100% ENTRAÎNEMENT

NOUVEAUX PROGRAMMES

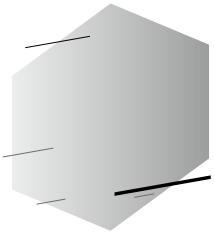
MATHS APPROFONDIES

ECG-2

Maxime Bailleul
François-Xavier Manoury
Stéphane Préteseille

ellipses

MATHS
APPROFONDIES
ECG-2



100% ENTRAÎNEMENT

Collection dirigée par Sylvain Rondy

MATHS APPROFONDIES ECG-2

NOUVEAUX PROGRAMMES

Maxime Bailleul
François-Xavier Manoury
Stéphane Préteseille

ellipses

Retrouvez tous les ouvrages de la collection **100% ENTRAÎNEMENT** sur :
www.editions-ellipses.fr



Les macros de cet ouvrage ont été réalisées par Christophe Poulain en LaTeX.

ISBN 9782340-066632
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

La collection « 100% entraînement » est conçue pour les élèves des classes préparatoires scientifiques (préparant aux écoles d'ingénieur) et économiques (préparant aux écoles de commerce et de management). L'objectif de cette collection est de mettre l'accent sur l'acquisition d'expérience et d'autonomie, en proposant un grand nombre d'exercices de difficulté progressive, sans rappels de cours excepté dans les corrigés.

Cet ouvrage s'adresse aux élèves des classes préparatoires ECG Maths approfondies qui souhaitent trouver un outil différent de celui proposé par les livres d'annales : en effet, chacun des 22 chapitres correspond à une partie du cours bien ciblée et tous les exercices du chapitre portent sur cette partie, ce qui procure un entraînement systématique sur chaque chapitre et permet de s'impliquer réellement dans la maîtrise des notions abordées.

Chaque chapitre est découpé en quatre parties de la façon suivante :

- **Maîtriser le cours.** Cette partie contient « Le Vrai/Faux du début » consistant en des questions de cours ou proches du cours, ainsi que des exercices d'application directe du cours.
- **Maîtriser les méthodes fondamentales.** Cette partie propose des exercices un peu plus compliqués mais proches de méthodes fondamentales qu'il faut absolument connaître et maîtriser parfaitement.
- **Pour aller plus loin.** Cette partie contient des exercices plus élaborés, pour certains difficiles, nécessitant autonomie, faculté à prendre des décisions et esprit de synthèse. Elle se termine par « Le Vrai/Faux de la fin » qui oblige à une réelle réflexion et nécessite d'avoir un bon recul sur les notions abordées.
- **Solution des exercices.** Cette partie fournit les solutions des exercices, complètes et rédigées avec le plus grand soin, au sein desquelles sont disposées des bulles et des encadrés contenant des rappels de cours, des conseils de méthode, des astuces, ou encore des mises en garde contre les erreurs à éviter.

Les auteurs de cette collection ont compilé cet abondant vivier d'exercices afin que ce livre complète efficacement celui de première année.

Sylvain Rondy

Sommaire

Compléments d'algèbre linéaire

1. Sommes de sous-espaces vectoriels 1
2. Changement de bases 15

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

3. Réduction des matrices carrées 26
4. Réduction des endomorphismes 43
5. Trace d'une matrice carrée 61

Algèbre bilinéaire

6. Produits scalaires 70
7. Orthogonalité 83

Fonctions réelles de *n* variables

8. Calcul différentiel : ordre 1 100

Couples et *n*-uplets de variables aléatoires

9. Vecteurs aléatoires 117
10. Covariance 135

Introduction aux variables aléatoires à densité

11. Variables aléatoires réelles à densité 146
12. Lois à densité usuelles 175
13. La loi gamma 203

Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

14. Endomorphismes symétriques 220
15. Matrices symétriques 236
16. Projections orthogonales 252

Fonctions réelles de *n* variables : recherche d'extrema

17. Calcul différentiel : ordre 2 266
18. Extrema sur un ouvert 275
19. Extrema sous contrainte d'égalités linéaires 291

Convergences, estimation

20. Convergence en loi 307
21. Convergence en probabilité 326
22. Estimation 341

1 Sommes de sous-espaces vectoriels

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

On considère un espace vectoriel E de dimension finie et F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E.

1. $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$. ☐ Vrai ☐ Faux

2. Si la somme $F+G+H$ est directe et si (x,y,z) et (x',y',z') appartiennent à $F \times G \times H$, alors : ☐ Vrai ☐ Faux

$$x+y+z = x'+y'+z' \Longrightarrow (x,y,z) = (x',y',z')$$

3. On note $E = \mathbb{R}_2[x]$ et P_1, P_2, P_3 les fonctions polynômes définies par :

$$P_1(x) = 2,\ P_2(x) = 3-2x,\ P_3(x) = x\,(x-1)$$

☐ Vrai ☐ Faux

On a : $E = \text{Vect}(P_1) \oplus \text{Vect}(P_2) \oplus \text{Vect}(P_3)$.

Exercice 2 –

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et :

- $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel de E formé des matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont tous nuls,
- $\mathcal{S}$ le sous-espace vectoriel de E formé des matrices triangulaires inférieures dont les coefficients diagonaux sont tous nuls,
- $\mathcal{D}$ le sous-espace vectoriel de E formé des matrices diagonales.

Prouver que : $E = \mathcal{T} \oplus \mathcal{S} \oplus \mathcal{D}$.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

On considère les ensembles E et F suivants :

$$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x-y+z=0 \text{ et } t=0\}$$
$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+2y+z+t=0 \text{ et } x-y-2z+t=0\}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base.

2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base.

3. Démontrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4 –

1. On note $F = \text{Vect}\,((3,0,1,2))$ et $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ 3x + z + 2t = 0\}$.
F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

2. On note : $F = \text{Vect}((-1,1,0,-1))$, $G = \text{Vect}((2,1,0,0))$ et $H = \text{Vect}((1,2,0,-1),(1,-2,1,1))$.
A-t-on : $\mathbb{R}^4 = F \oplus G \oplus H$?

Exercice 5 –

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que la somme $F + G + H$ est directe si et seulement si :

$$F \cap G = \{0\} \quad \text{et} \quad (F+G) \cap H = \{0\}$$

Pour aller plus loin

Exercice 6 –

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ E_k = \{P \in \mathbb{R}_n[x],\ \forall i \in [\![0,n]\!] \setminus \{k\},\ P(i) = 0\}$$

1. Montrer que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, E_k est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$.

2. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, déterminer une base de E_k puis prouver que :

$$\mathbb{R}_n[x] = E_0 \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$$

Exercice 7 –

On note $E = \mathbb{R}_3[x]$ et on considère les sous-espaces vectoriels de E suivants :

$$F = \{P \in E,\ P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$$
$$G = \{P \in E,\ P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$$
$$H = \{P \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = P(-x)\}$$
$$I = \{P \in E,\ P(1) = P(2) = 0\}$$

1. Montrer que F et G sont en somme directe et que : $F \oplus G = I$.

2. Montrer que : $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 8 – Le vrai/faux de la fin

On considère un espace vectoriel E de dimension finie et F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E.

1. Si $F \cap G \cap H = \{0\}$, alors la somme $F + G + H$ est directe. ☐ Vrai ☐ Faux

2. Si $E = F \oplus G$ et $E = F \oplus H$, alors $G = H$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

Cours

Soit E un espace vectoriel et $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

- $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe si et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p,\ \sum_{i=1}^{p} x_i = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0$$

- Si E est de dimension finie, E est la somme directe de $F_1, \dots, F_p$ si et seulement si la concaténation de bases de $F_1, \dots, F_p$ est une base de E.
- F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

1. Faux car on a en fait (formule de Grassmann) :
$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$
☐ Vrai ☒ Faux

2. C'est une conséquence immédiate de la définition. ☒ Vrai ☐ Faux

3. La famille (P_1, P_2, P_3) est libre car formée de polynômes non nuls échelonnés en degrés ; de plus elle est formée de trois vecteurs de E et E est de dimension 3, donc c'en est une base. ☒ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Méthode

Quand on cherche à prouver que trois sous-espaces vectoriels (ou plus) E_1, E_2, E_3 de E sont en somme directe et que leur somme est égale à E et qu'on n'en connaît pas de base, le plus simple est en général de raisonner par analyse-synthèse pour prouver que tout élément de E se décompose de manière unique comme somme de trois vecteurs de E_1, E_2, E_3 respectivement.

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ un élément de E.

◇ Supposons qu'il existe $(T, S, D) \in \mathcal{T} \times \mathcal{S} \times \mathcal{D}$ tel que : $M = T + S + D$ et notons :

$$T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, \quad S = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, \quad D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$$

On a alors :
$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ m_{i,j} = t_{i,j} + s_{i,j} + d_{i,j} \tag{1.1}$$

De plus on a, par définition :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \begin{cases} t_{i,j} = 0 & \text{si } i \geq j \\ s_{i,j} = 0 & \text{si } i \leq j \\ d_{i,j} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

On en déduit, avec (1.1) :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j} = \begin{cases} t_{i,j} & \text{si } i < j \\ s_{i,j} & \text{si } i > j \\ d_{i,i} & \text{si } i = j \end{cases}$$

d'où :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ t_{i,j} = \begin{cases} m_{i,j} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},\quad s_{i,j} = \begin{cases} m_{i,j} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } d_{i,j} = \begin{cases} m_{i,j} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, s'il existe, le triplet (T,S,D) est défini de manière unique.

◇ Notons maintenant T, S et D les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients vérifient :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ t_{i,j} = \begin{cases} m_{i,j} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},\quad s_{i,j} = \begin{cases} m_{i,j} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } d_{i,j} = \begin{cases} m_{i,j} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ t_{i,j} + s_{i,j} + d_{i,j} = m_{i,j}$$

donc $M = T + S + D$. De plus, par construction, T, S et D appartiennent bien respectivement à $\mathscr{T}$, $\mathscr{S}$ et $\mathscr{D}$. Ainsi :

$$\forall M \in E,\ \exists !(T,S,D) \in \mathscr{T} \times \mathscr{S} \times \mathscr{D},\ M = T + S + D$$

ce qui nous permet de conclure : $E = \mathscr{T} \oplus \mathscr{S} \oplus \mathscr{D}$.

Exercice 3 –

1. Pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$\begin{aligned} (x,y,z,t) \in E &\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = -x + y \\ t = 0 \end{cases} \\ &\iff (x,y,z,t) = (x,y,-x+y,0) \\ &\iff (x,y,z,t) = x\,(1,0,-1,0) + y\,(0,1,1,0) \end{aligned}$$

Comme $(1,0,-1,0)$ et $(0,1,1,0)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$, E est ainsi le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $((1,0,-1,0),(0,1,1,0))$, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

De plus, la famille $((1,0,-1,0),(0,1,1,0))$ est formée de deux vecteurs non colinéaires, donc elle est libre, ce qui nous permet de conclure que c'est une base de E et E est de dimension 2.

2. Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a, en raisonnant par substitution :

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) \in F &\iff \begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ x - y - 2z + t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3y + 3z = 0 \\ t = -x + y + 2z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = -y \\ t = -x - y \end{cases} \\ &\iff (x, y, z, t) = x\,(1, 0, 0, -1) + y\,(0, 1, -1, -1)\end{aligned}$$

Comme $(1, 0, 0, -1)$ et $(0, 1, -1, -1)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$, F est ainsi le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $((1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, -1))$, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

De plus, la famille $((1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, -1))$ est formée de deux vecteurs non colinéaires, donc elle est libre, ce qui nous permet de conclure que c'est une base de F et F est de dimension 2.

3. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

Comme on connaît les dimensions de E et F, on va prouver que $E \cap F = \{0\}$

$$(x, y, z, t) \in E \cap F \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ t = 0 \\ x + 2y + z + t = 0 \\ x - y - 2z + t = 0 \end{cases}$$

donc, d'après les calculs effectués dans la question 2 :

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) \in E \cap F &\iff \begin{cases} z = -x + y \\ t = 0 \\ z = -y \\ t = -x - y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -x - y = 0 \\ z = -y \\ t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3y = 0 \\ x = -y \\ z = -y \\ t = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y = z = t = 0\end{aligned}$$

On a donc :

$$E \cap F = \{0\}$$

De plus, on a :

$$\dim(E) + \dim(F) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$$

ce qui nous permet maintenant de conclure : $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$.

Méthode

Si l'on cherche à prouver que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E, on peut :

- si E est de dimension finie et si l'on connaît les dimensions respectives de F et G, montrer que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ et $F \cap G = \{0\}$,
- si E est de dimension finie et si l'on connaît des bases de F et G, montrer que la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E,
- sinon, montrer (le plus souvent par analyse-synthèse) que :

$$\forall x \in E,\ \exists!(x_F, x_G) \in F \times G,\ x = x_F + x_G$$

Exercice 4 –

1. On peut remarquer que :

On va commencer par chercher la dimension de G.

$$\begin{aligned} G &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ z = -3x - 2t\} \\ &= \{(x, y, -3x - 2t, t),\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x\,(1, 0, -3, 0) + y\,(0, 1, 0, 0) + t\,(0, 0, -2, 1)\,,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \text{Vect}((1, 0, -3, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, -2, 1)) \end{aligned}$$

donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Par ailleurs, on a, pour tout $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} x\,(1, 0, -3, 0) + y\,(0, 1, 0, 0) + t\,(0, 0, -2, 1) = 0 &\iff (x, y, -3x - 2t, t) = 0 \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ -3x - 2t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y = t = 0 \end{aligned}$$

Ainsi la famille $((1, 0, -3, 0),, (0, 1, 0, 0)(0, 0, -2, 1))$ est libre,; de plus elle est génératrice de G par construction, donc c'est une base de G et :

$$\dim(G) = 3$$

De plus, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et le vecteur $(3, 0, 1, 2)$ n'est pas nul, donc :

$$\dim(F) = 1$$

d'où :

$$\dim(F) + \dim(G) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4) \tag{1.2}$$

Soit alors $x = (a, b, c, d)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. On a :

Comme on connaît les dimensions de F et G, il nous suffit maintenant de prouver que $F \cap G = \{0\}$

$$\begin{aligned} x \in F \cap G &\iff \begin{cases} x \in F \\ x \in G \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \exists \alpha \in \mathbb{R},\ x = (a, b, c, d) = (3\alpha, 0, \alpha, 2\alpha) \\ 3a + c + 2d = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \exists \alpha \in \mathbb{R},\ x = (3\alpha, 0, \alpha, 2\alpha) \\ 14\alpha = 0 \end{cases} \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

d'où :

$$F \cap G = \{0\}$$

ce qui nous permet de conclure, avec (1.2) : $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

2. On peut remarquer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et que :

$$(-1, 1, 0, -1) + (2, 1, 0, 0) = (1, 2, 0, -1)$$

donc, en notant $x = (-1, 1, 0, -1)$, $y = (2, 1, 0, 0)$ et $z = -(1, 2, 0, -1)$, on a trouvé un triplet (x, y, z) appartenant à $F \times G \times H$ tel que $x + y + z = 0$ et $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, ce qui prouve que la somme $F + G + H$ n'est pas directe.

À retenir

Se souvenir que trois sous-espaces vectoriels F, G, H de E sont en somme directe dans E si et seulement si :

$$\forall (x, y, z) \in F \times G \times H,\ x + y + z = 0 \Longrightarrow x = y = z = 0$$

Par conséquent, s'il existe $(a, b, c) \in F \times G \times H$ tel que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $a = b + c$, alors la somme $F + G + H$ n'est pas directe (prendre $(x, y, z) = (a, -b, -c)$ dans l'implication précédente).

Exercice 5 –

◇ Supposons que la somme $F + G + H$ soit directe.

À retenir

Si la somme de trois sous-espaces vectoriels (ou plus) E_1, E_2, E_3 de E est directe, alors :

$$\forall (x, y, z), (x', y', z') \in E_1 \times E_2 \times E_3,\ x + y + z = x' + y' + z' \Longrightarrow (x, y, z) = (x', y', z')$$

- Soit $x \in F \cap G$. En notant $(a, b, c) = (x, 0, 0)$ et $(a', b', c') = (0, x, 0)$, on a alors :

$$a + b + c = a' + b' + c'$$

et donc, comme (a, b, c) et (a', b', c') appartiennent à $F \times G \times H$ et comme la somme $F + G + H$ est directe :

$$(a, b, c) = (a', b', c')$$

donc en particulier :

$$x = 0$$

Comme $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E, on en déduit :

$$F \cap G = \{0\}$$

- Soit $x \in (F + G) \cap H$. Comme x appartient à $F + G$, il existe $(y, z) \in F \times G$ tel que :

$$x = y + z$$

et, en notant $(a, b, c) = (y, z, 0)$ et $(a', b', c') = (0, 0, x)$, on a alors :

$$a + b + c = a' + b' + c'$$

et donc, comme (a, b, c) et (a', b', c') appartiennent à $F \times G \times H$ et comme la somme $F + G + H$ est directe :

$$(a, b, c) = (a', b', c')$$

donc en particulier :

$$x = 0.$$

Comme $(F + G) \cap H$ est un sous-espace vectoriel de E, on en déduit :

$$(F + G) \cap H = \{0\}$$

◇ Réciproquement, supposons que :

$$F \cap G = \{0\} \quad \text{et} \quad (F + G) \cap H = \{0\}$$

Méthode

Pour montrer que la somme de trois sous-espaces vectoriels (ou plus) E_1, E_2, E_3 de E est directe, on peut montrer que :

$$\forall (x, y, z) \in E_1 \times E_2 \times E_3,\ x + y + z = 0 \Longrightarrow x = y = z = 0$$

Soit $(x, y, z) \in F \times G \times H$ tel que :

$$x + y + z = 0$$

On a alors :

$$x + y = -z$$

donc, comme $(x, y) \in F \times G$ et $z \in H$:

$$(x + y) \in (F + G) \cap H \quad \text{et} \quad z \in (F + G) \cap H$$

donc, par hypothèse :

$$x + y = 0 \quad \text{et} \quad z = 0$$

De plus, comme $x + y = 0$ et comme F et G sont en somme directe (car $F \cap G = \{0\}$), on a aussi :

$$x = y = 0$$

Finalement :

$$x = y = z = 0$$

donc la somme $F + G + H$ est directe.

À retenir

On se souviendra que, si E est un espace vectoriel :

- deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$ (résultat pouvant être utilisé directement),
- trois sous-espaces vectoriels F, G, H de E sont en somme directe si et seulement si

$$F \cap G = (F + G) \cap H = \{0\}$$

(résultat hors programme, à savoir démontrer).

Exercice 6 –

1. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. E_k est inclus dans $\mathbb{R}_n[x]$ par définition et contient le polynôme nul, donc n'est pas vide. De plus, on a, comme $\mathbb{R}_n[x]$ est un espace vectoriel :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P, Q) \in E_k^2,\ \lambda P + Q \in \mathbb{R}_n[x]$$

et :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P, Q) \in E_k^2,\ \forall i \in [\![0, n]\!],\ i \neq k,\ (\lambda P + Q)(i) = \lambda P(i) + Q(i) = 0$$

donc :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P, Q) \in E_k^2,\ (\lambda P + Q) \in E_k$$

ce qui nous permet de conclure que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, E_k est un sous-espace vectoriel de E.

2. • Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On note P_k la fonction polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x - i)$$

On remarque qu'une fonction polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ appartient à E_k si et seulement si elle est divisible par P_k, donc, comme P_k est un polynôme de degré n :

Si P est une fonction polynôme, des réels distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont racines de P si et seulement si $\prod_{k=1}^{p} (x - \lambda_k)$ divise P.

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x],\ P \in E_k \iff \exists\, a \in \mathbb{R} \,/\, P = a\, P_k$$

c'est-à-dire

$$E_k = \text{Vect}(P_k)$$

Comme P_k n'est pas la fonction polynôme nulle, on en déduit que (P_k) est une base de E_k et que E_k est de dimension 1.

- Montrons alors que la somme est directe, en montrant que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$. Pour tout $(\lambda_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0 \Longrightarrow \forall j \in [\![0, n]\!],\ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(j) = 0$$

d'où, comme $P_k(j) = 0$ si $j \neq k$:

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0 \Longrightarrow \forall j \in [\![0, n]\!],\ \lambda_j P_j(j) = 0$$

et comme $P_j(j) \neq 0$ (produit de $n+1$ réels tous non nuls) :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0 \Longrightarrow \forall j \in [\![0, n]\!],\ \lambda_j = 0$$

Ainsi, la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre. Comme elle est formée de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[x]$, qui est de dimension $n+1$, elle en forme donc une base, ce qui nous permet de conclure

$$\mathbb{R}_n[x] = E_0 \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$$

Méthode

Si $E_1, \dots, E_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E dont on connaît des bases respectives $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p$, pour montrer que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p$, on peut prouver que la concaténation de $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p$ est une base de E.

Exercice 7 –

1. • Soit $P \in F \cap G$. On a :

On commence par prouver que F et G sont en somme directe.

$$\forall k \in [\![0, 3]\!],\ P(k) = 0$$

donc P admet au moins quatre racines distinctes. Or P est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3, donc $P = 0$. Comme $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E (en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels de E), on a donc :

$$F \cap G = \{0\}$$

donc la somme $F + G$ est directe.

• Soit $P \in I$.

On va montrer que tout élément de I s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Comme 1 et 2 sont racines de P et comme P appartient à $\mathbb{R}_3[x]$, il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)(x-2)(ax+b)$$

◇ Supposons qu'il existe $(P_F, P_G) \in F \times G$ tel que : $P = P_F + PG$.
$0, 1, 2$ sont racines de P_F, tandis que $1, 2, 3$ sont racines de P_G, donc, comme P_F et P_G appartiennent à $\mathbb{R}_3[x]$, il existe deux réels c et d tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_F(x) = c\,x(x-1)(x-2) \quad \text{et} \quad P_G(x) = d\,(x-1)\,(x-2)(x-3)$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ (x-1)(x-2)(ax+b) &= c\,x(x-1)(x-2) + d\,(x-1)\,(x-2)(x-3)\\ &= (x-1)(x-2)((c+d)\,x - 3d)\end{aligned}$$

donc, par unicité du quotient dans la division euclidienne par $(x-1)(x-2)$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ax + b = \big(c+d\big)\,x - 3d$$

d'où, par identification des coefficients :

$$\begin{cases} c + d = a \\ -3d = b \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} d = -\dfrac{b}{3} \\ c = \dfrac{3a+b}{3} \end{cases}$$

Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_F(x) = \frac{3a+b}{3}\,x(x-1)(x-2) \quad \text{et} \quad P_G(x) = -\frac{b}{3}\,(x-1)\,(x-2)(x-3) \quad (1.3)$$

Ainsi, si un tel couple existe, il est unique.

◇ De plus, si l'on considère les fonctions polynômes définies par (1.3), on peut remarquer que :

$$P_F \in F, \quad P_G \in G$$

et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ P_F(x) + P_G(x) &= \frac{3a+b}{3}\,x(x-1)(x-2) - \frac{b}{3}\,(x-1)\,(x-2)(x-3)\\ &= (x-1)(x-2)\left(\left(a + \frac{b}{3}\right)x - \frac{b}{3}\,(x-3)\right)\\ &= (x-1)(x-2)(ax+b)\\ &= P(x)\end{aligned}$$

Finalement, on a donc prouvé que :

$$\forall P \in I,\ \exists!(P_F, P_G) \in F \times G,\ P = P_F + P_G$$

c'est-à-dire : $I \subset F \oplus G$.

• Soit $P \in F \oplus G$. Il existe $(P_F, P_G) \in F \times G$ tel que :

$$P = P_F + P_G$$

Ne pas oublier de vérifier que $P_1 \oplus P_2$ est inclus dans I !

et alors, comme P_F et P_G appartiennent respectivement à F et G :

$$\forall i \in \{1, 2\},\ P(i) = P_F(i) + P_G(i) = 0$$

donc :

$$P \in I$$

Ainsi $P_1 \oplus P_2$ est inclus dans I, ce qui nous permet de conclure que P_1 et P_2 sont supplémentaires dans I.

2. F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de E. Soit $P \in E$.

◇ Supposons qu'il existe $(P_F, P_G, P_H) \in F \times G \times H$ tel que : $P = P_F + P_G + P_H$.
Comme P_F appartient à $\mathbb{R}_3[x]$ et admet 0, 1 et 2 comme racines, il existe un réel α tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_F(x) = \alpha x\,(x-1)\,(x-2)$$

De même, il existe un réel β tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_G(x) = \beta\,(x-1)\,(x-2)(x-3)$$

Par ailleurs, P_H appartient à H donc vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = P(-x)$. En notant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_H(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ax^3 + bx^2 + cx + d = -ax^3 + bx^2 - cx + d$$

et donc, par identification des coefficients :

$$a = c = 0$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \alpha x\,(x-1)\,(x-2) + \beta\,(x-1)\,(x-2)(x-3) + bx^2 + d$$

En évaluant cette égalité respectivement en $0, 1, 2, 3$, on obtient alors :

$$\begin{cases} P(0) = -6\beta + d \\ P(1) = b + d \\ P(2) = 4b + d \\ P(3) = 6\alpha + 9b + d \end{cases}$$

donc (on trouve b en faisant $L_3 - L_2$ et d en faisant $4L_2 - L_3$) :

$$\begin{cases} 6\beta = -P(0) + d \\ b = \dfrac{P(2) - P(1)}{3} \\ d = \dfrac{4P(1) - P(2)}{3} \\ 6\alpha = P(3) - 9b - d \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{-3P(0) + 4P(1) - P(2)}{18} \\ b = \dfrac{P(2) - P(1)}{3} \\ d = \dfrac{4P(1) - P(2)}{3} \\ \alpha = \dfrac{5P(1) - 8P(2) + 3P(3)}{3} \end{cases}$$

Finalement, si un tel triplet (P_F, P_G, P_H) existe, alors il vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} P_F(x) = \dfrac{5P(1) - 8P(2) + 3P(3)}{18}\, x\,(x-1)\,(x-2) \\ P_G(x) = \dfrac{-3P(0) + 4P(1) - P(2)}{18}\,(x-1)\,(x-2)(x-3) \\ P_H(x) = \dfrac{P(2) - P(1)}{3}\, x^2 + \dfrac{4P(1) - P(2)}{3} \end{cases} \tag{1.4}$$

◇ Considérons maintenant les polynômes P_F, P_G et P_H définis par (1.4). De manière immédiate, on peut remarquer que :

$$P_F \in F, \quad P_G \in G \quad \text{et} \quad P_H \in H$$

De plus, en notant $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, on a :

$P(0) = d$, $\quad P(1) = a + b + c + d$, $\quad P(2) = 8a + 4b + 2c + d$, $\quad P(3) = 27a + 9b + 3c + d$

donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ P_F(x) &= \frac{11a - c}{9}\, x\,(x-1)\,(x-2) \\ &= \frac{11a - c}{9}\, x^3 - \frac{11a - c}{3}\, x^2 + \frac{22a - 2c}{9}\, x \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ P_G(x) &= \frac{-2a + c}{9}\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3) \\ &= \frac{-2a + c}{9}\, x^3 + \frac{4a - 2c}{3}\, x^2 + \frac{-22a + 11c}{9}\, x + \frac{4a - 2c}{3} \end{aligned}$$

et enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_H(x) = \frac{7a+3b+c}{3}\,x^2 + \frac{-4a+2c+3d}{3}$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ P_F(x) + P_G(x) + P_H(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ &= P(x)\end{aligned}$$

Finalement, on a prouvé que :

$$\forall P \in E,\ \exists!(P_F, P_G, P_H) \in F \times G \times H,\ P = P_F + P_G + P_H$$

ce qui nous permet de conclure : $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 8 –

1. Faux. Par exemple on considère le cas $E = \mathbb{R}^2$ et :

$$F = \text{Vect}((1,0)), \quad G = \text{Vect}((0,1)) \quad \text{et} \quad H = \text{Vect}((1,1))$$

On peut en effet remarquer que $F \cap G = \{0\}$ donc on a bien :

$$F \cap G \cap H = \{0\}$$

Pourtant la somme $F + G + H$ n'est pas directe puisque :

$$(1,1) = (1,0) + (0,1)$$

où $(1,1), (1,0), (0,1)$ appartiennent respectivement à H, F, G.

2. Faux. On peut également considérer l'exemple précédent. Les familles $((1,0),(0,1))$ et $((1,0),(1,1))$ étant des bases de $\mathbb{R}^2$, on a bien :

$$\mathbb{R}^2 = F \oplus G = F \oplus H$$

et pourtant $G \neq H$ puisque, par exemple, le vecteur $(0,1)$ appartient à G mais pas à H.

À retenir

On se souviendra que si F est un sous-espace vectoriel de E, il n'y a en général pas unicité d'un supplémentaire de F dans E.

2 Changement de bases

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ deux bases de E, P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ et f un endomorphisme dont les matrices associées respectives dans $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont A et B.

1. P^{-1} est la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$. ☐ Vrai ☐ Faux

2. Si X est la colonne des coordonnées de $x \in E$ dans $\mathscr{B}$, alors PX est la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{C}$. ☐ Vrai ☐ Faux

3. $A = PBP^{-1}$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

On considère les vecteurs de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ suivants :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que (X_1, X_2) est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et déterminer la matrice de passage P de la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ à la base (X_1, X_2).

2. Déterminer la matrice de passage de la base (X_1, X_2) à la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 3 –

On considère une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ ainsi que les vecteurs suivants :

$$u_1 = -2e_1 - e_3, \quad u_2 = e_1 + e_2, \quad u_3 = e_1 + e_2 - e_3$$

1. Montrer que $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$.

3. Déterminer la matrice P^{-1}.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$u = (0, 1, -2) \quad \text{et} \quad v = (0, 1, -1)$$

1. Calculer $f(u)$ et $f(v)$.
2. Déterminer tous les vecteurs $t = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(t) = t + v$.
3. Déterminer un vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la troisième coordonnée (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) est nulle, tel que la famille $\mathscr{C} = (u, v, w)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$ soit la matrice
$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
4. Donner la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ puis donner une expression de A en fonction de P et T.

Exercice 5 –

On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et on considère la famille $\mathscr{C} = (P_k)_{0 \leqslant k \leqslant 3}$ définie par :

$$\forall k \in [\![0, 3]\!], \ \forall x \in \mathbb{R}, \ P_k(x) = x^k(1 - x)^{3-k}$$

1. Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$.
3. Expliciter P^{-1}.

Pour aller plus loin

Exercice 6 –

On considère les matrices A et T suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On se propose de prouver que les matrices A et T sont semblables.

Pour cela, on désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la matrice A.

1. **a)** Justifier que le noyau de $f - 2\,\mathrm{Id}$ est de dimension 2.
   b) Déterminer une base (u, v) de $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$.
2. Prouver qu'il existe un vecteur w de $\mathbb{R}^3$ tel que (u, v, w) soit une base de $\mathbb{R}^3$ et tel que la matrice de f dans cette base soit la matrice T.
3. Conclure.

Exercice 7 –

Soit n un entier naturel non nul. On considère les fonctions polynômes $P_0, P_1, \dots, P_n$ définies par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_k(x) = (x+1)^k$$

1. Montrer que la famille $\mathscr{C} = (P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Déterminer la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ à la base $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. Expliciter la matrice P^{-1}.

Exercice 8 – Le vrai/faux de la fin

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ deux bases de E, P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ et f un endomorphisme dont les matrices associées respectives dans $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont A et B.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables ☐ Vrai ☐ Faux
2. Si A et B sont semblables, et si B et C sont semblables, alors A et C sont semblables. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. P^{-1} est la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$ ☒ Vrai ☐ Faux
2. Faux, mais si X est la colonne des coordonnées de $x \in E$ dans $\mathscr{C}$, alors PX est la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$ ☐ Vrai ☒ Faux
3. $A = PBP^{-1}$ ☒ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

1. • Les vecteurs X_1 et X_2 ne sont pas proportionnels donc forment une famille libre. Comme la famille (X_1, X_2) est libre et formée de 2 vecteurs de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et comme $\dim(\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})) = 2$, la famille (X_1, X_2) est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

   • On peut alors écrire : $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Cours

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ deux bases de E. Pour obtenir la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$, il suffit d'écrire, en colonne et dans cet ordre, les coordonnées de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ dans la base $\mathscr{B}$.

2. Comme P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ à la base (X_1, X_2), on sait que P est inversible et que P^{-1} est la matrice de passage de la base (X_1, X_2) à la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

De plus on a :

$$\det(P) = 1 \times 1 - 2 \times 1 = -1$$

donc :

$$P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi la matrice de passage de la base (X_1, X_2) à la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 –

1. $\mathscr{C}$ étant formée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^3$ étant de dimension 3, $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si elle est libre. De plus, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = (-2a + b + c)\, e_1 + (b + c)\, e_2 + (-a - c)\, e_3$$

donc, comme (e_1, e_2, e_3) est libre :

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} -2a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ -a - c = 0 \end{cases}$$

d'où, par substitution :

$$\begin{aligned} au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 &\Longrightarrow \begin{cases} -2a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ -a - c = 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} 2c = 0 \\ b = -c \\ a = -c \end{cases} \\ &\Longrightarrow a = b = c = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\mathscr{C}$ est libre, donc on peut conclure, d'après la remarque initiale, que la famille $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. On a alors : $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On obtient P en écrivant en colonne les coordonnées des vecteurs u_1, u_2, u_3 dans $\mathscr{B}$.

3. P^{-1} est donc la matrice de passage de la base (u_1, u_2, u_3) à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Or on a :

$$\begin{cases} u_1 = -2\,e_1 - e_3 \\ u_2 = e_1 + e_2 \\ u_3 = e_1 + e_2 - e_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -2\,e_1 - e_3 = u_1 \\ e_1 + e_2 = u_2 \\ e_3 = u_2 - u_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2e_1 = -u_1 + e_3 \\ e_2 = u_2 - e_1 \\ e_3 = u_2 - u_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e_1 = \dfrac{1}{2}\,(-u_1 - u_2 + u_3) \\ e_2 = \dfrac{1}{2}\,(u_1 + 3u_2 - u_3) \\ e_3 = u_2 - u_3 \end{cases}$$

d'où : $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 –

1. On a :

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc $f(u) = 0$ et $f(v) = v$.

2. Soit $t = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. On a, en notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$f(t) = t + v \iff AX = X + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff (A - I)\,X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 2y - 2z = -1 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$$

$$f(t) = t + v \iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 4x = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} z = \frac{3}{4} - y \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

ce qui nous permet de conclure :

$$f(t) = t + v \iff t \in \left\{ \left(\frac{1}{4}, y, \frac{3}{4} - y \right),\ y \in \mathbb{R} \right\}$$

3. S'il existe un vecteur w tel que la famille (u, v, w) soit une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f soit T, alors on doit avoir (compte tenu de la dernière colonne) : $f(w) = v + w$.
Avec le résultat de la question précédente, on pose par exemple :

$$w = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0 \right)$$

Si le choix du vecteur peut se faire assez vite avec la question précédente, il ne faudra pas oublier de justifier que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$!

Montrons que la famille $\mathscr{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$au + bv + cw = 0 \iff \left(\frac{c}{4}, a + b + \frac{3c}{4}, -2a - b \right) = (0, 0, 0)$$
$$\iff \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 0 \\ -2a - b = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} c = 0 \\ b = -a \\ -a = 0 \end{cases}$$
$$\iff a = b = c = 0$$

Ainsi la famille (u, v, w) est libre. De plus elle est formée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, qui est de dimension 3, donc c'en est une base. Enfin, on a :

$$f(u) = 0, \quad f(v) = v \quad \text{et} \quad f(w) = v + w$$

donc la matrice de f dans la base C est bien la matrice T, ce qui nous permet de conclure que le vecteur $w = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0 \right)$ convient.

4. On a alors directement :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 1 & 3/4 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = PTP^{-1}$$

Exercice 5 –

1. $\mathscr{C}$ est formée de 4 fonctions polynômes de degré 3, donc appartenant tous à $\mathbb{R}_3[x]$, qui est de dimension 4, donc $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$ si et seulement si elle est libre. Soit alors $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$aP_0 + bP_1 + cP_2 + dP_3 = 0$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a(1-x)^3 + bx(1-x)^2 + cx^2(1-x) + dx^3 = 0$$

donc, en évaluant respectivement en 0 et en 1 :

$$a = 0 \quad \text{et} \quad d = 0$$

Il en découle :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ bx(1-x)^2 + cx^2(1-x) = 0$$

soit encore :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x(1-x)(b(1-x) + cx) = 0$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ b(1-x) + cx = 0$$

Un produit de fonctions polynômes est nul si et seulement si l'une des fonctions polynômes est nulle (on aurait aussi pu évaluer l'égalité par exemple en 2 et -1 puis résoudre un système pour trouver $b = c = 0$).

On en déduit, de nouveau en évaluant en 0 et en 1 :

$$b = 0 \quad \text{et} \quad c = 0$$

Finalement, on a prouvé que :

$$aP_0 + bP_1 + cP_2 + dP_3 = 0 \Longrightarrow a = b = c = d = 0$$

Ainsi, $\mathscr{C}$ est une famille libre, ce qui permet de conclure, d'après la remarque initiale, que la famille $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= (1-x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \\ P_1(x) &= x(1-x)^2 = x - 2x^2 + x^3 \\ P_2(x) &= x^2(1-x) = x^2 - x^3 \\ P_3(x) &= x^3 \end{aligned}$$

En notant (e_0, e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$, on a donc :

$$\begin{cases} P_0 = e_0 - 3e_1 + 3e_2 - e_3 \\ P_1 = e_1 - 2e_2 + e_3 \\ P_2 = e_2 - e_3 \\ P_3 = e_3 \end{cases}$$

d'où : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. En reprenant les égalités précédentes et en procédant par substitution à partir de la dernière ligne, on obtient :

$$\begin{cases} e_0 = P_0 + 3P_1 + 3P_2 + P_3 \\ e_1 = P_1 + 2P_2 + P_3 \\ e_2 = P_2 + P_3 \\ e_3 = P_3 \end{cases}$$

donc, comme P^{-1} est la matrice de passage de (P_0, P_1, P_2, P_3) à (e_0, e_1, e_2, e_3) :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 –

1. **a)** On a :

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que toutes les colonnes de $A - 2I_3$ sont proportionnelles et non nulles, donc $A - 2I_3$ est de rang 1. Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, on en déduit, avec le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})) = \dim(\mathbb{R}^3) - \mathrm{rg}(f - 2\,\mathrm{Id}) = 2$$

b) Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} (A - 2I_3)X = 0 &\iff x - y + z = 0 \\ &\iff y = x + z \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ x + z \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc, comme $A - 2I_3$ est la matrice de $f - 2\,\mathrm{Id}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$$

De plus les vecteurs $u = (1, 1, 0)$ et $v = (0, 1, 1)$ ne sont pas colinéaires, donc ils forment une famille libre. Ainsi la famille (u, v) ainsi définie est une base de $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$.

2. Supposons qu'il existe un vecteur w de $\mathbb{R}^3$ tel que

On commence par trouver une condition sur w pour que la matrice T convienne.

(u, v, w) soit une base de $\mathbb{R}^3$ et tel que la matrice de f dans cette base soit la matrice T. On a alors, compte tenu de la troisième colonne de T :

$$f(w) = u + v + 2w$$

Soit alors $w = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} f(w) = u + v + 2w &\iff AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2X \\ &\iff (A - 2I_3)\, X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff x - y + z = 1 \end{aligned}$$

En particulier, on observe que le triplet $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ convient, donc on pose :

Il nous reste à vérifier que la famille (u, v, w) ainsi construite est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

$$w = (1, 1, 1)$$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 &\iff a\,(1, 1, 0) + b\,(0, 1, 1) + c\,(1, 1, 1) = 0 \\ &\iff (a + c, a + b + c, b + c) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} a + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = -c \\ b = 0 \\ b = -c \end{cases} \\ &\iff a = b = c = 0 \end{aligned}$$

Ainsi la famille (u_1, u_2, u_3) est libre. De plus elle contient trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Enfin on a :

$$f(u) = 2u, \quad f(v) = 2v \quad \text{et} \quad f(w) = u + v + 2w$$

donc la matrice associée à f dans cette base est la matrice T.

3. Comme il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est A et comme il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est T, on peut conclure que A et T sont semblables.

Méthode

On retiendra la méthode utilisée ici, très fréquente pour montrer que deux matrices sont semblables (et pas toujours aussi détaillée qu'ici).
Pour montrer que deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables, on peut noter f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à la matrice A et montrer (en général par analyse-synthèse) qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice associée à f est la matrice B.

Exercice 7 –

1. La famille $\mathscr{C}$ est échelonnée en degrés donc libre ; de plus elle est formée de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[x]$, qui est de dimension $n+1$, donc la famille $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

2. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\forall j \in [\![1, n+1]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ (x+1)^{j-1} = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} x^k = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} x^{i-1}$$

et donc, comme $\binom{j-1}{i-1} = 0$ si $j < i$:

$$P = \left(\binom{j-1}{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

Attention au décalage dans l'indexation : la $j^{ème}$ colonne de P contient les coordonnées de P_{j-1} dans la base canonique, et non celles de P_j !

3. P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathscr{C}$ à la base $\mathscr{B}$. Or on peut remarquer, à l'aide de la formule du binôme de Newton, que :

$$\begin{aligned} \forall j \in [\![1, n+1]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ x^{j-1} &= (x+1-1)^{j-1} \\ &= \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} (-1)^{j-1-k} (x+1)^k = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} (-1)^{j-i} (x+1)^{i-1} \end{aligned}$$

et donc :

$$P = \left((-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} = \begin{pmatrix} (-1)^{0-0}\binom{0}{0} & (-1)^{1-0}\binom{1}{0} & \cdots & \cdots & (-1)^{n}\binom{n}{0} \\ 0 & (-1)^{1-1}\binom{1}{1} & \ddots & \ddots & (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & (-1)^{n-n}\binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

Exercice 8 –

1. Faux. A et B sont triangulaires donc, comme A n'a pas de coefficient diagonal nul, elle est inversible tandis que B, qui a un coefficient diagonal nul, n'est pas inversible.

> **Cours**
> Si A est B sont deux matrices semblables, elles ont le même rang donc, en particulier, A est inversible si et seulement si B est inversible.

2. Vrai. Si A et B sont semblables et si B et C sont semblables, il existe deux matrices P et Q inversibles et telles que :

$$A = PBP^{-1} \quad \text{et} \quad B = QCQ^{-1}$$

On a alors :

$$A = PQCQ^{-1}P^{-1} = PQC\left(PQ\right)^{-1}$$

donc A et C sont semblables.

3 Réduction des matrices carrées

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Si A est inversible, 0 est valeur propre de A. ☐ Vrai ☐ Faux

2. Une matrice symétrique est diagonalisable. ☐ Vrai ☐ Faux

3. Si $AX = \lambda X$ alors λ est valeur propre de A. ☐ Vrai ☐ Faux

4. Si A est diagonalisable, il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Pour chacune des matrices suivantes, déterminer ses valeurs propres, ses sous-espaces propres, dire si elle est diagonalisable et, le cas échéant, écrire la matrice sous la forme PDP^{-1} où D est une matrice diagonale et P une matrice inversible :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 –

Dans cet exercice, on note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on s'intéresse à la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 - 4A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.

2. **a)** Déterminer la seule valeur propre de A.

b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice $B = A^2 + 2I$ puis vérifier que $B^2 = B + 2I$.
2. **a)** Déterminer les valeurs propres de B et leurs sous-espaces propres associés respectifs.
   b) B est-elle diagonalisable ?
3. **a)** À l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs propres de A.
   b) A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5 –

Dans cet exercice, on note I la matrice identité d'ordre 3 et A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les matrices $(A - I)^2$ et $(A - I)^3$.
2. En déduire l'ensemble des valeurs propres de A.
3. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

Exercice 6 –

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $A^2 = I_3$. On suppose de plus que A n'est pas un multiple de I_3.

1. Justifier que : $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$.
2. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de A. Que peut-on dire de $A - I_3$? En déduire que $A + I_3 = 0$.
3. Prouver que $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}$.

Pour aller plus loin

Exercice 7 –

Soit p un entier supérieur ou égal à 2 et A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose que A est une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel n tel que : $A^n = 0$.

1. A est-elle inversible ?
2. Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 8 –

On envisage la matrice A de $M_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère un entier naturel n pair non nul et on s'intéresse à l'équation $(E_n) : X^n = A$, d'inconnue X dans $M_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Soit B une solution de (E_n). Montrer que A et B commutent et que tout vecteur propre de A est aussi un vecteur propre de B.
3. Conclure.

Exercice 9 –

On considère un entier naturel n non nul et la matrice M_n de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ dont les coefficients des lignes impaires sont tous égaux à -1 et ceux des lignes paires sont tous égaux à 1. Par exemple, on a :

$$M_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Quel est le rang de M_n ? En déduire une valeur propre de M_n et la dimension de son sous-espace propre associé.
2. Que vaut la trace de M_n ? En déduire que M_n n'est pas diagonalisable.

Exercice 10 –

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On note :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note alors : $N = A - I_3$ et $M = N^2 - N$. On note enfin u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ respectivement associés aux matrices N et M dans la base canonique.

1. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si le rang de u est nul.
2. Prouver que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de I_3 et de M.
3. On suppose que le rang de u est égal à 2.
   a) Montrer qu'il existe un vecteur x de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathcal{B} = (u^2(x), u(x), x)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) En déduire que N est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   c) Quelle est la matrice de v dans la base $\mathcal{B}$? Les matrices M et N sont-elles semblables ?
   d) Prouver que A et A^{-1} sont semblables.