

LE CHAMP ÉLECTRO- MAGNÉTIQUE

Des notions
fondamentales aux
méthodes avancées

Licence
Master

Gérard Smadja
Yannick Copin



LE CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Des notions fondamentales
aux méthodes avancées

Gérard Smadja
Yannick Copin



Collection Formations & Techniques

dirigée par Paul de Laboulaye

paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr



ISBN 9782340-035508

©Ellipses Édition Marketing S.A., 2021

32, rue Bague 75740 Paris cedex 15



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-3 (et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Ce cours est issu d'un enseignement de l'électromagnétisme donné pendant plusieurs années à l'Université de Lyon, mais il s'est enrichi au fil du temps de compléments qui ne pouvaient être abordés dans le cadre d'un cours limité à quelques dizaines d'heures en premier cycle.

D'excellents ouvrages de base comme celui de LANDAU ET LIFCHITZ (1989), ou de JACKSON (1998) sont disponibles. Nous avons souhaité les compléter par des développements plus récents, tels l'usage étendu d'équations intégrales, une discussion plus approfondie des fonctions de Green, et la présentation de nouvelles méthodes d'approximation comme la diffraction géométrique, qui repose sur la connaissance de certaines solutions analytiques.

Nous n'avons aucune prétention à la rigueur mathématique, tout en nous efforçant d'éviter les inexactitudes. Seul le chapitre « Covariance des équations de Maxwell dans les milieux matériels » (Chap. 18, p. 207) suppose une familiarité avec la relativité restreinte, dont les notions de base sont considérées comme préalablement acquises. Le contenu de ce cours est trop diversifié (sans être complet) pour pouvoir être enseigné dans sa totalité en une année de licence ou de master, mais les sujets inclus ouvriront (peut-être) des perspectives aux étudiants motivés et permettront aux enseignants d'enrichir les thématiques qu'ils souhaitent exposer.

Nous remercions nos collègues de l'équipe de *Cosmologie Observationnelle* de l'Institut de Physique des Deux Infinis (IP2I) de Lyon, ainsi que tous les collaborateurs de l'expérience « *Nearby Supernovae Factory* », à Berkeley, en France et en Allemagne, pour l'excellente atmosphère de travail maintenue dans cette collaboration pendant une vingtaine d'années. Nous remercions également les porte-paroles des diverses collaborations qui nous ont donné, au CERN, l'occasion de nous confronter à divers aspects instrumentaux de l'électromagnétisme : M. Banner, C. Rubbia, U. Amaldi. Les remarques de Xavier Artru ont été utiles en de nombreuses occasions. Nous sommes également reconnaissants aux documentalistes de l'IP2I, Dominique Girod et Sylvie Florès, de l'aide qu'elles ont apportée, et à nos familles respectives de leur patience.

Gérard Smadja (g.smadja@ipnl.in2p3.fr),
Yannick Copin (y.copin@ipnl.in2p3.fr).

Table des matières

Avant-propos	III
1 Introduction à l'électromagnétisme	1
1.1 Contexte théorique : les champs et le lagrangien	1
1.2 4-potentiel A_μ	1
1.3 Équations de Maxwell	3
1.4 Analyse des équations de Maxwell dans le cas stationnaire	4
1.5 Des champs aux potentiels	7
1.6 Charges élémentaires	8
Exercices et corrigés	8
2 L'équation de Poisson	11
2.1 Généralités	11
2.2 Fonctions de Green	13
2.3 Équations intégrales des fonctions de Green	16
2.4 Équivalence électrostatique : le potentiel	19
Exercices et corrigés	19
3 Électrostatique des conducteurs	25
3.1 Relation d'Ohm dans les conducteurs	25
3.2 Équilibre électrostatique des conducteurs	26
3.3 Régimes non-stationnaires dans un conducteur	26
3.4 Coefficients d'influence	28
3.5 Expression du champ par des intégrales de surface	31
3.6 Équivalence électrostatique	32
Exercices et corrigés	33
4 Électrostatique des milieux diélectriques	37
4.1 Moment dipolaire d'un système de charges	37
4.2 Diélectrique neutre	38
4.3 Charges de surface et de volume	38
4.4 Vecteur induction diélectrique	39
4.5 Relations de constitution	40
4.6 Champ local	40
4.7 Symétrie du tenseur diélectrique	41

4.8 Conditions aux limites	42
4.9 Forces dans les diélectriques	43
4.10 Condensateurs et capacités.	44
Exercices et corrigés	44
5 Solution de quelques problèmes d'électrostatique	51
5.1 Problèmes à deux dimensions	51
5.2 Problèmes à trois dimensions.	54
5.A Annexe : effet de pointe	55
Exercices et corrigés	56
6 Magnétostatique	63
6.1 Potentiel vecteur d'un courant	63
6.2 Moment magnétique	64
6.3 Équivalence magnétique	67
6.4 Origine microscopique et utilisations	68
Exercices et corrigés	68
7 Milieux magnétiques	75
7.1 Vecteur de magnétisation	75
7.2 Potentiel vecteur	75
7.3 Conditions aux limites	77
7.4 Types de milieux magnétiques	78
Exercices et corrigés	80
8 Énergie électrostatique d'un système de conducteurs	87
8.1 Introduction	87
8.2 Cas d'un conducteur unique	87
8.3 Système de conducteurs	88
8.4 Conservation de l'énergie électrostatique	88
8.5 Énergie électrostatique	89
8.6 Symétrie du tenseur diélectrique	89
8.7 Forces électrostatiques	90
Exercices et corrigés	90
9 Énergie magnétique	95
9.1 Énergie fournie par la variation des courants	95
9.2 Expression de l'énergie magnétique à l'aide du champ	96
9.3 Symétrie du tenseur de perméabilité	97
9.4 Self-induction	97
Exercices et corrigés	98

10 Mouvement des charges	103
10.1 Lagrangiend'interaction	103
10.2 Équations du mouvement	103
10.3 Mouvement d'une charge dans un champ magnétique	104
10.4 Appareillages	104
10.5 Force pondéromotrice	104
Exercices et corrigés	105
11 Énergie et impulsion du champ	111
11.1 Énergie transférée aux charges	111
11.2 Tenseur énergie-impulsion du champ	113
11.3 Pression de radiation	117
11.4 Symétrie des susceptibilités	118
11.5 La controverse	119
Exercices et corrigés	119
12 Champs rayonnés par les courants	127
12.1 Propagation des potentiels	127
12.2 Rayonnement de dipôles magnétiques et électriques	129
12.3 Composantes monochromatiques du champ	133
12.4 Champs à grande distance des sources	133
12.5 L'onde plane monochromatique	135
12.6 Théorème de Lorentz	136
Exercices et corrigés	138
13 Champ électromagnétique d'une charge ponctuelle	145
13.1 Introduction	145
13.2 4-potentiel : méthode temporelle	145
13.3 4-potentiel : méthode spatiale	146
13.4 Champs	147
13.5 Mouvements particuliers	148
13.6 Formule de Larmor non-relativiste	149
13.7 Formule de Larmor relativiste	149
13.8 Réaction de rayonnement et paradoxes	150
Exercices et corrigés	155
14 Équations de Maxwell dans les milieux homogènes	161
14.1 Relations de Maxwell « exactes »	161
14.2 Propagation dans un diélectrique homogène isotrope	162
14.3 Relations de constitution	163

14.4 Milieux diélectriques et magnétiques anisotropes	164
14.5 Milieux bi-isotropes	165
14.6 Symétrie de renversement du temps	166
14.7 Propagation dans un milieu chiral bi-isotrope	166
14.8 Symétrie de parité	168
14.9 Modèle moléculaire	168
14.10 Matrices de constitution dans les milieux optiquement actifs	168
14.11 Milieu absorbant : tenseur diélectrique non hermitien	169
14.12 Effet Faraday	170
14.13 Limites à haute fréquence	170
14.14 Équations du champ dans les conducteurs isotropes	171
Exercices et corrigés	172
15 Antenne linéaire infinie	179
15.1 Équations à l'intérieur de l'antenne	179
15.2 Équations à l'extérieur de l'antenne	181
15.3 Composantes transverses	182
15.4 Conditions aux limites à la surface	183
Exercices et corrigés	185
16 Émission dipolaire d'une antenne	187
16.1 Courant dans une antenne linéaire	187
16.2 Antenne dans l'approximation dipolaire	190
16.3 Rayonnement d'un dipôle magnétique	191
16.4 Théorème de réciprocité pour les antennes	192
Exercices et corrigés	193
17 Des ondes aux rayons	199
17.1 De l'onde aux trajectoires	199
17.2 Milieux anisotropes	202
Exercices et corrigés	204
18 Covariance des équations de Maxwell	207
18.1 Changement de repère galiléen	207
18.2 Tenseur énergie-impulsion du champ : formalisme général	210
18.3 Entraînement par le milieu	215
18.4 Changement général de coordonnées	215
18.5 Interprétation géométrique de la transformation	216
Exercices et corrigés	217
19 Réfraction dans un diélectrique homogène	225

19.1 Sources du champ réfracté	225
19.2 Théorème d'extinction d'Ewald-Oseen	227
19.3 Réfraction : coefficients de Fresnel	230
19.4 Diffusion par une charge libre : diffusion Thomson	232
19.5 Diffusion par une molécule neutre : diffusion Rayleigh	233
19.6 Section efficace de diffusion	234
Exercices et corrigés	235
20 Diffusion par un milieu diélectrique hétérogène	239
20.1 Milieux homogènes et hétérogènes	239
20.2 Diffusion par un gaz : diffusion Rayleigh	239
20.3 Diffusion par un liquide	242
Exercices et corrigés	244
21 Rayonnement Cerenkov	247
21.1 Phénomène observé	247
21.2 Spectre en fréquences	248
Exercices et corrigés	251
22 Rayonnement de transition	255
22.1 Introduction	255
22.2 Cas d'un plan conducteur	255
22.3 Solution directe par les 4-potentiels	256
22.4 Spectre en fréquences	257
22.5 Rayonnement de transition	259
Exercices et corrigés	262
23 Diffraction dans l'approximation de Kirchoff	263
23.1 Introduction	263
23.2 Équation de Helmholtz, diffraction par une ouverture	263
23.3 Approximation de Kirchoff	265
Exercices et corrigés	269
24 Principe de Huyghens vectoriel	273
24.1 Champ à l'extérieur d'une surface fermée	273
24.2 Courants et charges magnétiques équivalents	274
24.3 Équations intégrales de la diffusion	279
24.4 Équivalence de Love	283
24.5 Équivalence de Schelkunoff	283
24.6 Ouverture dans un plan conducteur	285
24.A Annexe : équations intégrales de Chu-Stratton	287

Exercices et corrigés	289
25 Diffraction : solutions analytiques	297
25.1 Demi-plan conducteur en incidence normale : méthode de Lamb	297
25.2 Incidence normale	297
25.3 Contribution des bords	301
25.4 Solution scalaire pour une source linéaire	302
25.5 Champ et courants pour une source linéaire	302
25.6 Équation intégrale pour un demi-plan et une source linéaire	303
25.7 Diffraction par un demi-plan	304
25.A Annexe : incidence arbitraire	307
25.B Annexe : diffraction 2D, méthode de la transformée de Fourier	309
25.C Annexe : diffraction par un cylindre circulaire conducteur	311
25.D Annexe : solutions scalaires de l'équation de Helmholtz (3D)	314
25.E Annexe : diffraction scalaire par une sphère conductrice	316
25.F Annexe : solutions vectorielles de l'équation de Helmholtz (3D)	317
25.G Annexe : diffraction vectorielle par une sphère conductrice (3D)	318
25.H Annexe : diffusion de Mie (sphère diélectrique)	320
Exercices et corrigés	321
26 Approximation géométrique de la diffraction	325
26.1 Introduction	325
26.2 Arêtes	325
26.3 Cas du cylindre circulaire conducteur	328
26.4 Cas de la sphère conductrice	332
26.A Annexe : transformation de Watson	334
26.B Annexe : fonctions de Hankel	335
26.C Annexe : fonction d'Airy	337
Exercices et corrigés	337
Formulaire	341
Bibliographie	343
Index	349

Introduction à l'électromagnétisme

1.1 Contexte théorique : les champs et le lagrangien

La charge électrique est décrite aujourd'hui comme une propriété incomplètement élucidée des particules élémentaires. Toutes les charges observées existant à l'état libre sont multiples de celle de l'électron, mais la raison de cette quantification n'est pas comprise. Elles interagissent entre elles par l'intermédiaire du champ électromagnétique.

La notion de champ a initialement été introduite pour résoudre le problème de l'action à distance : toutes les interactions des charges avec le champ sont décrites par une densité lagrangienne *locale*, construite à partir des valeurs du champ électromagnétique et des courants en un point $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ de l'espace-temps. Les phénomènes électromagnétiques impliquent la présence simultanée du potentiel électrique $U(t, \mathbf{x})$ et du potentiel vecteur $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$. La relativité restreinte unifie ces deux potentiels dans un 4-vecteur unique $A^\mu(x^\mu)$, dont les 4 composantes se transforment comme les coordonnées x^μ dans un changement de repère. Le 4-vecteur courant $j^\mu(x^\mu) = (\rho, \mathbf{j})$ permet alors de construire une densité de lagrangien d'interaction $\mathcal{L}(x^\mu) = j^\mu(x^\mu) A_\mu(x^\mu)$ invariante de Lorentz.

Les équations de Maxwell et celles du mouvement des charges découlent de l'application du principe de moindre action aux champs (sources fixées) et aux charges (pour des champs fixés). Les traités disponibles exposant cette méthode, en particulier celui de LANDAU ET LIFCHITZ (1989), étant difficiles à surpasser dans leur élégance, nous choisirons de prendre ces équations comme point de départ. Comme elles peuvent être obtenues dans un cadre relativiste, elles sont exactes dans tous les repères galiléens.

1.2 4-potentiel A^μ

Le 4-potentiel $A_\mu(x^\mu) = (A_0, -\mathbf{A})$ dépend (au plus) des quatre fonctions correspondant aux composantes A_μ . Les équations décrivant l'interaction du champ avec les charges font intervenir les tenseurs antisymétriques $F^{\mu\nu}$ ou $F_{\mu\nu}$ dont les 6 composantes sont les champs

électriques E^i et magnétiques B^i .

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (1.1)$$

où

$$A_\nu = g_{\nu\lambda} A^\lambda, \quad (1.2)$$

et $g_{\nu\nu} = (+1, -1, -1, -1)$, les autres valeurs étant nulles.

Avec la convention μ = lignes et ν = colonnes :

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -cB^3 & cB^2 \\ -E^2 & cB^3 & 0 & -cB^1 \\ -E^3 & -cB^2 & cB^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Les équations précédentes permettent d'exprimer les champs $E^i(x)$ et $B^i(x)$ à l'aide des composantes de $A_\mu(x)$. En identifiant la composante A^0 au potentiel électrostatique U , on obtient :

$$\mathbf{E} = -\nabla U - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (1.4a)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \nabla \wedge \mathbf{A}. \quad (1.4b)$$

Le potentiel n'est pas défini de façon unique : les champs $E^i(x)$ et $B^i(x)$ sont inchangés dans les transformations de jauge :

$$U = U' - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (1.5a)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla f. \quad (1.5b)$$

Cette propriété d'apparence anecdotique joue désormais un rôle clef dans la construction des interactions fondamentales, et elle doit être incorporée au lagrangien qui régit l'évolution des champs.

L'invariance du lagrangien dans cette transformation impose en particulier la conservation de la charge électrique :

$$\int j^\mu A_\mu d^4x = \int j^\mu (A_\mu + \partial_\mu f) d^4x \quad (1.6)$$

$$= \int j^\mu A_\mu d^4x + \int \partial_\mu (j^\mu f) d^4x - \int (\partial_\mu j^\mu) f d^4x. \quad (1.7)$$

En étendant l'intégrale à tout l'espace et en supposant l'absence de courants à l'infini :

$$\int (\partial_\mu j^\mu) f d^4x = 0; \quad (1.8)$$

la relation doit être vraie quelle que soit la fonction $f(x^\mu)$, et implique

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{conservation de la charge.} \quad (1.9)$$

Les actions physiques exercées sur les charges ne dépendent que des champs électriques et magnétiques $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$, qui décrivent les effets observés. Inversement, on introduit ainsi six fonctions, alors que les potentiels ne dépendent que de quatre. En outre, les conditions aux limites sont souvent imposées sur les potentiels, plutôt que sur les champs. Selon le problème à traiter, l'une ou l'autre des deux représentations du champ sera plus pratique.

1.3 Équations de Maxwell

Les *équations de Maxwell* sont obtenues à partir de la densité de lagrangien électromagnétique invariante de Lorentz

$$\mathcal{L}(x^\mu) = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + j^\mu A_\mu \quad (1.10)$$

comme l'exposent LANDAU ET LIFCHITZ (1989) en fixant les sources du champ, charges et courants.

Lorsque le 4-vecteur courant $j^\mu(x^\mu) = (\rho(x^\mu), \mathbf{j}(x^\mu)/c)$ est connu, ces équations déterminent l'évolution spatiale et temporelle des champs vectoriels E^i et B^i . La densité de charges $\rho(x^\mu)$ détermine la charge Q_V contenue dans un volume $\mathcal{V}$, tandis que la densité de courant $\mathbf{j}(x^\mu)$ est liée à l'intensité traversant une surface $\mathcal{S}$:

$$Q_V = \int_{\mathcal{V}} \rho d^3x, \quad (1.11a)$$

$$I = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d^2x. \quad (1.11b)$$

Dans un modèle où les charges élémentaires q_i sont ponctuelles :

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \sum_i q_i \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)), \quad (1.12a)$$

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)). \quad (1.12b)$$

On montre facilement que l'ensemble constitue les composantes du 4-vecteur courant électrique $j^\mu = (\rho, \mathbf{j}/c)$. Les *équations de Maxwell* décrivent l'évolution des champs $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ et $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ en fonction de la densité de charges $\rho(t, \mathbf{x})$ et des courants $\mathbf{j}(t, \mathbf{x})$:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{Maxwell-Gauss,} \quad (1.13a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \text{Maxwell-flux,} \quad (1.13b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} (\nabla \wedge \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{j}), \quad \text{Maxwell-Ampère,} \quad (1.13c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \wedge \mathbf{E} \quad \text{Maxwell-Faraday.} \quad (1.13d)$$

Les constantes ϵ_0 et μ_0 dépendent du choix des unités. On montrera que la vitesse de propagation de la lumière est

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}. \quad (1.14)$$

Dans le système MKSA, on adopte par *définition* :

$$\mu_0 \triangleq 4\pi 10^{-7} \text{ SI.} \quad (1.15)$$

On doit compléter ces équations par celle qui définit le mouvement des charges (principe de moindre action à champ fixé) *via la force de Lorentz* :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}), \quad (1.16)$$

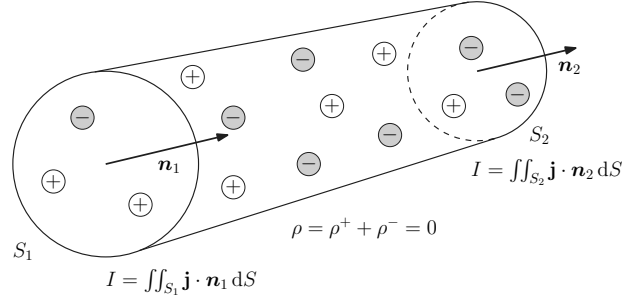


Figure 1.1: Densités de charges et de courants dans un conducteur.

où $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ avec $\gamma \triangleq 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ le *facteur de Lorentz*.

Toute la diversité des phénomènes électromagnétiques (dans le domaine classique) résulte (*en principe*) de l'application des équations qui précèdent. Cet ensemble d'équations n'admet cependant pas de méthode de résolution générale, et chaque cas relève d'approximations appropriées.

1.4 Analyse des équations de Maxwell dans le cas stationnaire

Ce paragraphe reconstitue de manière heuristique l'évolution qui a conduit aux équations de Maxwell à partir des phénomènes dont elles sont issues.

1.4.1 Les sources du champ

Comme prévu dans le cadre d'un formalisme invariant de jauge (Sec. 1.1), les équations de Maxwell ne sont compatibles que s'il y a *conservation de la charge* :

$$\frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{j} \quad (1.17)$$

soit
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (1.18)$$

Le courant d'une charge ponctuelle vérifie cette relation.

En régime *stationnaire*, elle se traduit par

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (1.19)$$

L'intensité

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d^2x \quad (1.20)$$

(Fig. 1.1) est alors conservée (*théorème de Gauss*).

Il en va de même en régime périodique dans un conducteur de conductivité σ . On pose $\rho = \rho_0 e^{-i\omega t}$, et on utilise la relation (*approchée*) d'Ohm :

$$\mathbf{j}(\omega) = \sigma(\omega) \mathbf{E}(\omega). \quad (1.21)$$

La conservation de la charge (1.9), ou (1.18), entraîne

$$-i\omega\rho_0 + \frac{\sigma}{\epsilon_0}\rho_0 = 0. \quad (1.22)$$

Que l'on soit en régime variable ou stationnaire, la densité volumique de charges est nulle dans un conducteur, dans la mesure où la loi d'Ohm est vérifiée $\rho_+ = -\rho_-$. Le courant $\mathbf{j}$ est la somme $\rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_-$, et $\mathbf{v}_+ = \mathbf{0}$, les ions positifs étant immobiles ; il n'est évidemment pas nul en général.

1.4.2 Équation de Maxwell-Gauss : sources du champ électrique

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.13a)$$

Pour une charge ponctuelle, $\rho = q\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ et le champ $\mathbf{E}$ s'obtient en appliquant le théorème de Gauss à une sphère de rayon R centrée sur la charge :

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \int_V \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d^2x \quad (1.23)$$

$$\text{soit} \quad E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}; \quad (1.24)$$

c'est la *loi de Coulomb*. Comme la symétrie sphérique implique que le potentiel électrostatique ne dépend que du rayon, le vecteur champ électrique est radial, et l'Éq. (1.24) donne son module.

1.4.3 Équation de Maxwell-flux : absence de sources magnétiques

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.13b)$$

Cette équation exprime l'absence de charges magnétiques. Dans la formulation relativiste, cette propriété est incluse dans l'expression du courant j^μ , qui ne contient que des charges électriques. On aurait pu postuler un courant magnétique 4-vectoriel couplé à un 4-potentiel axial, le champ $\mathbf{E}$ serait le rotationnel de la partie pseudo-vectorielle du champ axial, $\mathbf{B}$ le gradient de la composante pseudo-scalaire. Cette description est complètement équivalente aux relations usuelles, et elle n'apporte rien de plus. Ce n'est certainement pas la manière plus simple de décrire la nature où les constituants élémentaires sont pourvus de charges électriques. La situation est plus intéressante si on admet l'existence de (rares) « monopoles » magnétiques. DIRAC (1948) a montré que la charge électrique devait alors être quantifiée.

1.4.4 Équation de Maxwell-Ampère : évolution du champ électrique

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} (\nabla \wedge \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{j}) \quad (1.13c)$$

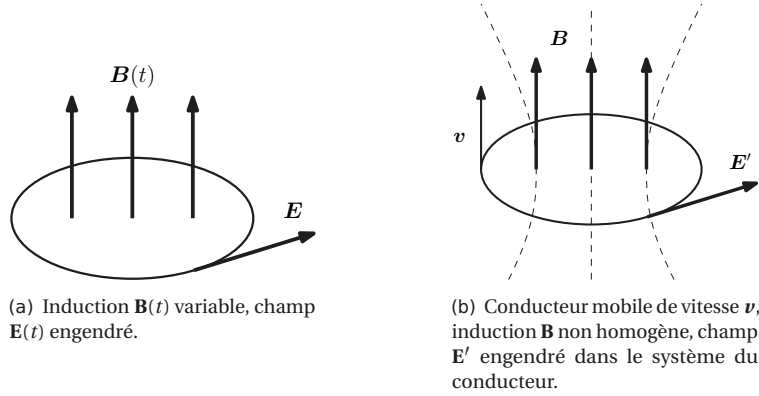


Figure 1.2: Évolution du champ magnétique : « force électromotrice ».

En régime stationnaire, cette équation régit le champ créé par un courant. Soit $\mathbf{n}$ la normale unitaire à la surface limitée par la courbe arbitraire $\mathcal{C}$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_S (\nabla \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} d^2x \\ &= \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d^2x \end{aligned} \quad (1.25)$$

Dans le cas particulier d'un courant linéaire infini d'intensité I , on notera $B_\phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_\phi$ la projection de $\mathbf{B}$ sur le vecteur unitaire $\mathbf{e}_\phi$ tangent à un cercle de rayon R au point d'azimut ϕ . Il en résulte :

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}, \quad (1.26)$$

c'est la *loi d'Ampère*.

En régime stationnaire, la solution explicite de l'Éq. (1.25) est la *loi de Biot-Savart* :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}) \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} d^3x. \quad (1.27)$$

1.4.5 Équation de Maxwell-Faraday : évolution du champ magnétique

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \wedge \mathbf{E} \quad (1.13d)$$

Il s'en déduit la *loi de Faraday*, qui régit la force électromagnétique engendrée par un champ *variable* dans un circuit *fixe* (Fig. 1.2) :

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \wedge \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} d^2x = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} d^2x = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad (1.28)$$

la loi de Faraday est *exacte*.

Au contraire, quand on déplace un circuit dans un champ $\mathbf{B}$ stationnaire mais non uniforme, le changement de repère associé au mouvement entraîne dans le référentiel du circuit une transformation relativiste du champ qui se traduit, au premier ordre en v/c , par l'apparition d'un champ électrique dans le circuit en mouvement :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}. \quad (1.29)$$

Cette relation *n'est pas exacte*. Les relations (18.12) du Chap. 18 montrent que la transformation relativiste correcte impose des corrections d'ordre v^2/c^2 (voir LANDAU ET LIFCHITZ, 1989) : la loi de Faraday pour le flux coupé par un conducteur en mouvement n'est qu'*approchée* (Fig. 1.2). Si le circuit forme une boucle $\mathcal{C}$, le champ créé dans le circuit en mouvement engendre une « force électromotrice » e :

$$e = \int_{\mathcal{C}} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}' = \int_{\mathcal{C}} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{B} \cdot \int_{\mathcal{C}} d\mathbf{l} \wedge \mathbf{v} = -\frac{d\tilde{\Phi}}{dt} \quad (1.30)$$

où $\tilde{\Phi}$ est le flux de $\mathbf{B}$ à travers la surface balayée par le circuit (*flux coupé*).

1.5 Des champs aux potentiels

Au lieu de déduire les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ du 4-potential selon le cheminement naturel dans le cadre relativiste, on peut adopter un point de vue inverse et reconstruire les potentiels scalaires et vecteurs à partir des équations de Maxwell. La relation (1.13b) implique l'existence d'un vecteur $\mathbf{A}$ (non unique) tel que

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \nabla \wedge \mathbf{A}. \quad (1.4b)$$

Pour un champ magnétique $\mathbf{B}$ stationnaire et uniforme, on vérifie à l'Ex. 1.G que

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{c}{2} \mathbf{B} \wedge \mathbf{r}. \quad (1.31)$$

Cette solution n'est pas unique, un gradient ajouté à $\mathbf{A}$ ne modifiant pas $\mathbf{B}$.

La relation de Maxwell-Faraday (1.13d) entraîne

$$\nabla \wedge \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.32)$$

Il existe alors une fonction U telle que

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla U. \quad (1.4a)$$

On a ainsi obtenu les relations usuelles (1.4) reliant les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ aux potentiels électrostatique U et vecteur $\mathbf{A}$. Le facteur c , qui a la dimension d'une vitesse, a été introduit afin que U et $\mathbf{A}$ aient la même dimension. Il est naturel de le choisir égal à la vitesse de la lumière mais cette convention n'est pas générale. Les transformations de jauge laissent $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ invariants.

1.5.1 Cas des sources stationnaires

Les potentiels obéissent à l'équation de Poisson :

$$\Delta U(\mathbf{x}) = -\frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \quad (1.33a)$$

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{x}) = -c\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}). \quad (1.33b)$$

Diverses méthodes de résolutions de ces équations seront présentées dans les chapitres suivants.

1.6 Charges élémentaires

La matière usuelle qui nous environne est neutre. Elle est constituée de molécules et d'atomes où la charge électronique négative équilibre exactement la charge des protons constituant le noyau de atomes. À l'échelle subatomique, la charge des quarks qui constituent les nucléons est une fraction de celle de l'électron (+2/3 ou -1/3).

L'égalité exacte du nombre de charges positives et négatives est une propriété de l'histoire de l'Univers qui n'a rien d'évident, et elle joue un rôle dans son évolution : les galaxies, les étoiles, les planètes n'interagissent entre elles que gravitationnellement. À haute température, les atomes peuvent être ionisés par les photons du rayonnement thermique ou par les chocs. Durant la période de l'Univers où il était à plus de 3000 K, le plasma ambiant absorbait les photons, qui n'ont pu s'échapper que lorsque la température a suffisamment diminué pour que les atomes neutres se forment. Ce rayonnement initial est observable aujourd'hui sous forme d'un rayonnement puissant qui suit la loi de Planck avec une température d'environ 3 K : le *fond diffus cosmologique*.

Exercices

Ex. 1.A. Les transformations de Lorentz Λ sont les transformations linéaires à quatre dimensions qui préservent le produit scalaire de deux 4-vecteurs $s = x^\mu y_\mu$, $y_\mu = g_{\mu\nu} y^\nu$, $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ lorsque $\mu = \nu$, et $g_{\mu\nu} = 0$ pour $\mu \neq \nu$. Montrer en posant $x = \Lambda x'$ et $y = \Lambda y'$ que

$$\Lambda^T g \Lambda = g \quad (1.34)$$

(g est un tenseur invariant) ; en déduire que le déterminant $\det \Lambda = \pm 1$.

Ex. 1.B. On se limite maintenant aux transformations de Lorentz de déterminant unité. Montrer que $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ est un invariant. Montrer que la densité de charges $\rho = Q/V$ se transforme comme x^0 , et que $\rho \mathbf{v}$ se transforme comme les coordonnées spatiales x^i ($i = 1, 2, 3$). En déduire que $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ se transforme comme le 4-vecteur ($x^0 = ct, x^i$).

Ex. 1.C. On considère le référentiel propre d'une particule qui se déplace à la vitesse v dans le laboratoire, et parcourt la distance Δl dans le temps Δt . Quel est le temps Δ' qui s'écoule dans son référentiel propre ?

Ex. 1.D. Exprimer en utilisant la relation (1.16) les dimensions de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ en fonction des grandeurs fondamentales (Q, L, T, M). En déduire, à partir des équations de Maxwell, les dimensions de ϵ_0 et μ_0 . Vérifier que la dimension de $\epsilon_0 \mu_0$ est $L^{-2} T^2$.

Ex. 1.E. Jauge de Coulomb. Vérifier que l'on peut toujours trouver une fonction f telle que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

Ex. 1.F. Cage de Faraday. On admet que le champ électrique dans un conducteur est nul. Montrer qu'il en résulte que la somme des charges dans une cage conductrice est nulle en régime stationnaire. Le flux du champ électrique est alors nul sur toute surface intérieure à la cage.

Ex. 1.G. Le champ $\mathbf{B}$ est supposé uniforme. En utilisant le développement de $\nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$, montrer que

$$\mathbf{A} = -\frac{c}{2} \mathbf{r} \wedge \mathbf{B}. \quad (1.35)$$

Ex. 1.H. Loi de Coulomb. Vérifier que pour une charge ponctuelle ($\rho(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$), l'expression

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} \quad (1.36)$$

est solution de $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$. On utilisera la relation

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} = \Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \right) = -4\pi \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (1.37)$$

Ex. 1.I. Loi de Biot-Savart. Vérifier que l'expression (1.27) est une solution de $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ en régime stationnaire ; traiter le cas particulier du champ $\mathbf{B}$ uniforme. Une intégration par parties permet de substituer $\nabla \cdot \mathbf{j}$ (qui est nul) à $\mathbf{j} \cdot \nabla$.

Ex. 1.J. Peut-on conclure de l'exercice précédent que le vecteur

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{c}{2} \int \mathbf{B}(\mathbf{x}) \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} d^3x \quad (1.38)$$

satisfait la relation $\nabla \wedge \mathbf{A} = c\mathbf{B}$?

Corrigés

Corr. 1.A. Le déterminant de Λ vérifie $\det(\Lambda^T g \Lambda) = \det \Lambda^2 \det g = \det g$ soit $\det \Lambda = \pm 1$.

Corr. 1.B. Avec le choix $\det \Lambda = 1$, le produit extérieur

$$dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \det \Lambda dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (1.39)$$

La charge totale étant évidemment invariante de Lorentz, $\rho V = \rho' V'$ est un invariant. Comme $\Delta x^0 V$ est un invariant, c'est que ρ se transforme comme Δx^0 , la coordonnée temporelle. Le courant électrique $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \rho dx^i/dt$ se transforme comme dx^i , c.-à-d. la partie spatiale d'un 4-vecteur. L'ensemble $(\rho, \mathbf{j}/c)$ est bien un 4-vecteur, et se transforme comme (x^0, x^1, x^2, x^3) .

Corr. 1.C. L'invariance de l'intervalle relativiste entraîne $c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2 \Delta t'^2$. Comme $\Delta l = v \Delta t$, on a $\Delta t'^2 (1 - v^2/c^2) = \Delta t'^2$. L'intervalle de temps Δt dans le laboratoire est plus long. Le facteur de dilatation est $\gamma \triangleq 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Cet exercice complète ainsi le précédent.

Corr. 1.D. $[\mathbf{E}] = \text{MLQ}^{-1} \text{T}^{-2}$ et $[\mathbf{B}] = \text{MT}^{-1} \text{Q}^{-1}$ (puisque $\mathbf{F} = q\mathbf{E} = qv\mathbf{B}$) ; comme $\mathbf{E} = q/(4\pi\epsilon_0 R^2)$, on a $[\epsilon_0] = \text{M}^{-1} \text{Q}^2 \text{L}^{-3} \text{T}^2$; de même, $\mu_0 = \text{MLQ}^{-2}$ à partir de $\mathbf{B} = \mu_0/(4\pi) \mathbf{I} \int d\mathbf{l} \wedge \mathbf{R}/R^3$. On vérifie que $[\epsilon_0 \mu_0] = \text{L}^{-2} \text{T}^2$.

Corr. 1.E. On suppose $\nabla \cdot \mathbf{A} = \phi(r)$. Les champs $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ sont invariants dans les « changements de jauge »

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f, \quad \mathbf{U}' = \mathbf{U} - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (1.40)$$

Si $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$, $\Delta f = -\nabla \cdot \mathbf{A} = -\phi(r)$. C'est formellement l'équation de Poisson, et sous réserve de convergence, la fonction de Green pour un volume comprenant tout l'espace peut être utilisée :

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|}. \quad (1.41)$$

Corr. 1.F. D'après (1.4a), $\mathbf{E} = -\nabla U$. Le théorème de Gauss va imposer $\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d^2x = 0 = \int_V d^3x \nabla \cdot \mathbf{E}$ et

$$-\int_V d^3x \Delta U = \int_V d^3x \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} = 0. \quad (1.42)$$

Corr. 1.G. Il suffit de montrer que $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}/c$. On utilise la relation $\nabla \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{r})$ du formulaire et on note que $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$. Les dérivées spatiales du champ $\mathbf{B}$ étant nulles, on trouve : $\nabla \wedge \mathbf{A}/c = (3\mathbf{B} - \mathbf{B})/2 = \mathbf{B}$.

Corr. 1.H. On admettra qu'il est légitime d'utiliser le théorème de Gauss en intégrant la relation (1.24) sur un volume sphérique entourant la charge ponctuelle q . L'intégrale de $\nabla \cdot \mathbf{E}$ fait apparaître la « fonction » δ dont l'intégrale tridimensionnelle donne l'unité. Le flux de $q/(4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^2)$ est $4\pi qR^2/(4\pi\epsilon_0 R^2) = q/\epsilon_0$. La divergence de $\mathbf{E}$ vérifie $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ au sens des distributions.

Corr. 1.I. On évalue $\nabla \wedge \mathbf{B}$ à partir de l'Éq. (1.27). L'opérateur $\nabla_{\mathbf{r}}$ n'agit pas sur $\mathbf{j}(\mathbf{x})$, et lorsqu'il porte sur $\nabla_{\mathbf{x}}(1/R)$ avec $R \triangleq |\mathbf{r} - \mathbf{x}|$, il peut être remplacé par $-\nabla_{\mathbf{x}}$; ainsi

$$\nabla_{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x \mathbf{j}(\mathbf{x}) (-\Delta_{\mathbf{x}}(1/R)) + \int d^3x (\mathbf{j} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \nabla_{\mathbf{x}}(1/R). \quad (1.43)$$

La première intégrale est égale à $\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$; la nullité de la deuxième intégrale s'obtient en intégrant par parties le terme $\mathbf{j}_i \partial/\partial i$ (avec $i = x, y, z$) :

$$\int d^3x j_i \frac{\partial}{\partial i} \nabla_{\mathbf{x}}(1/R) = \int_S d^2x (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) \nabla_{\mathbf{x}}(1/R) - \int d^3x (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x})) \nabla_{\mathbf{x}}(1/R). \quad (1.44)$$

En choisissant une surface S qui englobe tous les courants, l'intégrale de surface est nulle ; enfin, l'intégrale de volume est nulle *en régime stationnaire* puisque $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}) = 0$.

Corr. 1.J. Il suffit de reprendre le calcul de l'exercice précédent en substituant $\mathbf{B}$ à $\mathbf{j}$, mais on ne peut assurer la nullité *locale* de $\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x})$, bien que l'intégrale surfacique de cette expression soit nulle. On ne peut pas étendre l'expression de la loi de Biot-Savart à la relation entre le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ et le champ $\mathbf{B}$.

L'équation de Poisson

2.1 Généralités

Les problèmes d'électrostatique impliquent différents types de configuration. Les potentiels sont définis sur certaines surfaces (le plus souvent conductrices), les charges initiales sur d'autres (isolantes ou conductrices), et il s'agit de trouver le champ dans tout l'espace. La méthode la plus générale est la résolution de l'équation de Poisson (1.33a), complétée par les conditions aux limites assurant l'unicité de la solution :

$$\Delta U = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.33a)$$

Les fonctions de Green, qui décrivent le potentiel d'une charge ponctuelle, constituent — quand on les connaît ! — l'outil de base permettant de résoudre ce type de problème *en présence d'une distribution de charges connue*. Deux obstacles se présentent dans l'utilisation de cette méthode : il faut connaître les fonctions de Green adaptées aux conditions aux limites de la configuration étudiée. Ce point est résolu par les *équations de Fredholm* qu'elles vérifient. Il faut aussi que la distribution de charges soit connue ; elle ne l'est pas en général, seules certaines charges « sources » sont données. Seule une solution numérique est en général possible, mais des solutions analytiques peuvent être trouvées pour des géométries simples.

2.1.1 Propriété de la moyenne

Dans le vide, le potentiel U vérifie $\Delta U = 0$. C'est une fonction harmonique, qui jouit de la propriété de la moyenne : la valeur de U en un point P est la moyenne de U sur une sphère entourant P . Le potentiel ne peut donc avoir de maximum ou de minimum dans le vide.

2.1.2 Théorème de Green

Le *théorème de Green* résulte directement de l'application du théorème de Gauss aux gradients $\nabla\phi$ et $\nabla\psi$ de deux fonctions régulières ϕ et ψ définies dans un domaine $\mathcal{V}$ limité par la surface S . Soit $\hat{n}_{\text{ext}}$ la normale externe au volume $\mathcal{V}$:

$$\int_{\mathcal{V}} (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) d^3x = \int_S (\phi \partial_n \psi - \psi \partial_n \phi) d^2x \quad (2.1)$$

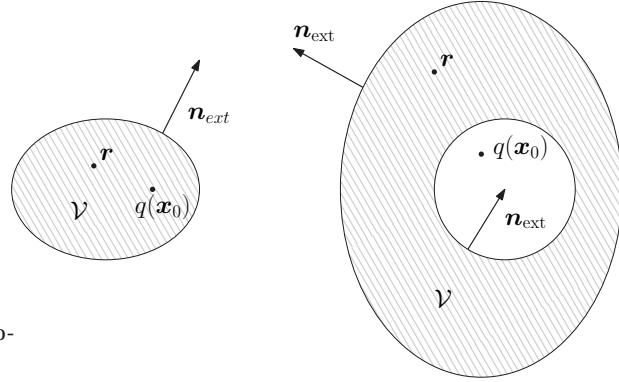


Figure 2.1: Surface limite pour un domaine $\mathcal{V}$ électrostatique.

avec $\partial_n \triangleq \hat{n}_{\text{ext}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$. La normale $\hat{n}_{\text{ext}}$ doit être orientée vers l'*extérieur* du domaine, dont la surface limite $\mathcal{S}$ peut ne pas être connexe : c'est le cas lorsque $\mathcal{V}$ est le volume interne à plusieurs conducteurs. C'est parfois le volume externe aux conducteurs qui sera considéré.

2.1.3 Théorème de réciprocité (pour les conducteurs)

Lorsque la surface $\mathcal{S}$ coïncide avec une surface physique (diélectrique ou conductrice), on peut appliquer le théorème de Green (2.1) à deux configurations de potentiels et de charges, $(\phi = U, \rho)$ et $(\psi = U', \rho')$, en considérant successivement les volumes interne et externe. Les densités de charge ρ et ρ' apparaissent par application de l'équation de Poisson $\Delta U = -\rho/\epsilon_0$ à la relation (2.1). Dans le cas d'un conducteur, on substituera aux densités volumiques (nulles) les densités surfaciques σ et σ' dans le membre de gauche de l'Éq. (2.1).

Soient donc deux distributions de charges différentes, volumiques (ρ et ρ') et surfaciques (σ et σ'), et les potentiels engendrés dans les deux cas (U, U') . En tenant compte de l'équation de Poisson et des dérivées $\partial\psi/\partial n_{\text{ext}} = -\partial\psi/\partial n_{\text{int}} = \mathbf{E}' \cdot \hat{n}_{\text{int}}$, on obtient, en appliquant le théorème de Green à $\phi = U, \psi = U'$:

$$\int_{\mathcal{V}} U \rho' + \int_{\mathcal{S}} U \sigma' = \int_{\mathcal{V}} U' \rho + \int_{\mathcal{S}} U' \sigma. \quad (2.2)$$

Pour l'appliquer au volume externe, limité par $\mathcal{S}$, la surface limite doit être externe au conducteur, $\hat{n}_{\text{ext}}$ est alors dirigée vers l'*intérieur* du conducteur. Ce *théorème de réciprocité* peut s'interpréter comme l'égalité de deux expressions de l'énergie électrostatique du système de charges combinant les distributions ρ et ρ' : l'énergie électrostatique de la distribution ρ' dans le potentiel U créé par les charges ρ et l'énergie électrostatique des charges ρ dans le potentiel U' créé par ρ' sont égales. L'origine physique de la relation (2.1) est la conservation de l'énergie, son origine mathématique est la symétrie des fonctions de Green. Le potentiel créé en $\mathbf{r}$ par une charge q située $\mathbf{x}_0$ est le même que celui créé au point $\mathbf{x}_0$ par la charge q située en $\mathbf{r}$ lorsque le domaine considéré est tout l'espace, ou qu'il est borné par des conducteurs dont le potentiel est fixé.

2.1.4 Unicité de la solution

L'équation de Poisson admet une solution unique pour des conditions aux limites « appropriées ». Cette unicité se devine à partir de l'observation : le potentiel U est défini partout

lorsque sa valeur à l'infini (en général nulle), et sa valeur sur les conducteurs sont fixées. Cette condition est la *condition de Dirichlet* (Sec. 2.2.1), et l'unicité peut être démontrée.

Elle est également démontrée pour une *condition limite de Neumann* (Sec. 2.2.1), lorsque la dérivée normale du potentiel ($\partial G_N / \partial n = g(\mathbf{x})$) est imposée sur la surface limite. Ce sera p. ex. le cas si la distribution de charge sur un conducteur est connue. Les conditions (Dirichlet ou Neumann) peuvent différer sur des surfaces disjointes.

L'unicité joue un rôle pratique important : si une solution est trouvée, il s'agit bien de l'*unique* solution. Le potentiel étant défini à une constante près, on impose en général $U = 0$ à l'infini, mais cette condition doit être précisée lorsque le système étudié n'est pas borné : fil cylindrique infini, plans conducteurs, dièdres, etc., la solution va alors dépendre des hypothèses détaillées affectant le comportement du potentiel à grande distance.

2.2 Fonctions de Green

Les *fonctions de Green* sont dans un domaine $\mathcal{V}$ les solutions des équations correspondant à une source ponctuelle située en $\mathbf{x}_0$. La seule solution qui s'annule à l'infini et ait comme seul point singulier $\mathbf{x}_0$ sera notée $G_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$; c'est, selon la dimension de l'espace :

$$\Delta_{\mathbf{x}} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \begin{cases} -\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) & (3D) \\ -\delta_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) & (2D) \end{cases} \quad (2.3)$$

La solution n'est définie qu'à une fonction harmonique près (solution de l'équation de Poisson sans second membre, $\Delta f = 0$), et ce sont les conditions aux limites qui assurent son unicité dans le domaine $\mathcal{V}$. (La seule solution harmonique régulière nulle à l'infini est la fonction nulle.)

La solution à trois dimensions (3D) qui s'annule ainsi que ses dérivées à l'infini est

$$G_0^{3D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}. \quad (2.4a)$$

(Elle se trouve par transformation de Fourier, voir Ex. 2.A.)

À deux dimensions (2D), la fonction

$$G_0^{2D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \ln(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (2.4b)$$

vérifie l'Éq. (2.3), et ses dérivées s'annulent à l'infini.

2.2.1 Symétrie des fonctions

Les conditions aux limites sur la surface $\mathcal{S}$ (non nécessairement connexe) qui borne le volume $\mathcal{V}$ et assurent l'unicité sont la valeur de la fonction de Green de Dirichlet $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = 0$ pour $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ (*condition de Dirichlet*), ou celle de la dérivée de la fonction de Green de Neumann $\partial_{n,\mathbf{x}} G_N \triangleq \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G_N(\mathbf{x}) = \text{cste}$ pour $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ (*condition de Neumann*). On choisira dans chaque cas une fonction de Green adaptée au problème traité.

Condition de Dirichlet

L'application du théorème de Green à la paire de fonctions $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ et $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ permet de montrer que cette fonction est symétrique (en utilisant $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = 0$ et $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = 0$ quand $\mathbf{x}$ sur la surface limite S). En combinant les relations (2.1) et (2.3) :

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x [G_D(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \Delta_x G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) - G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \Delta_x G_D(\mathbf{x}, \mathbf{r})] = \int_S d^2x [G_D(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \partial_n G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) - G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \partial_n G_D(\mathbf{x}, \mathbf{r})]. \quad (2.5)$$

Le second membre s'annule pour une fonction $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ vérifiant la condition de Dirichlet lorsque $\mathbf{x} \in S$.

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0) = G_D(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}). \quad (2.6)$$

Condition de Neumann

La condition $\partial_n G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = 0$ pour $\mathbf{x} \in S$ est incompatible avec l'Éq. (2.3). Si $\mathbf{r} \in \mathcal{V}$:

$$\int_S d^2x \partial_n G_N(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = \int_{\mathcal{V}} d^3x \Delta_x G_N(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = -1 \quad (2.7)$$

et on ne peut imposer (p. ex.) que la condition

$$\partial_n G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -1/S \quad (2.8)$$

où S est l'aire de la surface limite S . En appliquant (2.5), on voit que

$$G_N(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0) + \frac{1}{S} \int_S d^2x G_N(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = G_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}) + \frac{1}{S} \int_S d^2x G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0). \quad (2.9)$$

La fonction de Neumann

$$G'_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}) = G_N(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0) + \frac{1}{S} \int_S d^2x G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \quad (2.10)$$

est symétrique et vérifie la condition $\partial G'_N(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0)/\partial n(\mathbf{r}) = -1/S$. On peut donc supposer que G_N est également symétrique sans perte de généralité.

2.2.2 Expressions intégrales du potentiel

En appliquant le théorème de Green à la paire de fonctions $U(\mathbf{r})$ et $G(\mathbf{x}, \mathbf{r})$, on obtient lorsque $\mathbf{r} \in \mathcal{V}$

$$-U(\mathbf{r}) - \int_{\mathcal{V}} d^3x \Delta U(\mathbf{x}) G(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = \int_S d^2x U(\mathbf{x}) \partial_n G(\mathbf{r}, \mathbf{x}) - \int_S d^2x G(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \partial_n U(\mathbf{x}) \quad (2.11)$$

En utilisant l'équation de Poisson (1.33a) et la définition de la fonction de Green (2.3) :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} d^3x \rho(\mathbf{x}) G(\mathbf{r}, \mathbf{x}) - \int_S d^2x U(\mathbf{x}) \partial_n G(\mathbf{r}, \mathbf{x}) + \int_S d^2x G(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \partial_n U(\mathbf{x}) \quad (2.12)$$

Le potentiel n'est pas fourni par la seule contribution coulombienne des charges contenues dans le volume $\mathcal{V}$, il s'y ajoute deux contributions de surface correspondant à une distribution de dipôles orientés selon la normale, $U \partial_n G(\mathbf{r}, \mathbf{x})$ d'une part, et une densité de surface $G(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \partial_n U(\mathbf{x})$ d'autre part. Ces intégrales de surface représentent les contributions externes, et ne correspondent pas en général aux sources physiques du champ (c'est évident pour une surface limite arbitrairement tracée dans un milieu homogène).

Selon les conditions aux limites, plusieurs choix de fonction de Green sont possibles :

Fonction de Green : $G = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{x})$, l'Éq. (2.12) est vérifiée dans le volume $\mathcal{V}$, mais elle requiert la connaissance simultanée de U et $\partial_n U$, ce qui est impossible sauf à connaître la solution. Elle convient cependant dans certains cas : si $\mathcal{V}$ s'étend jusqu'à l'infini, les contributions de surface disparaissent. Dans le cas d'une surface conductrice à l'équilibre, $U(\mathbf{x}) = U_0$, la première intégrale de surface dans l'Éq. (2.12) vaut U_0 (elle se réduit à l'angle solide sous lequel $\mathcal{S}$ est vue du point $\mathbf{r}$). On obtient la formule usuelle où $U(\mathbf{r}) - U_0$ s'exprime en fonction des charges électriques de volume et de surface, compte tenu de la relation $E_n = \sigma/\epsilon_0$. Dans le cas général, l'équation de Poisson se traite à l'aide de deux types de fonction de Green vérifiant des conditions aux limites différentes.

Fonction de Green de Dirichlet : $G = G_D(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = 0$ pour $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$.

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} d^3x \rho(\mathbf{x}) G_D(\mathbf{r}, \mathbf{x}) - \int_{\mathcal{S}} d^2x U(\mathbf{x}) \partial_n G_D(\mathbf{r}, \mathbf{x}). \quad (2.13)$$

Cette fonction de Green est bien adaptée lorsque c'est le potentiel U qui est imposé sur la surface $\mathcal{S}$. C'est le cas le plus fréquent en électrostatique des conducteurs. Pour une source ponctuelle à l'intérieur du volume $\mathcal{V}$

$$U(\mathbf{r}) = \frac{q}{\epsilon_0} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0) - \int_{\mathcal{S}} d^2x U(\mathbf{x}) \partial_n G_D(\mathbf{r}, \mathbf{x}). \quad (2.14)$$

On retrouve évidemment $U = qG_D$ si U s'annule sur $\mathcal{S}$. Le potentiel $U(\mathbf{r})$ est continu sur la frontière $\mathcal{S}$ du domaine. Au contraire, la composante normale $\partial_n U$ du potentiel (donc le champ électrique) est discontinue, et elle n'est égale au champ physique qu'à l'intérieur du volume $\mathcal{V}$ limité par $\mathcal{S}$. Si la fonction G_D est connue (c'est rare), cette équation permet d'évaluer U dans le volume à partir de ses valeurs sur $\mathcal{S}$.

Fonction de Green de Neumann : $\partial_n G_N(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = g(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = -1/\mathcal{S}$ lorsque $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$.

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} d^3x \rho(\mathbf{x}) G_N(\mathbf{r}, \mathbf{x}) + \int_{\mathcal{S}} d^2x G_N(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \partial_n U(\mathbf{x}) - \int_{\mathcal{S}} d^2x U(\mathbf{x}) \partial_n G_N(\mathbf{r}, \mathbf{x}). \quad (2.15)$$

Si la dérivée normale de U est connue sur la surface (c'est rare en électrostatique, mais fréquent en magnétisme en présence d'un conducteur parfait), U est fourni dans le volume par

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} d^3x \rho(\mathbf{x}) G_N(\mathbf{r}, \mathbf{x}) + \int_{\mathcal{S}} d^2x G_N(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \partial_n U(\mathbf{x}) + \langle U \rangle_{\mathcal{S}}(\mathbf{r}), \quad (2.16)$$

où $\langle U \rangle_{\mathcal{S}}(\mathbf{r})$ est la moyenne de U sur $\mathcal{S}$ pondérée par $\partial_n G_N(\mathbf{r}, \mathbf{x})$. Lorsque la surface $\mathcal{S}$ est conductrice, $U(\mathbf{x}) = U_0$. L'expression (2.16) exprime le potentiel en fonction des charges de volume, de surface, et de sa valeur sur la surface conductrice limite.

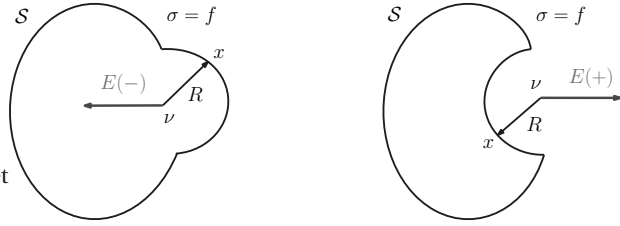


Figure 2.2: Discontinuité de surface et valeur principale.

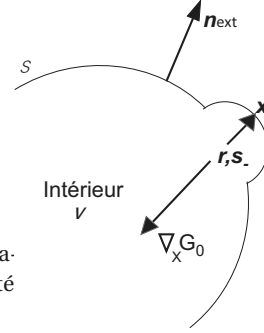


Figure 2.3: Les limites intervenant dans les équations intégrales de Fredholm pour le volume $\mathcal{V}$ limité par la surface $\mathcal{S}$.

En prenant en compte la continuité du potentiel, la présence de charges de surface de densité σ , et en décomposant l'intégrale de surface comme le suggère la Fig. 2.2, il résulte de (2.16) que

$$-\left. \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial n} \right|_{\text{ext}} + \left. \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial n} \right|_{\text{int}} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (2.17)$$

La composante normale $\partial_n U$ du potentiel (le champ électrique) est discontinue, et elle n'est égale au champ physique qu'à l'extérieur du volume $\mathcal{V}$ limité par $\mathcal{S}$. Dans le cas d'un conducteur de surface $\mathcal{S}$, le champ interne est nul, le champ externe (normal) est alors égal à la discontinuité de $\partial_n U$.

2.3 Équations intégrales des fonctions de Green

Il semble que nous ayons échangé le problème « *trouver le potentiel U vérifiant des conditions aux limites* » pour un autre : « *trouver une fonction de Green vérifiant une condition aux limites* ». Les fonctions G_D , G_N et G_0 sont cependant reliées par des équations intégrales de Fredholm qui permettent de les obtenir à partir de G_0 . Le théorème de Green (2.1) peut être appliqué aux paires de fonctions $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ et $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{r})$, ou $G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ et $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ lorsque $\mathbf{r}$ tend vers le point $\mathbf{x}_0$ qui appartient à la surface limite $\mathcal{S}$, mais il faut préciser si $\mathbf{r}$ tend vers $\mathcal{S}$ du côté interne ($\mathbf{s}_-$) ou externe ($\mathbf{s}_+$, voir Fig. 2.3). En utilisant les Éq. (2.1) et (2.3) en dehors de la surface limite $\mathcal{S}$:

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0) + \oint_{\mathcal{S}} d^2x G_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \partial_{n,x} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0), \quad (2.18)$$

$\oint$ dénote *partie principale* (régulière) de l'intégrale.

On cherchera la fonction de Neumann *interne* G_N , dont la dérivée normale prend la valeur $g(\mathbf{s})$ sur $\mathcal{S}$, sous la forme $G_N = G_0 + V$; la fonction harmonique V s'exprime alors à l'aide

de la fonction auxiliaire $g(\mathbf{x})$ *unique* sous forme d'une intégrale sur la surface $\mathcal{S}$ (FREDHOLM, 1900, 1903) :

$$G_N(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0) + V(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0) \quad (2.19a)$$

$$\text{avec} \quad V(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0) = \int_{\mathcal{S}} d^2x G_0(\mathbf{r}, \mathbf{x}) g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0). \quad (2.19b)$$

Cette formulation n'est pas naturelle dans la configuration d'une charge ponctuelle q entourée de conducteurs sur lesquels elle induit une densité de charge surfacique. Le potentiel électrique U est continu sur la surface, en revanche, le champ électrique $E_n = -\partial_n U \triangleq -\nabla U \cdot \hat{\mathbf{n}}$ (où $\hat{\mathbf{n}}$ désigne la normale externe à $\mathcal{S}$) est, lui, discontinu : il s'annule à l'intérieur du conducteur, nous reviendrons sur ce point.

La Fig. 2.3 montre comment l'intégration sur la surface $\mathcal{S}$ est décomposée en deux parties, une zone hémisphérique proche de $\mathbf{s}$, et le reste de la surface, qui constituera la *partie principale* de l'intégrale. La fonction $\partial_n V(\mathbf{x})$ se calcule par une intégrale semblable au membre de droite de l'Éq. (2.19) en substituant $\partial_{n,r} G_0$ à G_0 ; le gradient est pris ici par rapport au point $\mathbf{r}$ où la fonction V est calculée. Dans l'évaluation de l'expression singulière (2.19b), la surface de la zone hémisphérique est $2\pi|\mathbf{x} - \mathbf{s}|^2$, et sa contribution à l'intégrale $g(\mathbf{s})/2$ (le gradient par rapport à $\mathbf{s}$ est opposé à celui par rapport à $\mathbf{x}$), et le produit scalaire $\nabla_{\mathbf{x}} G_0 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ex}$ est négatif dans le problème de Dirichlet interne. Dans le cadre de l'électrostatique, cette discontinuité est reliée à la densité de charges surfaciques à l'intérieur du domaine limité par $\mathcal{S}$.

Lorsque c'est la limite externe $V(\mathbf{s}_+)$ de $V(\mathbf{s})$ qui est évaluée, la sphère est déformée vers l'intérieur de $\mathcal{S}$, et la partie singulière change de signe :

$$\partial V_{n,s}(\mathbf{s}_{\pm}, \mathbf{x}_0) = - \oint_{\mathcal{S}} d^2x \partial_{n,x} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \mp \frac{1}{2} g(\mathbf{s}, \mathbf{x}_0). \quad (2.20)$$

Pour établir les Éq. (2.20), on notera que

$$\partial_{n,s} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = -\partial_{n,x} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{s}). \quad (2.21)$$

En suivant FREDHOLM (1900), on cherchera la fonction de Green de Dirichlet G_D sous la forme $G_D = G_0 + W$, où W s'exprime par l'intégrale de surface $\mathcal{S}$ d'une distribution de dipôles dont la densité est $f(\mathbf{s})$:

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0) + W(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0) \quad (2.22a)$$

$$\text{avec} \quad W(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0) = \int_{\mathcal{S}} d^2x \partial_{n,x} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0). \quad (2.22b)$$

On dit qu'il s'agit d'un potentiel de « *double couche* », ce potentiel est discontinu, contrairement au potentiel électrique U . Le comportement au voisinage de $\mathcal{S}$ de W est comme pour V :

$$W(\mathbf{s}_{\pm}, \mathbf{x}_0) = \oint_{\mathcal{S}} d^2x \partial_n G_0(\mathbf{x}, \mathbf{r}) f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \pm \frac{1}{2} f(\mathbf{s}, \mathbf{x}_0). \quad (2.23)$$

La dépendance de V , W , g et f par rapport à la position $\mathbf{x}_0$ de la source ponctuelle sont omises dans les équations suivantes.

Avec les définitions de la Fig. 2.3 ($\mathbf{s}_-$ interne, $\mathbf{s}_+$ externe), les fonctions V et W vérifient les équations suivantes

$$\partial_n V(\mathbf{s}_-) - \partial_n V(\mathbf{s}_+) = g(\mathbf{s}) \quad \partial_n V(\mathbf{s}_-) + \partial_n V(\mathbf{s}_+) = -2 \oint_S d^2 x \partial_{n,x} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{s}) g(\mathbf{x}) \quad (2.24a)$$

$$W(\mathbf{s}_+) - W(\mathbf{s}_-) = f(\mathbf{s}, \mathbf{x}_0) \quad W(\mathbf{s}_+) + W(\mathbf{s}_-) = 2 \oint_S d^2 x \partial_{n,x} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{x}). \quad (2.24b)$$

En additionnant les deux premières équations,

$$2\partial_n V(\mathbf{s}_\pm) = -2 \oint_S d^2 x \partial_{n,x} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{s}) g(\mathbf{x}) \mp g(\mathbf{s}); \quad (2.25)$$

en imposant la contrainte de Neumann interne,

$$\partial_n G_N(\mathbf{s}_-) = \partial_n G_0(\mathbf{s}) + \partial_n V(\mathbf{s}_-) = 0, \quad (2.26)$$

on obtient l'équation intégrale

$$g(\mathbf{s}, \mathbf{x}_0) = -2\partial_n G_0(\mathbf{s}, \mathbf{x}_0) + 2 \oint_S d^2 x \frac{\partial G_0(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial n(\mathbf{x})} g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0). \quad (2.27)$$

Le traitement de la fonction de Green de Dirichlet s'effectue de manière similaire, la fonction W étant toutefois discontinue. En sommant les Éq. (2.24b),

$$2W(\mathbf{s}_\pm) = 2 \oint_S d^2 x \partial_{n,x} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{x}) \pm f(\mathbf{s}). \quad (2.28)$$

On imposera une condition de Dirichlet interne (W est discontinu sur la surface S),

$$G_D(\mathbf{s}_-) = G_0(\mathbf{s}) + W(\mathbf{s}_-) = 0 \quad (2.29)$$

pour obtenir

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{x}_0) = 2G_0(\mathbf{s}, \mathbf{x}_0) + 2 \oint_S d^2 x \frac{\partial G_0(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial n(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0). \quad (2.30)$$

Comme l'a fait remarquer BALIAN (1994), ces solutions ne sont pas acceptables comme solutions du problème physique posé par la distribution de charges induites sur les parois d'une cavité dans un conducteur, ni pour le potentiel magnétique scalaire décrivant le champ magnétique, qui s'annule également dans le conducteur. D'une part, le potentiel électrique est continu ; bien qu'il vérifie la condition de Dirichlet ($U = 0$) sur le conducteur, il est décrit par une densité surfacique de charges formant une *simple couche*. La fonction « double couche » W ne satisfait pas ces conditions, c'est la fonction V qui convient. D'autre part, le potentiel magnétique est discontinu ; il peut être décrit par une distribution surfacique de dipôles. C'est la fonction W qui convient, pas la fonction V .

BALIAN (1994) propose de résoudre ce paradoxe en adoptant comme solution du problème de *physique* de Dirichlet ($U = 0$ sur S) relatif au potentiel électrique une contrainte de Neumann sur le voisinage *externe* de S , $E_n(\mathbf{r}) = -\partial_{n,r} U = -\partial_{n,s} G_N(\mathbf{s}_+, \mathbf{x}_0) = 0$, et d'assurer ainsi la nullité du champ électrique dans le conducteur. Le potentiel U s'exprime alors comme la fonction de Green G_N à l'aide d'une intégrale de simple couche comme V dans l'Éq. (2.19), avec

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0) + \oint_S d^2 x G_0(\mathbf{r}, \mathbf{x}) g_P(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0). \quad (2.31)$$

La fonction g_P pourra être interprétée comme une densité surfacique de charges.

De même, le problème *physique* du champ magnétique à l'intérieur d'une cavité conductrice est un problème de Neumann. Dans un domaine dépourvu de courants, l'Éq. (1.13c) s'écrit en effet $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0}$, et $\mathbf{B}$ est le gradient d'un potentiel $\Omega(\mathbf{r})$ (un exemple sera donné à l'Ex. 6.F). Le potentiel Ω doit alors vérifier $B_n = -\partial_n \Omega = 0$ à la surface du conducteur, mais il peut également être traité en imposant une contrainte de *Dirichlet* externe ($\Omega(s_+) = 0$) qui assurera $B_n = 0$ dans le conducteur. La source ponctuelle sera p. ex. un courant linéaire à 2D. Le potentiel magnétique Ω s'exprimera comme la fonction de Green de Dirichlet dans l'Éq. (2.22) à l'aide d'une densité dipolaire :

$$\Omega(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0) + \int_S d^2x \partial_{n,x} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{x}) f_P(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0). \quad (2.32)$$

La fonction f_P , en revanche, ne pourra pas être directement interprétée comme une densité surfacique de courants.

Les équations pour f_P et g_P (physiques) s'obtiennent à partir de (2.27) et (2.30), en changeant le signe du terme de gauche

$$g_P(\mathbf{s}, \mathbf{x}_0) = 2\partial_n G_0(\mathbf{s}, \mathbf{x}_0) - 2 \oint_S d^2x \frac{\partial G_0(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial n(\mathbf{x})} g_P(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0), \quad (2.33a)$$

$$f_P(\mathbf{s}, \mathbf{x}_0) = -2G_0(\mathbf{s}, \mathbf{x}_0) - 2 \oint_S d^2x \frac{\partial G_0(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\partial n(\mathbf{x})} f_P(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0). \quad (2.33b)$$

La densité surfacique de charges électriques pourra se déduire de g_P , mais celle des courants surfaciques ne se déduit pas directement de f_P .

2.4 Équivalence électrostatique : le potentiel

On suppose les sources contenues dans le volume $\mathcal{V}$ limité par la surface conductrice chargée $\mathcal{S}$, et le potentiel est supposé nul ainsi que son gradient normal à l'infini. Lorsque le point d'observation est choisi dans le volume $\tilde{\mathcal{V}}$, complémentaire de $\mathcal{V}$, l'Éq. (2.12) devient, avec $\hat{\mathbf{n}}_{\text{int}} = -\hat{\mathbf{n}}_{\text{ext}}$ pour la normale intérieure à $\mathcal{V}$:

$$U(\mathbf{r}_{\text{ext}}) = - \int_S d^2x U(\mathbf{x}) \partial_n G_0(\mathbf{r}, \mathbf{x})|_{\text{int}} + \int_S d^2x G_0(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \partial_n U(\mathbf{x})|_{\text{int}}. \quad (2.34)$$

Si la surface $\mathcal{S}$ est l'équipotentielle d'un conducteur, l'intégrale $\int_S d^2x U(\mathbf{x}) \partial_n G_0(\mathbf{r}, \mathbf{x})|_{\text{int}}$ est nulle, les contributions des deux éléments de surface interceptés par l'angle solide $d\Omega$ étant opposées. Le potentiel externe s'exprime alors comme l'intégrale de la composante normale du champ électrique (pondérée par G_0) sur $\mathcal{S}$:

$$U(\mathbf{r}_{\text{ext}}) = - \int_S d^2x G_0(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \partial_n U(\mathbf{r}, \mathbf{x})|_{\text{ext}}. \quad (2.35)$$

Exercices

Ex. 2.A. Montrer, à l'aide d'une transformation de Fourier, que l'unique solution de (2.3) qui s'annule à l'infini est $G = 1/(4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)$.

- Ex. 2.B.** Écrire le théorème de réciprocité pour deux charges ponctuelles q_1 et q_2 à la distance R l'une de l'autre. Interpréter le résultat en notant que le travail de la force électrostatique pour amener une charge depuis l'infini jusqu'à un point $\mathbf{x}$ de potentiel $U(\mathbf{x})$.
- Ex. 2.C.** On choisit comme volume $\mathcal{V}$ l'espace situé entre deux plans parallèles conducteurs de surface S , distants de d . L'axe y est perpendiculaire aux plans. On donne deux configurations : (a) une charge q à la coordonnée $y = y_0$, et (b) un champ uniforme $\mathbf{E}_0$. Trouver la charge totale surfacique sur le plan au potentiel U_0 en appliquant le théorème de réciprocité (2.2).
- Ex. 2.D.** Cas d'une charge q au point $\mathbf{x}_0$ et d'un conducteur plan dans le vide : vérifier que pour le demi-espace limité par le plan conducteur, la fonction de Green de Dirichlet s'annulant sur le plan s'obtient à l'aide de la charge miroir $q' = -q$ située au point symétrique de $\mathbf{x}_0$ par rapport au plan. En déduire le champ électrique puis la densité de charges sur le conducteur. Calculer la charge totale sur le conducteur en intégrant la densité. Montrer que la contribution de la demi-sphère tend vers zéro quand son rayon R tend vers l'infini, et retrouver le résultat qui précède plus simplement en appliquant le théorème de Gauss.
- Ex. 2.E.** Obtenir la fonction de Green de Neumann pour un courant linéaire parallèle à un plan conducteur en s'inspirant du problème précédent.
- Ex. 2.F.** Construire à l'aide des charges-miroir la fonction de Green de Dirichlet pour une sphère conductrice de rayon R , la singularité $\mathbf{x}_0$ se trouvant à la distance d du centre. Déterminer $\mathbf{x}'_0$ et le facteur f dans l'expression

$$G_D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} - \frac{f}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0|}. \quad (2.36)$$

- Ex. 2.G.** En appliquant l'Éq. (2.1) à l'expression $\int ds \, \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi$, montrer qu'il y a unicité de la solution de $\Delta \phi = 0$ (Dirichlet) ou unicité à une constante près (Neumann) à l'intérieur de S si ϕ vérifie une condition de Dirichlet ou de Neumann sur S . La condition $\Delta \phi = 0$ n'est *pas* vérifiée pour les fonctions de Green, sauf si on exclut le voisinage de la source ponctuelle en complétant S , mais la dérivée normale n'est plus nulle sur la petite surface voisine de la source.
- Ex. 2.H.** Démontrer qu'en présence d'une densité surfacique σ sur un plan conducteur S , la discontinuité de la dérivée normale de $U(\mathbf{r}) = \int_S d^2s \frac{\sigma(\mathbf{s})}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{s}|}$ est égale à σ . On pourra choisir un petit élément de surface circulaire autour de $\mathbf{x}_0$, de rayon $\rho_0 \gg h$ où h est la distance de $\mathbf{r}$ à la surface S . L'intégrale sur la zone circulaire se calcule explicitement, et l'intégrale externe est continue quand $h/R \rightarrow 0$.
- Ex. 2.I.** Démontrer les relations (2.24) dans la géométrie du problème précédent pour le point $\mathbf{r}$ situé à la distance h de la surface du plan S ; on appellera $\boldsymbol{\xi}$ le point le plus proche. La surface S au voisinage du point $\boldsymbol{\xi}$ sera décomposée en deux parties : l'intérieur et l'extérieur d'un cercle de rayon ρ . Lorsque $h \rightarrow 0$, seul l'intérieur contribue à la discontinuité, que l'on évaluera.
- Ex. 2.J.** En anticipant sur les résultats du Chap. 5, on admettra que la fonction de Dirichlet G_D pour un cercle (2D) S de rayon a est, pour un point $\mathbf{r}$ intérieur, une source unitaire au point $\boldsymbol{\rho}$ interne, et l'image conjuguée de charge $-a/\rho$ au point $\boldsymbol{\rho}'$ ($\rho\rho' = a^2$)

$$G_D = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}| - \frac{\rho}{2\pi a} \ln \left(\frac{a}{\rho} |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}'| \right). \quad (2.37)$$

- Ex. 2.K.** Trouver la fonction de Dirichlet G_D pour une sphère de rayon a en s'inspirant de l'Ex. 2.J.
- Ex. 2.L.** Une charge q est à la distance $d > a$ d'une sphère conductrice au potentiel $U = 0$. On pose $G_D = G_0 + V$. En utilisant l'exercice précédent, déterminer la fonction $f(\mathbf{r})$ introduite à l'Éq. (2.22).

Ex. 2.M. À partir de la fonction de Dirichlet pour le cercle de rayon R

$$G_D = G_0(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) - \frac{R}{|\boldsymbol{\rho}|} G_0(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}'), \quad (2.38)$$

utiliser le théorème de Green (2.1) ou l'Éq. (2.13) pour trouver le potentiel $U(\mathbf{r})$ dans l'intérieur d'un cercle (2D) ou d'une sphère (3D) de rayon a prenant la valeur $f(\mathbf{x})$ sur le cercle, quand il n'y a aucune charge à l'intérieur du cercle ou de la sphère. Soit ρ la distance du point $\mathbf{r}$ au centre du cercle, montrer que le potentiel vérifie alors la *formule de Poisson* :

$$U(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{a^3}{4\pi} (1 - r^2/a^2) \int_S d\Omega \frac{f(\mathbf{x})}{R^3} & (3D) \\ \frac{a^2}{2\pi} (1 - r^2/a^2) \int_S d\Omega \frac{f(\mathbf{x})}{R^2} & (2D) \end{cases} \quad (2.39)$$

où $R = (a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)^{1/2}$ est la distance du point d'intégration $\mathbf{x}$ au point $\mathbf{r}$.

Corrigés

Corr. 2.A. En posant $G(\mathbf{x}) = \int d^3k G(k) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$, $G(k)$ vérifie $-k^2 G(k) = -\exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$ soit

$$G(k) = \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}}{k^2}. \quad (2.40)$$

On trouve $G(\mathbf{x})$ par une nouvelle inversion de Fourier :

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int k^2 dk d\Omega \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}}{k^2}. \quad (2.41)$$

On choisit l'axe Oz selon la direction $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, l'intégration sur $d\phi$ se réduit à un facteur 2π , et après intégration sur $d \cos \theta$, en posant $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$:

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{\sin(kR)}{kR}. \quad (2.42)$$

L'intégrale vaut $\pi/2$, et le résultat en découle

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi R}. \quad (2.43)$$

Corr. 2.B. La force à exercer sur q_2 dans le champ de q_1 , opposée à la force électrostatique, est $\mathbf{F}_2 = -q_2 \mathbf{E}_1$. Le travail W qu'elle fournit à q_2 pour assembler q_1 et q_2 à la distance R est égal

$$W_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (2.44)$$

Le travail nécessaire pour amener q_1 à la distance R de q_1 serait $W_2 = W_1$. Le théorème de réciprocité (2.2) exprime précisément l'égalité $W_1 = W_2$. L'énergie du système ne dépend que de la géométrie finale des charges.

Corr. 2.C. Pour la configuration (a), $U(x, 0, z) = 0$, $U(x, d, z) = U_0$ et $U(x, y_0, z) = V$ pour les potentiels, et $\sigma(x, 0, z) = -\sigma(x, d, z)$ et $\rho(x, y, z) = q\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ pour les densités. Pour la configuration (b), $\sigma'(x, 0, z) = -\sigma'(x, d, z) = -\epsilon_0 U_0/d$. La réciprocité impose :

$$q \frac{y_0}{d} E_0 + U_0 \int dx dz \sigma'(x, d, z) = U_0 \int dx dz \sigma(x, d, z) \quad (2.45)$$

Comme $\sigma' = -\epsilon_0 V/d$, on déduit de la relation précédente la charge induite sur le plan $y = d$.

Corr. 2.D. La méthode des images montre que dans le demi-espace où se trouve la charge q , le champ est le même en présence du conducteur que celui qui résulterait de l'ensemble de la charge q et d'une charge $-q$ symétrique par rapport au plan conducteur, dans un espace homogène dont le plan conducteur aurait été retiré. En effet, le potentiel est alors nul et constant sur la surface conductrice. On choisit l'axe x perpendiculaire au plan conducteur, dont l'équation est $x = 0$. Si la charge q est située en $\mathbf{x}_0$, on choisira les axes de manière que le point symétrique par rapport au plan soit $-\mathbf{x}_0$. On posera $R = |\mathbf{r} - \mathbf{x}_0|$ et $R' = |\mathbf{r} + \mathbf{x}_0|$. La fonction de Dirichlet associée au demi-espace contenant la charge est

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right). \quad (2.46)$$

Le potentiel et le champ seront

$$U(\mathbf{r}) = \frac{q}{\epsilon_0} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{x}_0) \quad (2.47a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}_0}{R^3} - \frac{\mathbf{r} + \mathbf{x}_0}{R'^3} \right). \quad (2.47b)$$

Sur le plan conducteur, $R = R'$ le champ sera dirigé selon $\mathbf{x}_0$, normal au plan conducteur. La densité de charges est

$$\sigma(\mathbf{x}) = -\frac{2qh}{4\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (2.48)$$

On a posé $\mathbf{x}_0 = h\hat{\mathbf{z}}$ avec $\hat{\mathbf{z}}$ vecteur unitaire normal au plan, $R^2 = h^2 + \rho^2$, et ρ est le rayon de $\mathbf{r}$ en coordonnées cylindriques. L'intégrale de $\sigma(\mathbf{x})$ sur le plan xOy se calcule sans difficulté, et on trouve une charge totale $-q$. Lorsque le théorème de Gauss appliqué à une surface cylindrique hémisphérique contenant la charge q , s'étendant jusqu'à l'infini, et limitée par le plan conducteur, le flux trouvé est manifestement nul. La somme totale des charges est donc nulle, et la somme des charges sur la surface conductrice est $-q$.

Corr. 2.E. La fonction de Green de Neumann s'obtient en choisissant le signe le courant image : $I' = -I$.

Corr. 2.F. L'abscisse du point $\mathbf{x}'_0$, conjugué de $\mathbf{x}_0$ par rapport à la sphère vérifie $aa' = R^2$. La charge q' est trouvée en imposant un potentiel nul sur la sphère : $q'/q = R/a$.

Corr. 2.G. Le théorème de Green implique

$$\int_S d^2s \phi (\nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{n}}) \int_V d^3x (\nabla \phi)^2 + \Delta \phi. \quad (2.49)$$

Lorsque $\Delta \phi = 0$ dans V , l'une des conditions $\phi = 0$ ou $\nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ sur S entraîne $\nabla \phi = 0$ partout ; la fonction ϕ est donc une constante. S'il y a deux solutions, on pose $\phi = G_1 - G_2$. Dans le cas Dirichlet, cette constante est forcément nulle.

Corr. 2.H. La contribution d'un disque de rayon R au champ électrique sera dirigée selon la normale. On choisit l'axe z selon cette normale, et les coordonnées polaires (ρ, ϕ) dans le plan xOy .

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} (2\pi) \int \rho d\rho \frac{1}{h^2 + \rho^2} \frac{h}{h^2 + \rho^2} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{h}{(h^2 + R^2)^{1/2}} \right], \end{aligned} \quad (2.50a)$$

$$\xrightarrow{R \rightarrow \infty} E_z^+ \triangleq \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (2.50b)$$

Du côté $z < 0$, $E_z^- = -E_z^+$; la discontinuité de part et d'autre du disque est

$$E_z^+ - E_z^- = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (2.51)$$

Corr. 2.I. La décomposition entre parties principale et singulière s'obtient directement à partir de l'exercice précédent. Elle peut aussi se faire en découpant la surface limite S comme sur la Fig. 2.2. Si le rayon de l'hémisphère est R , la dérivée

$$\frac{\partial G_0(\mathbf{r}, \mathbf{x})}{\partial n, \mathbf{x}} = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{x}|^2} \quad (2.52)$$

se comporte en $1/R^2$ quand $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{x}$, mais elle est multipliée par la surface $R^2 d\Omega$ soit $2\pi R^2$, le résultat final sera (en désignant par $\mathbf{s}_+$ le côté où se trouve le point $\mathbf{r}$)

$$\frac{\partial V(\mathbf{s}_\pm)}{\partial n} = \oint d^2x \frac{\partial V(\mathbf{s}_\pm)}{\partial n} \pm \frac{1}{2} f(\mathbf{s}). \quad (2.53)$$

On retrouve ainsi les Éq. (2.24a) ; le même calcul aboutit aux Éq. (2.24b).

Corr. 2.J. La source image de q est la source $q' = -q$ située au point conjugué $\mathbf{x}'_0$. Soient ρ et ρ' les distances au centre, les deux points vérifient $\rho\rho' = a^2$. Les distances $R = |\mathbf{r} - \mathbf{x}_0|$ et $R' = |\mathbf{r} - \mathbf{x}'_0|$ sont en rapport constant $R'/R = a/\rho$.

$$G_D = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}| - \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\rho}{a} |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}'| \right) \quad (2.54)$$

vérifie $G_D = 0$ sur le cercle de rayon a .

Corr. 2.K. Le même argument montre que pour la sphère de rayon a ,

$$G_D = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{R} - \frac{a}{\rho} \frac{1}{R'} \right). \quad (2.55)$$

Corr. 2.L. La fonction de Green de Dirichlet pour cette géométrie a été trouvée à l'exercice précédent. La fonction f est donc la densité de charge associée à ce potentiel. Le champ électrique d'une charge q sera

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\hat{\mathbf{u}}}{R^2} + \frac{a}{\rho} \frac{\hat{\mathbf{u}}'}{R'^2} \right), \quad (2.56)$$

$\hat{\mathbf{u}}$ et $\hat{\mathbf{u}}'$ sont les vecteurs unitaires dirigés selon $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ et $\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0$. La densité de charge surfacique est la projection sur la normale au point $\mathbf{x}$ de la surface sphérique.

$$f(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{R^2} + \frac{a}{\rho} \frac{\hat{\mathbf{u}}' \cdot \hat{\mathbf{n}}}{R'^2} \right). \quad (2.57)$$

Corr. 2.M. Le potentiel U vérifie $\Delta U = 0$ dans un domaine dénué de sources et $U(\mathbf{x}) = f$ sur S . Le théorème de Green (2.1), appliqué à U et $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ implique

$$-U(\mathbf{r}) = \int_S d^2x U(\mathbf{x}) \partial_n G_D(\mathbf{x}, \mathbf{r}). \quad (2.58)$$

La surface S est la sphère ou le cercle selon le cas considéré. Le gradient de chacun des termes est dirigé selon les rayons vecteurs $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}'$. La projection sur la normale à la sphère introduit les facteurs $\cos\phi$ et $\cos\phi'$, ϕ et ϕ' étant les angles avec le rayon vecteur $\mathbf{a}$.

$$\rho^{(n)2} = a^2 + R^{(n)2} - 2aR^{(n)} \cos\phi^{(n)} \quad (2.59)$$

À 2D :

$$-U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int d\phi a f(\phi) \left(\frac{1}{R} \frac{a^2 + R^2 - \rho^2}{2aR} - \frac{1}{R'} \frac{a^2 + R'^2 - \rho'^2}{2aR'} \right). \quad (2.60)$$

Le signe $-$ est lié à la condition $G_D = 0$ sur le cercle limite. L'expression se simplifie en tenant compte de $R' = (a/\rho)R$ et $\rho\rho' = a^2$. On trouve

$$U(\mathbf{r}) = \frac{a^2}{2\pi} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) \int d\phi \frac{f(\phi)}{R^2} \quad (2D) \quad (2.61)$$

Dans le cas de la sphère 3D :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d\phi a^2 \left(\frac{1}{R^2} \frac{a^2 + R^2 - \rho^2}{2aR} - \frac{1}{R'^2} \frac{a^2 + R'^2 - \rho'^2}{2aR'} \right); \quad (2.62)$$

les mêmes simplifications aboutissent à

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} a^3 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) \int d\Omega \frac{f(\Omega)}{R^3} \quad (3D). \quad (2.63)$$

Ces relations permettent d'exprimer une fonction harmonique dans un domaine circulaire ou sphérique en fonction des valeurs arbitraires qu'elle prend sur la limite du contour. On montre que $U(\mathbf{r}) \rightarrow f(\mathbf{x})$ quand $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{x}$.

Électrostatique des conducteurs

3.1 Relation d'Ohm dans les conducteurs

Dans un conducteur soumis à une différence de potentiel, on observe le passage d'un courant provenant du mouvement des électrons libres du conducteur. Celui-ci vérifie approximativement la *relation d'Ohm* :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (3.1)$$

Pour tenir compte du retard (causal) entre les variations du champ et celles du courant, une expression améliorée de cette relation sera la convolution temporelle :

$$\mathbf{j}(t) = \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{E}(t') \sigma(t - t'), \quad (3.2)$$

soit, après transformation de Fourier, et en notant (avec $\tau \equiv t - t'$)

$$\sigma(\omega) \triangleq \int_0^{+\infty} e^{i\omega\tau} \sigma(\tau) d\tau, \quad (3.3)$$

l'expression

$$\mathbf{j}(\omega) = \sigma(\omega) \mathbf{E}(\omega). \quad (3.4)$$

La plupart des observations physiques sont en accord avec cette description approchée.

Les relations (3.1) et (3.4) violent cependant une loi fondamentale microscopique de l'électromagnétisme vérifiée par les équations de Maxwell : l'*invariance par renversement du temps*. Lorsque le paramètre t (le temps) change de signe, les vitesses de toutes les charges sont inversées, les courants aussi, mais le champ électrique $\mathbf{E}$ (comme le champ coulombien statique) devrait rester inchangé ; or les relations (3.1) et (3.4), de nature statistique, sont liées à des phénomènes de diffusion, et ne respectent pas l'invariance (microscopique) du renversement temporel ($\sigma(\tau) \equiv 0$ pour $\tau < 0$). La loi d'Ohm reste cependant une excellente approximation pour les fréquences usuelles ($\ll 10^{15}$ Hz).