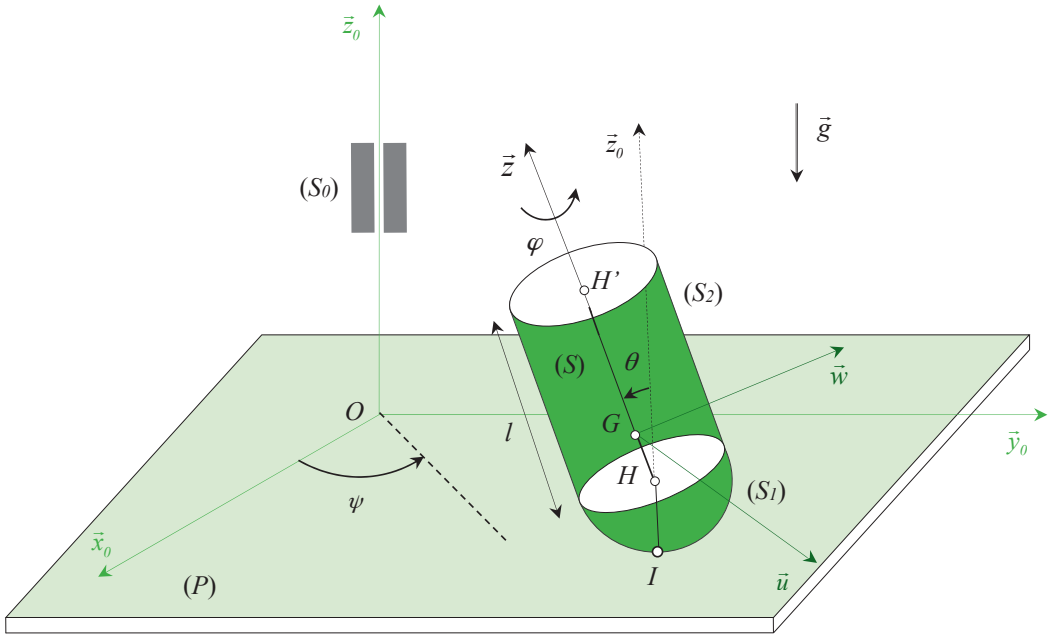
ENSEIGNEMENT SUP PHYSIQUE

Licence
Prépas
Agrégation



Rachid Mesrar
Brahim Amghar

MÉCANIQUE
ANALYTIQUE DE LAGRANGE

Cours et recueils d'examens corrigés

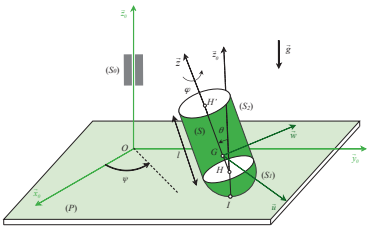
edp sciences

ENSEIGNEMENT SUP PHYSIQUE

Licence – Classes préparatoires – Agrégation

Rachid Mesrar, Brahim Amghar

La collection « Enseignement Sup Physique » se présente comme une introduction sur des sujets incontournables en physique. Adaptée aux besoins des étudiants et des chercheurs, le traitement rigoureux, mais accessible, de chaque sujet est idéal pour ceux qui veulent une amorce dans un sujet donné pour les préparer à une étude ou à une recherche plus avancée.



Cet ouvrage s'organise en deux parties distinctes. La première, dédiée aux notes de cours, présente un principe incontournable de la mécanique analytique : le principe des puissances virtuelles. Ce principe, et les équations de Lagrange qui en découlent, forment les bases essentielles de la mécanique lagrangienne. Pour rendre ces concepts accessibles, le texte s'enrichit d'applications concrètes, d'exemples variés et de conseils méthodologiques, offrant ainsi une approche à la fois rigoureuse et pédagogique.

La seconde partie rassemble une sélection de problèmes résolus, dont une grande partie est originale. Structurés en trois recueils de cinq problèmes chacun, ces exercices permettent une progression adaptée : des sujets simples pour débuter, des cas plus ardus pour approfondir, et enfin des problèmes type examen pour consolider la maîtrise des équations de Lagrange. Un outil idéal pour apprendre et s'exercer en mécanique analytique.

Rachid Mesrar *est professeur de l'enseignement supérieur (spécialité mécanique) à la faculté des sciences d'Agadir. Il est titulaire de deux doctorats : un doctorat de l'Université de Metz en sciences de l'ingénieur et un doctorat d'État ès science physique de l'Université Ibn Zohr d'Agadir. Il est aussi l'auteur de plusieurs ouvrages consacrés à la mécanique.*

Brahim Amghar *est maître de conférences (spécialité physique théorique) à la faculté des sciences d'El Jadida, Université Chouaïb Doukkali. Il est titulaire d'un master en information et cryptographie quantique et d'un doctorat en physique mathématique de l'Université Mohammed V de Rabat. Par ailleurs, ses travaux de recherche portent sur les aspects géométriques et dynamiques des corrélations quantiques.*

ISBN : 978-2-7598-3865-3

9 782759 838653

edp sciences
www.edpsciences.org

Rachid Mesrar
Brahim Amghar

Mécanique analytique de Lagrange

Cours et recueils d'examens corrigés

edp sciences

Dans la même collection

Hydrodynamique – Problèmes corrigés, Stéphane Leblanc, 978-2-7598-0525-9 (2010)

Comprendre la mécanique, Jean-Pierre Romagnan, 978-2-7598-0661-4 (2012)

Physique expérimentale – Optique, magnétisme, électrotechnique, mécanique, thermodynamique et physique non linéaire, Jolidon, 978-2-7598-2364-2 (2021)

Mécanique classique - Cours et exercices corrigés – T1 : Lois de Newton, énergie, statique, gravitation, Alain Colin de Verdière, Souren Pogossian, 978-2-7598-2665-0 (2022)

Mécanique classique - Cours et exercices corrigés – T2 : Repères non inertiels, fluides, thermodynamique, capillarité, introduction à la théorie du chaos, Alain Colin de Verdière, Souren Pogossian, 978-2-7598-2671-1 (2022)

Mécanique du solide indéformable – T1 : Les torseurs, Rachid Mesrar, Brahim Amghar, 978-2-7598-3637-6 (2025)

Mécanique du solide indéformable – T2 : La cinématique du solide, Rachid Mesrar, Brahim Amghar, 978-2-7598-3642-0 (2025)

Mécanique du solide indéformable – T3 : La géométrie des masses, Rachid Mesrar, Brahim Amghar, 978-2-7598-3645-1 (2025)

Mécanique du solide indéformable – T4 : La cinétique du solide, Rachid Mesrar, Brahim Amghar, 978-2-7598-3648-2 (2025)

Mécanique du solide indéformable – T5 : La dynamique du solide, Rachid Mesrar, Brahim Amghar, 978-2-7598-3651-2 (2025)

Retrouvez tous nos ouvrages et nos collections sur
https://laboutique.edpsciences.fr

Illustration de couverture : Culbuto, jouet dont la base est lestée de sorte que s'il est renversé il se redresse toujours et revient à la verticale en oscillant.

Imprimé en France

ISBN (papier) : 978-2-7598-3865-3 - ISBN (ebook) : 978-2-7598-3866-0

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays. La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (alinéa 1er de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du code pénal.

© EDP Sciences, 2026
17 avenue du Hoggar – BP 112 – PA de Courtabœuf – 91944 Les Ulis Cedex A

« On a déjà plusieurs traités de mécanique, mais le plan de celui-ci est entièrement neuf. Je me suis proposé de réduire cette science, et l'art de résoudre les problèmes qui s'y rapportent, à des formules générales, dont le simple développement donne toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problème. J'espère que la manière dont j'ai tâché de remplir cet objet, ne laissera rien à désirer. »

Joseph Louis de Lagrange (1736-1813), Mécanique analytique, Paris, 1788.



Avant-propos

La mécanique analytique, initiée dès le xviiie siècle par les pionniers Lagrange et Hamilton, est strictement équivalente à la mécanique classique de Newton. Cependant elle présente deux particularités : la première est d'être conçue à partir de grandeurs scalaires (les énergies) et la deuxième est que les équations du mouvement sont invariantes dans un changement de coordonnées. Elle est considérée comme une formulation duale de la mécanique classique et joue un rôle central en mécanique quantique et en théorie des champs. Bref il s'agit d'un formalisme bien adapté au calcul analytique et fondé sur deux principes cardinaux : le principe de moindre action et le principe des puissances virtuelles. Le premier on le doit aux pères fondateurs précités, alors que la paternité du second revient à d'Alembert. Il convient de préciser que les calculs d'usage en mécanique analytique sont algébriques, donc programmables. Ce qui explique son grand succès dans l'étude des systèmes complexes comportant un grand nombre de paramètres. C'est le cas, par exemple, des systèmes non linéaires et des régimes chaotiques hamiltoniens.

L'objectif principal du présent ouvrage est de fournir au lecteur les notions de base et les rudiments de la mécanique analytique. Tout d'abord il faut préciser que l'idée principale de la mécanique lagrangienne est d'éliminer les forces inconnues de liaison et de ne décrire le système que par des coordonnées indépendantes. Ces coordonnées portent le nom de « coordonnées généralisées ». Elles sont arbitraires et peuvent représenter indifféremment une longueur, un angle, etc. Néanmoins, ces coordonnées sont suffisantes pour décrire de manière univoque et intrinsèque l'évolution d'un système si l'on tient compte des contraintes.

En mécanique analytique, on s'intéresse souvent aux symétries des problèmes et aux quantités conservées qui leur sont associées. Les lois de conservation de l'énergie, de l'impulsion et du moment cinétique sont déduites de l'homogénéité du temps, de l'homogénéité et de l'isotropie de l'espace. Cette corrélation invariance/lois de conservation a été mise en évidence par une mathématicienne allemande du nom

d'Emmy Noether. Elle est la première à avoir mis en lumière la dialectique existante entre les symétries éventuelles et les lois de conservation d'une grandeur physique. Le fameux « théorème de Noether » que nous a légué cette jeune prodige est l'un des théorèmes les plus puissants de la physique moderne. Il joue un rôle central en théorie des champs quantiques et fut qualifié par Einstein de « monument de la pensée mathématique ».

Un second objectif de l'ouvrage est de mettre en exergue les subtilités de la mécanique analytique et d'aider le lecteur à maîtriser la technique d'obtention systématique des équations de Lagrange, afin d'exploiter pleinement le potentiel qu'offre cette belle théorie.

L'ouvrage se compose de deux parties : la première partie, consacrée aux notes de cours, aborde un principe incontournable en mécanique analytique : le principe des puissances virtuelles. Ce dernier et les équations de Lagrange qui en découlent, constituent le socle de la mécanique lagrangienne. Ces notes sont truffées d'applications pédagogiques, d'exemples génériques et de conseils méthodologiques, et ce, afin de les simplifier et de les rendre plus didactiques. Le chapitre 1 aborde la notion clé de paramétrage car en mécanique analytique, pour un même problème, on peut avoir plusieurs paramétrages et les équations du mouvement qui en découlent seront différentes selon le paramétrage choisi. Le chapitre 2 introduit une notion, qui n'existe pas en mécanique de Newton, et qui est plutôt « abstraite », c'est la notion de « vitesse virtuelle ». Cette notion constitue la pierre angulaire du principe des puissances virtuelles qui fait l'objet du chapitre 3. Alors que le principe fondamental de la dynamique fait appel à des grandeurs vectorielles (forces et accélération), le principe des puissances virtuelles s'énonce en termes de puissances qui sont des grandeurs scalaires. Le chapitre 4 est un corolaire du chapitre 3. Nous y exposons la méthodologie à suivre pour obtenir les équations de Lagrange à partir du principe des puissances virtuelles. À cette fin, on fait appel à la notion de « champ de vitesses virtuelles ». Le chapitre 5 met la lumière sur les intégrales premières du mouvement. On distingue deux types d'intégrales premières : les intégrales premières linéaires (intégrale première cinétique et intégrale première de Jacobi) et les intégrales premières quadratiques (intégrale première de l'énergie cinétique et intégrale première de Painlevé). Enfin pour boucler la boucle, le chapitre 6 traite des problèmes d'équilibre et de stabilité. Deux approches sont envisagées : l'approche directe symbolisée par le théorème de Lejeune-Dirichlet et l'approche indirecte incarnée par le théorème de Liapunov.

La deuxième partie de cet ouvrage est une anthologie de sujets d'examens corrigés. Ces sujets, dont une bonne partie est originale, sont répartis et structurés en trois recueils de cinq épreuves chacun : le premier recueil regroupe des sujets relativement simples. Le deuxième recueil regroupe des sujets plus ardus, nécessitant plus de réflexion. Quant au troisième, c'est un florilège de sujets types permettant à l'étudiant d'aller plus loin dans l'exploration de cette science et de maîtriser la technique de résolution par la méthode de Lagrange.

Cet ouvrage est destiné aux lecteurs connaissant déjà la mécanique des solides rigides. De nombreux livres, dont certains sont excellents, sont basés sur cette approche (voir références bibliographiques). En revanche, la littérature francophone sur les formulations de Lagrange et de Hamilton laisse à désirer ! Nous espérons que le présent ouvrage contribuera, tant soit peu, à combler cette lacune.

Le livre s'adresse aux étudiants de licence, de master ou des écoles d'ingénieurs qui s'intéressent à une étude approfondie de la mécanique analytique, ainsi qu'aux ingénieurs et à toute personne désireuse d'acquérir des bases solides dans cette discipline. Espérons que cet ouvrage apporte une aide précieuse et un outil indispensable de travail aux étudiants et aux candidats qui désirent entreprendre une préparation sérieuse aux concours de CAPES et d'agrégation de mécanique. Nous souhaitons à tout le monde, élèves, étudiants, professeurs et candidats aux concours, de tirer le meilleur profit de ce livre.

Les auteurs

Table des matières

Avant-propos **3**

Partie A : notes de cours **11**

1 Paramétrage et liaisons **13**
1.1 Paramétrage d'un système matériel 15
1.1.1 Cas d'un point matériel 15
1.1.2 Cas d'un solide rigide 16
1.1.3 Cas d'un système matériel (Σ) 17
1.1.4 Définitions 17
1.2 Liaisons 18
1.2.1 Paramétrage strict-Paramétrage surabondant 19
1.2.2 Liaisons holonome, non holonome et semi-holonome 21
1.2.3 Liaison bilatérale-Liaison unilatérale 24
1.2.4 Liaison indépendante du temps-Liaison dépendante du temps 25
1.2.5 Liaison principale-Liaison complémentaire 25
1.2.6 Nombre de degrés de liberté 26
Planche de synthèse 34
Diagramme synoptique 36

2 Vitesses réelles et vitesses virtuelles **37**
2.1 Champ de vitesses réelles 38
2.2 Champ de vitesses virtuelles 39
2.2.1 Définition 39
2.2.2 Expression du CVV 40
2.3 Champ de vitesses virtuelles compatible avec une liaison 44
2.3.1 Système matériel (Σ) soumis à une liaison holonome 45
2.3.2 Système matériel (Σ) soumis à une liaison non holonome . . 50

Planche de synthèse 59
Diagramme synoptique 61

3 Principes des puissances virtuelles 63
3.1 Puissance réelle 65
3.1.1 Schématisation des efforts 65
3.1.2 Puissance réelle 66
3.2 Puissance virtuelle 69
3.2.1 Définition 69
3.2.2 Propriété 69
3.2.3 Liaisons parfaites 70
3.3 Calcul pratique de la puissance virtuelle d'un système 70
3.3.1 Puissance virtuelle d'un point matériel 71
3.3.2 Puissance virtuelle d'un solide indéformable 71
3.3.3 Puissance virtuelle d'un système matériel 72
3.4 Fonction de force 73
3.4.1 Définition 73
3.4.2 Additivité 73
3.4.3 Fonction de force associée à la pesanteur 73
3.4.4 Fonction de force associée à un ressort élastique 74
3.5 Systèmes conservatifs 75
3.6 Principe des puissances virtuelles 78
3.6.1 Énoncé 78
3.6.2 Axiome d'objectivité 79
3.6.3 Intérêt de la méthode des puissances virtuelles 79
Planche de synthèse 89
Diagramme synoptique 91

4 Équations de Lagrange 93
4.1 Mouvements virtuels pour l'étude des systèmes de solides 95
4.1.1 Mouvement virtuel rigidifiant par morceaux 95
4.1.2 Mouvement virtuel compatible avec les liaisons 98
4.1.3 Liaisons parfaites 98
4.2 Équations de Lagrange 99
4.2.1 Puissance virtuelle des quantités d'accélération 100
4.2.2 Puissance virtuelle des efforts extérieurs et intérieurs 102

4.2.3 Équations de Lagrange 104
Planche de synthèse 126
Diagramme synoptique 128

5 Intégrales premières du mouvement 129
5.1 Intégrales premières linéaires 131
5.1.1 Intégrale première cinétique 131
5.1.2 Intégrale première de Jacobi 134
5.2 Énergie cinétique paramétrée 134
5.3 Théorème d'Euler relatif aux fonctions homogènes 138
5.3.1 Fonction homogène 138
5.3.2 Théorème d'Euler 138
5.4 Lemme de Painlevé 141
5.5 Intégrales premières quadratiques 142
5.5.1 Intégrales premières de Painlevé 142
5.5.2 Cas particuliers 143
5.5.3 Intégrale première de l'énergie cinétique 152
Planche de synthèse 162
Diagramme synoptique 163

6 Équilibre et stabilité 165
6.1 Équilibre 167
6.1.1 Hypothèses 167
6.1.2 Équilibre pour un seul paramètre 167
6.1.3 Équilibre paramétrique 167
6.1.4 Équilibre strict 168
6.2 Détermination des équilibres paramétriques 168
6.2.1 Cas général : utilisation explicite des équations de mouvement du système 168
6.2.2 Cas particulier : écriture directe des équations d'équilibre . . 170
6.3 Stabilité d'un équilibre paramétrique 177
6.3.1 Stabilité au sens de Liapunov 177
6.3.2 Théorème de Lejeune-Dirichlet 178
6.3.3 Étude pratique de l'équilibre et de la stabilité lorsqu'il y a une fonction de force 179

6.4 Linéarisation des équations de Lagrange autour d'une position d'équilibre . . . 187
6.4.1 Hypothèses . . . 187
6.4.2 Linéarisation . . . 187
6.4.3 Stabilité de l'équilibre autour de q_e : théorème de Liapunov . 188
Planche de synthèse . . . 197
Diagramme synoptique . . . 199

Partie B : recueils d'examens corrigés **201**
Recueil d'examens 1 : pour commencer . . . 202
Épreuve 1 : système composé d'une tige soudée à une demi-sphère . . . 203
Épreuve 2 : stabilité d'un cerceau autour d'une nutation uniforme . . . 208
Épreuve 3 : étude d'un système pendulaire complexe . . . 215
Épreuve 4 : mouvement d'une sphère pleine sur un plan fixe . . . 225
Épreuve 5 : disque roulant sans glissement sur un plan incliné . . . 233
Recueil d'examens 2 : pour s'exercer . . . 242
Épreuve 1 : système composé d'un disque, d'une tige et d'un anneau . . 243
Épreuve 2 : système composé d'un disque et d'une tige . . . 248
Épreuve 3 : disque roulant sur une barre en rotation . . . 257
Épreuve 4 : mouvement d'une sphère sur une tige en rotation . . . 266
Épreuve 5 : mouvement d'un ellipsoïde sur un plan lisse . . . 274
Recueil d'examens 3 : pour approfondir . . . 283
Épreuve 1 : glissement sans frottement d'une plaque triangulaire . . . 284
Épreuve 2 : mouvement d'un culbuto . . . 295
Épreuve 3 : étude d'une barre assujettie à deux rotations planes . . . 310
Épreuve 4 : étude d'un essieu muni de deux roues identiques . . . 323
Épreuve 5 : mouvement d'un culbuto sur un plan tournant . . . 335

Bibliographie **353**

Index alphabétique **361**

Partie A
Notes de cours

CHAPITRE 1

Paramétrage et liaisons

Objectifs pédagogiques

- ❒ Définir le paramétrage d'un système matériel
- ❒ Définir l'espace de configuration
- ❒ Définir les liaisons et leur nature
- ❒ Définir le nombre de degrés de liberté d'un système matériel
- ❒ Définir les paramètres primitifs
- ❒ Définir les coordonnées généralisées d'un système matériel

Notions abordées

- Paramétrage d'un système matériel
- Paramétrage strict
- Paramétrage surabondant
- Liaisons holonomes-Liaisons non holonomes
- Liaisons bilatérales-Liaisons unilatérales

- Liaisons principales-Liaisons complémentaires
- Paramètres primitifs
- Nombre de degrés de liberté
- Coordonnées généralisées
- Équation de configuration
- Espace de configuration

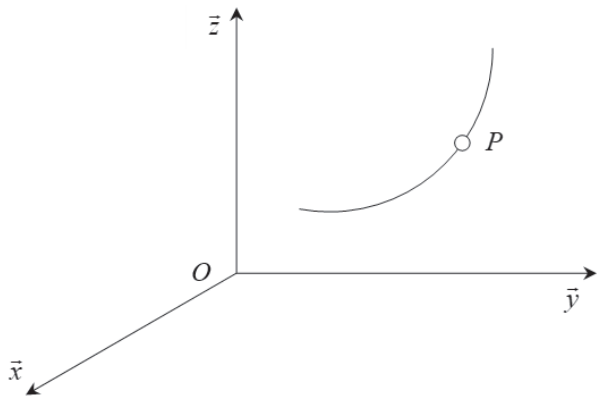
Pour débuter l'étude du mouvement des systèmes solides, il est important de savoir caractériser leurs positions dans un repère par un paramétrage. Celui-ci est lié à la modélisation géométrique du système. La mécanique lagrangienne se distingue par le fait que le paramétrage y joue un rôle important. En effet, pour un même problème, on peut choisir différents paramétrages et les équations de mouvement qui en découlent seront différentes selon le paramétrage choisi. Par ailleurs, les solides sont liés par des liaisons qui limitent leur mouvement, ce qui impacte le choix du paramétrage. Il est donc nécessaire de donner une description de ces liaisons.

1.1 Paramétrage d'un système matériel

On considère un système matériel (Σ) en mouvement par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On suppose que ce système est composé de p points matériels (P_i) et de s solides rigides (S_i) ; $(\Sigma) = (P_i) \cup (S_i)$.
Faire le paramétrage d'un tel système, c'est définir les paramètres qui déterminent sa position à chaque instant t.

1.1.1 Cas d'un point matériel

Considérons un point matériel (P) en mouvement par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.



Dans ce cas on a :

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}; \quad \forall t$$

Il nous faut 3 paramètres (x, y, z) pour définir la position du point matériel (P). On dit que le système défini par le point matériel (P) est à 3 degrés de liberté.

Exemples

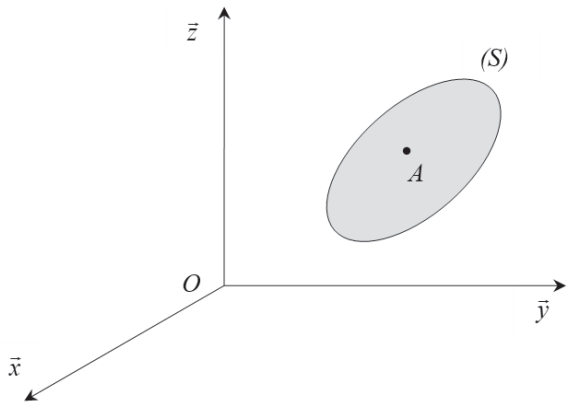
- coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}(x, y, z) \Rightarrow q = (x, y, z)$
- coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}(\rho, \varphi, z) \Rightarrow q = (\rho, \varphi, z)$
- coordonnées sphériques : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}(r, \theta, \varphi) \Rightarrow q = (r, \theta, \varphi)$

1.1.2 Cas d'un solide rigide

Soit (S) un solide rigide en mouvement par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
Dans ce cas, il nous faut 6 paramètres pour définir la position du solide à chaque instant :

- Les 3 coordonnées d'un point du solide.
- Les 3 angles d'Euler (ψ, θ, φ) définissant la rotation du solide.

On dit que le système défini par un solide rigide est à 6 degrés de liberté.



Exemples

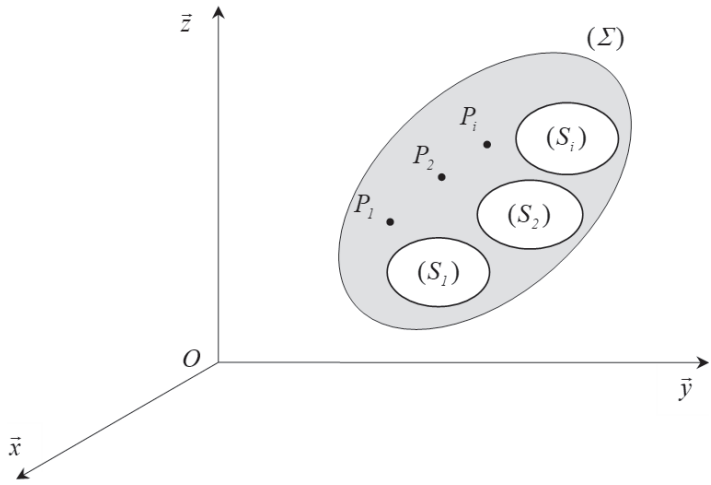
- cas d'un solide quelconque :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}(\underbrace{x, y, z}_{\text{coordonnées d'un point}}, \underbrace{\psi, \theta, \varphi}_{\text{angles d'Euler}}) \Rightarrow q = (x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$$

- cas d'un solide rectiligne :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}(x, y, z, \psi, \theta) \Rightarrow q = (x, y, z, \psi, \theta)$$

1.1.3 Cas d'un système matériel (Σ)



Considérons un système matériel (Σ) en mouvement par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Supposons que ce système est composé de p points matériels (P_i) et de s solides rigides (S_i) ; $(\Sigma) = (P_i) \cup (S_i)$, alors, il nous faut $N = 3p + 6s$ paramètres q_i pour définir la position de (Σ) à chaque instant t . On dit que le système matériel est défini par N degrés de liberté.

1.1.4 Définitions

- Les N paramètres $(q_1, q_2, \ldots, q_N)$ qui définissent la position du système matériel (Σ) à chaque instant t sont appelés **paramètres primitifs**.

- Soit P un point matériel appartenant au système (Σ), alors on a :

$$\forall t,\ \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}\left(\overrightarrow{OP_0}, q_i(t)\right); \quad i = 1, 2, \ldots, N \qquad (1.1)$$

où

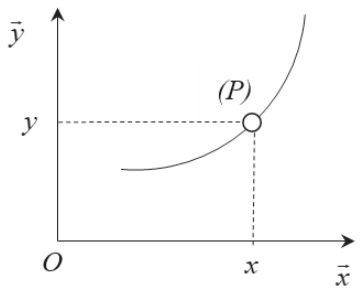
$$\overrightarrow{OP}_0 = \overrightarrow{OP}\,(t = t_0)$$

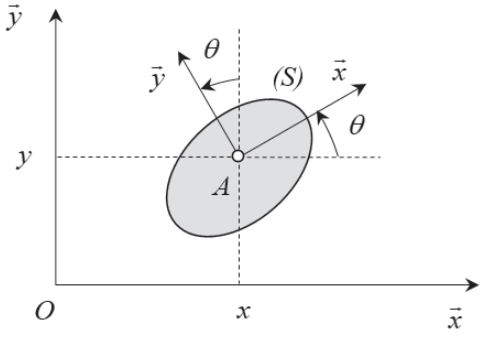
☞ L'équation (1.1) est appelée **équation de configuration**.

☞ L'espace (E_N) décrit par le vecteur $\overrightarrow{OP}$ est appelé **espace de configuration**.

Remarques

- Pour un système défini par un point matériel (P) appartenant à un plan, il nous faut 2 paramètres (x, y) pour définir sa position à chaque instant.
- Pour un système défini par un solide indéformable (S) se trouvant constamment dans un plan, il nous faut 3 paramètres (x, y, θ) pour définir sa position à chaque instant.





1.2 Liaisons

Une liaison est une restriction imposée au mouvement d'un système matériel. Elle peut s'exprimer par une ou plusieurs équations (ou inéquations) reliant les paramètres primitifs q_i, leurs dérivées $\dot{q}_i$ et éventuellement le temps t.

Les liaisons peuvent être :

- **Géométriques** : limitations des zones de l'espace permises pour le système. *Exemples* : point fixe, mouvement plan, mouvement rectiligne, contact permanent, etc.
- **Cinématiques** : limitations sur les champs de vitesses. *Exemples* : non-glissement, non-roulement, non-pivotement, etc.
- **Dynamiques** : le non-frottement par exemple.

La description complète d'une liaison nécessite non seulement l'établissement des équations ou inéquations qui la traduisent (les effets) mais aussi la détermination des efforts de liaison inconnus qui la réalisent (les causes).

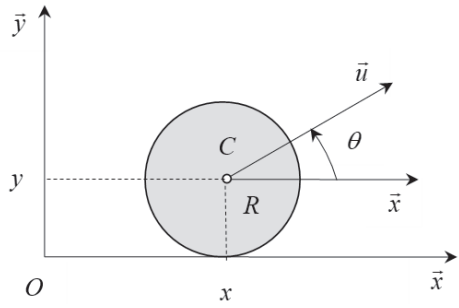
1.2.1 Paramétrage strict-Paramétrage surabondant

On dit que les coordonnées $(q_1, q_2, \ldots, q_N)$ définissent un paramétrage **strict** (ou complet) du système (Σ) si les liaisons prises en compte par ce paramétrage sont les seules liaisons auxquelles est soumis le système. Le paramétrage est considéré comme **surabondant** s'il existe au moins une équation de liaison non utilisée.

Exemple générique 1

Disque qui roule sur un axe

Considérons un disque de rayon R en contact avec un axe matérialisé $(O, \vec{x})$.



Le problème est plan et nécessite 3 paramètres :

- les coordonnées (x, y) du centre C du disque ;
- la rotation θ du disque autour de l'axe $(O, \vec{z})$.

La liaison géométrique de contact impose : $y = R = \text{cte}$.
(x, y, θ) représente un paramétrage surabondant et (x, θ) représente un paramétrage strict.

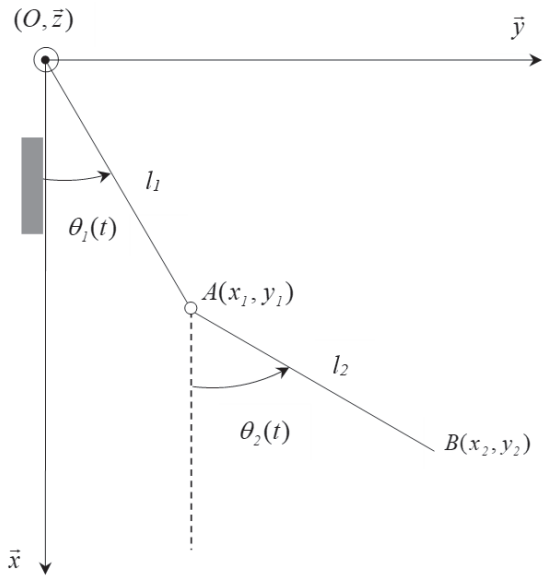
Remarque

Le mouvement du disque est limité par un contact avec un obstacle extérieur. C'est pour cette raison que ce type de liaison est appelée **liaison extérieure**.

Application pédagogique 1

Double pendule pesant

Considérons maintenant le double pendule (Σ) constitué de deux tiges (S_1) et (S_2).



$q_1 = (x_1, y_1, \theta_1)$ est un paramétrage surabondant associé à la tige (S_1) et $q_1 = \theta_1$ est un paramétrage strict.
$q_2 = (x_2, y_2, \theta_2)$ est un paramétrage surabondant associé à la tige (S_2) et $q_2 = \theta_2$ est un paramétrage strict.

La liaison extérieure en O impose : $x_1 = l_1 \cos\theta_1$; $y_1 = l_1 \sin\theta_1$ soit deux équations de liaison.
La liaison en A impose : $x_2 = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2$; $y_2 = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2$ soit deux équations de liaison. La liaison en A est une liaison intérieure au système.
(Σ) possède deux degrés de liberté et un paramétrage strict donné par (θ_1, θ_2).

1.2.2 Liaisons holonome, non holonome et semi-holonome

Un système (Σ) composé de particules et s solides est un système à $N = 3p + 6s$ paramètres primitifs qu'on note $(q_1, \ldots, q_N)$.

- **Liaison holonome**

  Une liaison est dite **holonome** si les équations qui la traduisent dépendent seulement des paramètres primitifs q_i et éventuellement du temps t :

  $$f(q_1, \ldots, q_N, t) = 0 \qquad (1.2)$$

  Ces liaisons holonomes sont aussi appelées **liaisons géométriques**.

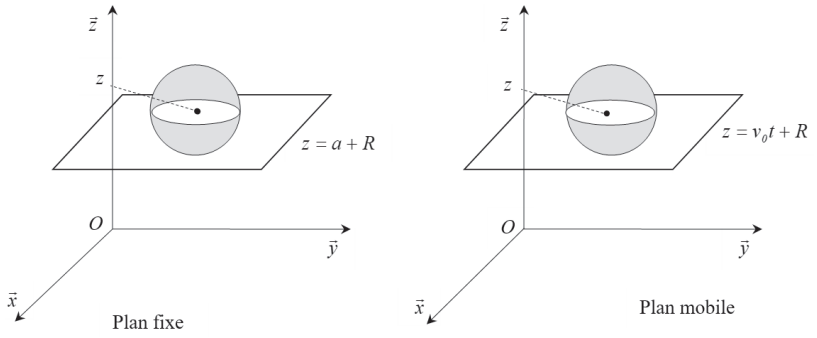
Application pédagogique 2

Boule roulant sur un plan de cote z

Soit une boule (B) de centre $C(x, y, z)$ et de rayon R qui roule sur un plan de cote z. On considère deux cas : le cas où le plan est fixe : $z = a = \text{cte}$ et le cas où il est animé d'un mouvement de translation uniforme : $z = v_0 t$.
Système étudié : boule de centre C et de rayon R.
Paramètres primitifs : $x, y, z, \psi, \theta, \varphi$.
Liaison (L) : boule en contact avec le plan de cote $z = a$:

- Si le plan est fixe $\Rightarrow$ la liaison (L) s'écrit : $z = a + R$ (1)
- Si le plan est mobile $\Rightarrow$ la liaison (L) s'écrit : $z = v_0 t + R$ (2)

Les équations (1) et (2) sont des équations de liaison holonomes. La seule différence est que l'équation (1) ne dépend pas du temps t, alors que l'équation (2) en dépend.



Notation

- L'équation (1) peut s'écrire aussi :

$$f(x, y, z, \psi, \theta, \varphi, t) = x - a - R = 0 \quad (1)'$$

- L'équation (2) peut s'écrire aussi :

$$g(x, y, z, \psi, \theta, \varphi, t) = x - v_0 t - R = 0 \quad (2)'$$

- L'indépendance par rapport au temps t d'une liaison vient nécessairement du fait de l'obstacle mobile avec lequel le système matériel est en contact.

■ **Liaison non holonome**

Une liaison est dite non holonome si les équations qui la traduisent font intervenir les paramètres q_i, leurs dérivées par rapport au temps $\dot{q}_i$ et éventuellement le temps t :

$$f\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) = 0 \qquad (1.3)$$

Dans la suite de ce cours, on se limitera aux liaisons dont les équations sont de la forme :

$$f\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) = \sum_{i=1}^{N} a_i\left(q_j, t\right) \dot{q}_i + b\left(q_j, t\right) = 0 \qquad (1.4)$$

Ces liaisons non holonomes sont aussi appelées **liaisons cinématiques**.

Remarque

Une liaison non holonome nécessite au préalable une liaison holonome traduisant la liaison purement géométrique.

■ **Liaison semi-holonome**

Si pour une liaison non holonome définie par l'équation $f(q_i, \dot{q}_i, t) = 0$, on peut déterminer une fonction $g(q_i, t) = 0$ telle que :

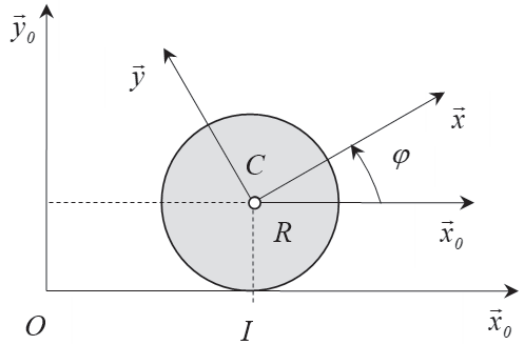
$$f(q_i, \dot{q}_i, t) = 0 = \frac{d}{dt}\left[g(q_i, t)\right] \qquad (1.5)$$

Alors cette liaison non holonome (définie par la fonction f) peut être considérée comme holonome. On dit qu'elle est **semi-holonome**.

Exemple générique 2

Disque (D) ***de rayon*** R

On considère un disque $D(C, R)$ appartenant au plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$. On suppose que le disque (D) est en contact ponctuel au point I avec l'axe $(O, \vec{x}_0)$ et que le roulement du disque sur cet axe se fait sans glissement.



Système étudié : disque $D(C, R)$ de centre $C(x, y, z)$ et de rayon R.
Paramètres primitifs : $x, y, z, \psi, \theta, \varphi$.

Liaisons :

- Liaison (L_1) : disque $D(C,R) \in (O,\vec{x}_0,\vec{y}_0) \Rightarrow \begin{cases} z = 0 & (1) \\ \psi = \text{cte} & (2) \\ \theta = \text{ cte} & (3) \end{cases}$
- Liaison (L_2) : contact ponctuel en $I \Rightarrow y = R \qquad (4)$
- Liaison (L_3) : roulement sans glissement en $I \Rightarrow \vec{V}_g\left(D/R_0\right) = \overrightarrow{0}$

$$\begin{aligned} \vec{V}_g\left(D/R_0\right) &= \vec{V}\left(I \in D/R_0\right) = \vec{V}\left(C \in D/R_0\right) + \vec{\Omega}\left(D/R_0\right) \wedge \overrightarrow{CI} \\ &= \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{\varphi}\vec{z}_0 \wedge (-R\vec{y}_0) = (\dot{x} + R\dot{\varphi})\vec{x}_0 \end{aligned}$$

D'où la condition cinématique de liaison :

$$\dot{x} + R\dot{\varphi} = 0 \qquad (5)$$

Terminologie

- Les équations $(1), (2), (3)$ et (4) traduisent des liaisons holonomes.
- L'équation (5) traduit une liaison non holonome.
- L'équation (5) peut être intégrée ($x + R\varphi = \text{cte}$). C'est une liaison semi-holonome.

1.2.3 Liaison bilatérale-Liaison unilatérale

Une liaison est dite **bilatérale** si toutes les équations la traduisant sont des égalités. Elle sera dite **unilatérale** si parmi toutes les équations qui la représentent, il existe au moins une inégalité :

$$\forall j = 1, 2, \ldots, m : f_j\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) = 0 \longrightarrow \text{(bilatérale)}$$

$$\exists i_0 \ / \ f_{i_0}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) \geq 0 \longrightarrow \text{(unilatérale)}$$

Exemples

Deux points matériels reliés par un fil de longueur l sont en mouvement dans un plan, alors on a deux cas de figure à examiner :

- Si le fil est inextensible, l'équation de liaison holonome qui relie ces deux particules est :

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2$$

☞ C'est une équation de liaison bilatérale.

- Si le fil est de longueur variable alors, l'équation de liaison holonome qui relie ces deux particules est :

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \leq l^2$$

☞ C'est une équation d'une liaison unilatérale.

1.2.4 Liaison indépendante du temps-Liaison dépendante du temps

- Une liaison holonome est dite indépendante du temps si les équations qui la traduisent ne dépendent pas explicitement du temps.
  Exemple

$$x^2 + y^2 = l^2$$

Remarque

Une liaison indépendante explicitement du temps est dite scléronome.

- Une liaison qui dépend explicitement du temps est qualifiée de rhéonome.
  Exemple

$$x = a \sin \omega t$$

1.2.5 Liaison principale-Liaison complémentaire

Les liaisons imposées à un système mécanique (Σ) peuvent être utilisées soit avant la mise en équations du problème, pour réduire le nombre de paramètres primitifs, soit après l'écriture des équations du mouvement. Les liaisons utilisées pour réduire le nombre de paramètres primitifs avant la mise en équations s'appellent liaisons **primitives** ou **principales**.

- **Liaison principale (ou primitive)**

  Une liaison holonome est qualifiée de principale lorsqu'elle est utilisée pour réduire le nombre de paramètres primitifs q_i.

- **Liaison complémentaire (ou supplémentaire)**

  Une liaison qui n'est pas utilisée pour effectuer la réduction du paramétrage du système est qualifiée de complémentaire. Elle est ignorée durant toute la résolution, ce n'est qu'après avoir établi le système d'équations de Lagrange qu'elles interviennent éventuellement pour le compléter.

1.2.6 Nombre de degrés de liberté

Le nombre de degrés de liberté $n(n \prec N)$ d'un système est le nombre de paramètres indépendants nécessaire pour déterminer de façon unique la position du système.

Remarques importantes

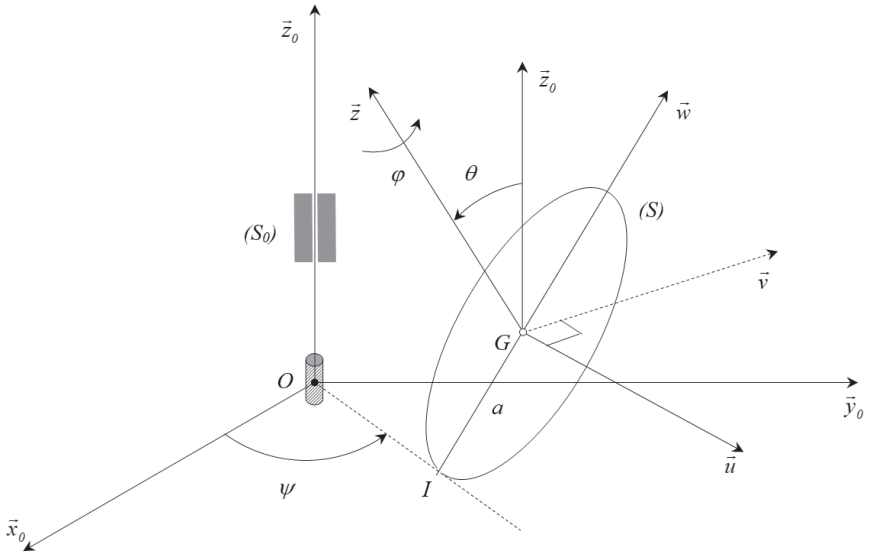
- La prise en compte des liaisons holonomes principales permet de réduire le nombre de paramètres primitifs et de définir de nouveaux paramètres indépendants notés $(q_1, \ldots, q_n)\,(n \prec N)$ appelés **paramètres principaux** ou **coordonnées généralisées du système**.
- Les coordonnées généralisées sont déduites des paramètres primitifs en prenant en compte les liaisons holonomes. Mais elles peuvent être liées par des liaisons non holonomes.
- Une grandeur est dite **compatible** avec une liaison principale, si l'équation traduisant cette liaison est prise en compte dans le calcul de cette grandeur.

Application pédagogique 3

Cerceau qui roule sans glisser sur un plan fixe

Soit $R_0\,(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct supposé galiléen avec $(O, \vec{z}_0)$ vertical ascendant lié à un bâti fixe (S_0). Un cerceau (S) de centre d'inertie G, de rayon a et de masse m roule sans glisser sur le plan $(\pi) = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$. On repère sa position par les coordonnées (x, y, z) de G et par les angles d'Euler habituels (ψ, θ, φ). On désigne par $R_1\,(G, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ et $R_2(G, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$ les deux

repères intermédiaires et par $R(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère orthonormé direct lié à (S). Le point de contact entre (S) et (π) est noté I avec $\overrightarrow{IG} = a\vec{w}$. L'axe $(G, \vec{z})$ est normal au plan du cerceau.



1. Construire les figures de calcul. En déduire l'expression de $\vec{\Omega}(S/R_0)$ par ses composantes dans la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$.
2. Montrer que la condition géométrique de contact entre le cerceau (S) et le plan (π) est :

$$z = a \sin\theta \qquad (L)$$

Préciser la nature de cette liaison.

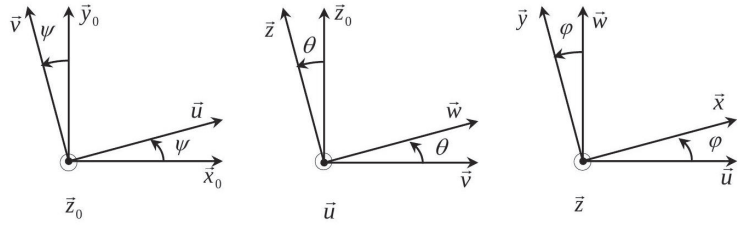
Dans la suite du problème, la liaison géométrique (L) sera prise comme primitive.

3. Quel est le nombre de degrés de liberté du système ?
4. Calculer l'énergie cinétique du cerceau $T(S/R_0)$ compatible avec (L).
5. Calculer la vitesse de glissement en I de (S) par ses composantes dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$.

6 Écrire les équations cinématiques de liaison traduisant le non-glissement en I.
On notera (L_c) la liaison cinématique formée par ces deux équations.

Solution

1 Figures de calcul



On en déduit que

$$\vec{\Omega}\,(S/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z}$$

$$\vec{\Omega}\,(R/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z} = \begin{vmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{vmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}$$

2

$$\overrightarrow{OI} \cdot \vec{z}_0 = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GI}) \cdot \vec{z}_0 = 0$$

Avec :

$$\overrightarrow{OG} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GI} = -a\vec{w}$$

d'où :

$$z = a\sin\theta \qquad (L)$$

C'est l'équation géométrique de contact.
Nature de la liaison : c'est une équation de liaison holonome.

3 Le nombre de paramètres primitifs de (S) est six : $(x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$ mais compte tenu de l'équation de liaison $z = a\sin\theta$, le nombre de degrés de

liberté est réduit à **cinq** qui sont :

$$(x, y, \psi, \theta, \varphi)$$

4 Énergie cinétique compatible avec (L) :

$$T\left(S/R_0\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\right) + \frac{ma^2}{4}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{ma^2}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2$$

5

$$\vec{V}_g\left(I, S/R_0\right) = \vec{V}\left(I \in S/R_0\right) = \vec{V}\left(G \in S/R_0\right) + \vec{\Omega}\left(S/R_0\right) \wedge \overrightarrow{GI}$$

$$\vec{V}\left(G \in S/R_0\right) = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}_0\vec{y}_0 + a\dot{\theta}\cos\theta\vec{z}_0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GI} = -a\vec{w}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\vec{V}\left(I \in S/R_0\right) = &[\dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi + a(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)]\vec{u} \\ &+ [-\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi + a\dot{\theta}\sin\theta]\vec{v}\end{aligned}$$

6 La condition de roulement sans glissement s'écrit :

$$\vec{V}_g\left(I, S/R_0\right) = \vec{0}$$

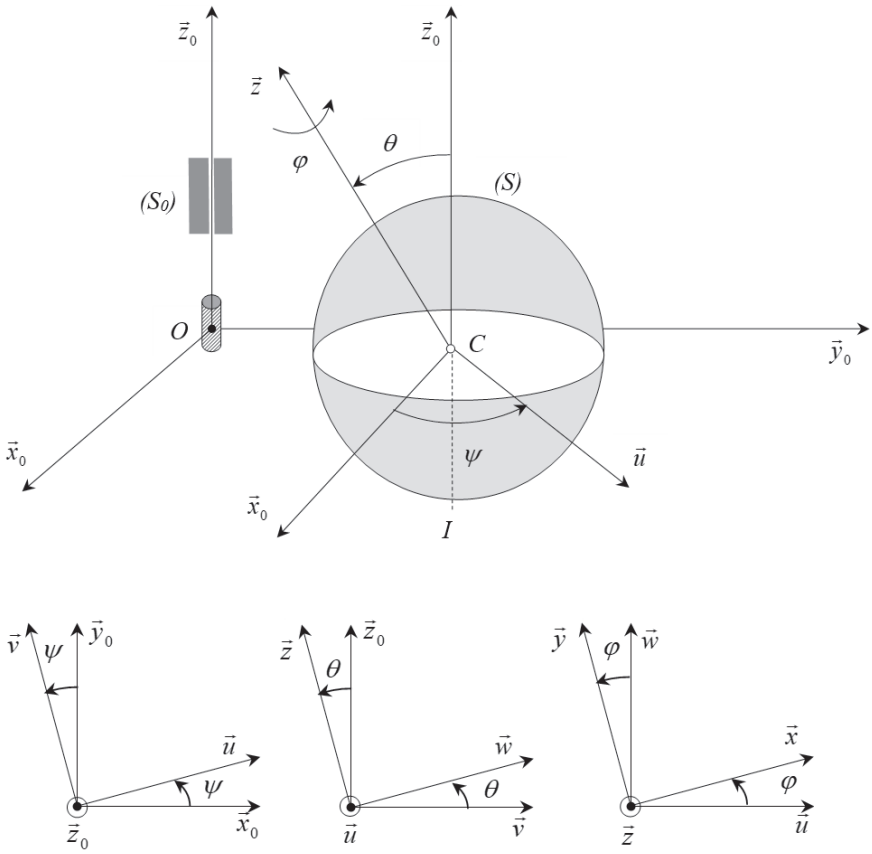
D'où :

$$\begin{cases} \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi + a(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) = 0 \\ -\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi + a\dot{\theta}\sin\theta = 0 \end{cases} \qquad (L_c)$$

Problème de synthèse 1

Sphère qui roule sans glisser sur un plan fixe

On considère une sphère $S(C, R)$ en mouvement par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. On suppose que la sphère (S) est en contact ponctuel au point I avec le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ et que le roulement de la sphère sur ce plan s'effectue sans glissement.



1. Préciser les paramètres primitifs du système.
2. Faire un bilan de toutes les liaisons et préciser leur nature.
3. Caractériser mécaniquement le système.
4. Calculer l'énergie cinétique du système compatible avec la condition géométrique de contact en I.
5. Montrer que l'énergie potentielle compatible avec le contact géométrique en I est une constante.

Solution didactique

Système étudié : sphère $S(C, R)$ de centre $C(x, y, z)$ et de rayon R.

1 Paramètres primitifs :

$$(x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$$

2 Liaisons :

Liaison (L_1) : contact ponctuel de la sphère au point $I : z = R$ (1) En effet :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OI} \cdot \vec{z}_0 = 0 \\
&(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GI}) \cdot \vec{z}_0 = 0 \\
&(x\vec{x}_0 + yx\vec{y}_0 + z\vec{z}_0 - R \cdot \vec{z}_0) \cdot \vec{z}_0 = 0 \\
&z - R = 0 \\
&z = R
\end{aligned}$$

Liaison (L_2) : roulement sans glissement : $\vec{V}_g\,(S/R_0) = \overrightarrow{0}$

$$\vec{V}_g\,(S/R_0) = \vec{V}\,(I \in S/R_0) = \vec{V}\,(C \in S/R_0) + \vec{\Omega}\,(S/R_0) \wedge \overrightarrow{CI}$$

on a :

$$\overrightarrow{OC} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + R\vec{z}_0 \Rightarrow \vec{V}\,(C/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\right]_{R_0} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0$$

donc :

$$\vec{V}\,(C/R_0) = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0$$

par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\vec{\Omega}\,(S/R_0) &= \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z} = \dot{\theta}\vec{u} - \dot{\varphi}\sin\theta\vec{v} + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\vec{z}_0 \\
&= \vec{\Omega}_t\,(S/R_0) + \vec{\Omega}_n\,(S/R_0)
\end{aligned}$$

donc, si on note le plan $(\pi) = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0) = (O, \vec{u}, \vec{v})$,
alors :

$$\vec{\Omega}_t\,(S/R_0) = \dot{\theta}\vec{u} - \dot{\varphi}\sin\theta\vec{v} \in (\pi)$$

$\vec{\Omega}_t\,(S/R_0)$ est appelé vecteur vitesse de roulement de (S) par rapport à (R_0).

$$\vec{\Omega}_n\,(S/R_0) = (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\vec{z}_0 \in (\pi)$$

$\vec{\Omega}_n\,(S/R_0)$ est appelé vecteur vitesse de pivotement de (S) par rapport à (R_0).
Finalement :

$$\vec{V}_g\,(S/R_0) = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 + \left[\dot{\theta}\vec{u} - \dot{\varphi}\sin\theta\vec{v} + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\vec{z}_0\right] \wedge (-R)\vec{z}_0$$
$$\Rightarrow \vec{V}_g\,(S/R_0) = \dot{x}(\cos\psi\vec{u} - \sin\psi\vec{v}) + \dot{y}(\sin\psi\vec{u} + \cos\psi\vec{v}) + R\dot{\theta}\vec{v} + R\dot{\varphi}\sin\theta\vec{u}$$

d'où :

$$\vec{V}_g\,(S/R_0) = (\dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi + R\dot{\varphi}\sin\theta)\vec{u} + (\dot{y}\cos\psi - \dot{x}\sin\psi + R\dot{\theta})\vec{v}$$

donc :

$$\text{Liaison } (L_2) \Leftrightarrow \vec{V}_g\,(S/R_0) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi + R\dot{\varphi}\sin\theta = 0 \\ \dot{y}\cos\psi - \dot{x}\sin\psi + R\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

Liaison (L_3) : non-roulement de la sphère par rapport à (R_0)

$$\Leftrightarrow \vec{\Omega}_t\,(S/R_0) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \dot{\theta}\vec{u} - \dot{\varphi}\sin\theta\vec{v} = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \dot{\varphi}\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Liaison (L_4) : non-pivotement de la sphère par rapport à (R_0)

$$\Leftrightarrow \vec{\Omega}_n\,(S/R_0) = \vec{0} \Leftrightarrow \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta = 0$$

Terminologie

- La liaison (L_1) est une liaison holonome : $z = R \quad (1)$
- La liaison (L_2) est une liaison non holonome :

$$\begin{cases} \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi + R\dot{\varphi}\sin\theta = 0 \quad (2) \\ \dot{y}\cos\psi - \dot{x}\sin\psi + R\dot{\theta} = 0 \qquad (3) \end{cases}$$

- La liaison (L_3) est une liaison non holonome :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 0 \qquad (4) \\ \dot{\varphi}\sin\theta = 0 \quad (5) \end{cases}$$