -modules, où R est un anneau commutatif. La possibilité de changer l'anneau de référence s'avère très utile et l'anneau $\mathbb{Z}$ y joue un rôle central, permettant de retrouver tous les autres, à travers le théorème des coefficients universels, présenté dans la dernière section.

Au *Chapitre 6*, nous reprenons l'étude de l'homologie singulière introduite au chapitre précédent. Le premier résultat important est le Théorème d'excision ; avec lui, on peut calculer l'homologie d'un espace en en "excisant" une partie, ce qui s'avère très efficace, comme le montre le calcul des groupes d'homologie des sphères. Un deuxième résultat très pratique est l'existence d'une suite exacte longue, dite de Mayer-Vietoris, qui tire profit de l'existence d'un recouvrement par deux ouverts. Ce chapitre comporte également l'identification des homologies simpliciale et singulière associées à un complexe simplicial, et l'introduction d'un nouveau complexe de chaînes issu de la structure cellulaire de certains espaces. Nous montrons également comment une application "transfert" permet de connecter les homologies de l'espace total et de la base d'un revêtement et l'utilisons pour l'homologie, à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, des espaces projectifs réels. Une fois ces prémices mises en place, nous pouvons reprendre les théorèmes du Chapitre 1 et les étendre à une dimension quelconque. Parmi les applications non topologiques de ces résultats, mentionnons les liens étroits entre les équilibres de la théorie des jeux et le théorème du point fixe de Brouwer ; ce sont les équilibres de Nash présentés dans la Section 6.7.

À ce stade, nous disposons d'un côté du groupe fondamental et de l'autre d'une famille de groupes d'homologie mais n'avons pas établi de liens entre eux. Dans le *Chapitre 7*, nous montrons que le premier groupe d'homologie est l'abélianisé du groupe fondamental et nous étendons la construction du groupe fondamental pour obtenir les groupes d'homotopie d'ordre supérieur, dont les éléments sont les classes d'homotopie relative d'applications continues pointées de S^n dans X . Ces groupes contiennent de nombreuses informations mais sont en général très difficiles à calculer. Dans ce Chapitre 7, nous mettons en place les éléments de base de la théorie et leurs interactions, groupes d'homotopie, fibrés localement triviaux, fibrations. Nous présentons ensuite, sans démonstration, quelques résultats fondamentaux, en renvoyant pour les preuves vers des ouvrages plus avancés. Nous terminons par deux thèmes, l'un extérieur à la Topologie montre comment la question de l'existence d'un choix social dans une société fait intervenir le type d'homotopie de l'espace des choix possibles. Le deuxième ouvre une fenêtre sur les espaces de configurations, à la lisière de la Topologie et de la Géométrie.

Ce livre peut être utilisé dans sa totalité pour un enseignement annuel de Topologie algébrique mais il s'adapte très bien à des enseignements semestriels en offrant plusieurs possibilités : un cours classique sur la théorie des revêtements, tel qu'il figure dans la plupart des premières années de Master, constitué des 4 premiers chapitres et de leurs exercices, ou un cours d'introduction à l'homologie, comprenant les deux premiers chapitres et les trois derniers. Il peut également être utilisé pour une présentation équilibrée de l'homologie et de l'homotopie, à partir des 6 premiers chapitres, en limitant le Chapitre 4 à ses premières sections.

La bibliographie est exceptionnellement longue car, en plusieurs endroits, dans le cours lui-même ou au détour d'un exercice, nous avons abordé un possible développement et avons offert au lecteur la possibilité de poursuivre dans cette voie, en consultant les références recommandées. Il est important de noter que certains articles du milieu du vingtième siècle ont apporté une solution non triviale à des problèmes ouverts et sont accessibles aux lecteurs de ce livre. Mentionnons en particulier,

- l'article de J.E. Connett [12] sur les applications périodiques du cercle, dont nous avons extrait les Exercices 4.4, 4.5 et 4.6,
- l'article de S. Kakutani [25] dont la preuve est proposée en exercice et qui a ouvert des développements comme [46],
- le célèbre résultat de J. Nash, [33], et la synthèse écrite par D. Gale, [19], avec l'exemple du jeu de Hex.

Quant aux divers livres figurant dans cette bibliographie, signalons ceux de E.H. Spanier [43], (un magnifique ouvrage de référence), de C. Godbillon, [20], (pour une présentation en français, avec une preuve du Théorème de Seifert et Van Kampen utilisant la théorie des revêtements, ainsi qu'une introduction à la cohomologie des variétés différentiables), de G.E. Bredon, [9], (avec une présentation très ouverte vers la géométrie des variétés) ou de A. Hatcher, [22], dont les chapitres 3 et 4 constituent une suite attrayante pour le lecteur désireux de poursuivre son apprentissage de la Topologie Algébrique. Nous n'avons pas présenté d'aspect historique des notions introduites, le livre de J. Dieudonné, [13], y suppléant de façon exhaustive.