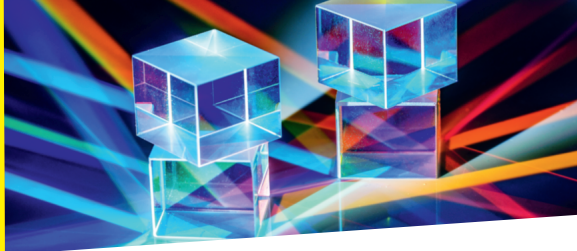


PrépaBAC



T^{le}
GÉNÉRALE

Maths

SPÉCIALITÉ

**Cours &
entraînement**

**NOUVEAU
BAC**

Pour **booster**
ton dossier
Parcoursup!

- ✓ Un **cours** complet et visuel
- ✓ Les **méthodes** clés
- ✓ **250 exos & sujets** de BAC
- ✓ Des **corrigés** expliqués

INCLUS

Des **vidéos** de révision



OFFERT Un abonnement
au site de révision **annabac**





Maths

SPÉCIALITÉ

**Cours &
entraînement**

- ▶ **Michel Abadie**
Professeur agrégé de mathématiques
- ▶ **Jacques Delfaud**
Professeur agrégé de mathématiques
- ▶ **Pierre Larivière**
Professeur certifié de mathématiques
- ▶ **Annick Meyer**
Professeure agrégée de mathématiques
- ▶ **Jean-Dominique Picchiottino**
Professeur agrégé de mathématiques
- ▶ **Sophie Touzet**
Professeure agrégée de mathématiques
- ▶ **Martine Salmon**
Professeure agrégée de mathématiques

Mode d'emploi

Voici les ressources que vous trouverez dans ce Prépac :

Dans chaque chapitre

Un cours visuel

1. Des fiches synthétiques et illustrées
2. Des méthodes détaillées
3. Une carte mentale récapitulative

Un entraînement progressif

1. Des quiz pour se tester
2. Des exercices guidés
3. Des sujets de type bac

Des corrigés détaillés



Et aussi : Des vidéos de cours au fil des chapitres. Retrouvez leur liste **p. 8**

Nous vous recommandons d'utiliser régulièrement l'ouvrage, en fonction de vos besoins. Ainsi vous pourrez aborder l'épreuve écrite de maths et le Grand Oral en toute sérénité, et acquérir les compétences nécessaires à la poursuite de vos études.

Les auteurs



Michel Abadie



Jacques Delfaud



Pierre Larivière



Annick Meyer



Jean-Dominique
Picchiottino



Sophie Touzet



Martine Salmon

SOMMAIRE

Algèbre et géométrie

1 Combinatoire et dénombrement



COURS & MÉTHODES

- 1 Réunion, produit cartésien et parties d'ensembles . . . 12
- 2 Arrangements, factorielle et combinaisons . . . 14
- 3 Démonstration par récurrence . . . 16

MÉMO VISUEL

EXERCICES & SUJETS

- SE TESTER • DÉMONSTRATIONS CLÉS . . . 20
- S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC . . . 21

CORRIGÉS

18

25

2 Vecteurs, droites et plans de l'espace

COURS & MÉTHODES

- 4 Les vecteurs de l'espace . . . 34
- 5 Positions relatives de deux droites de l'espace . . . 36
- 6 Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace . . . 38
- 7 Positions relatives de deux plans de l'espace . . . 40
- 8 Étude vectorielle du parallélisme dans l'espace . . . 42

MÉMO VISUEL



44

EXERCICES & SUJETS

- SE TESTER • S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC . . . 46

CORRIGÉS

52



3 Orthogonalité et distances dans l'espace



COURS & MÉTHODES

- 9 Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace . . . 58
- 10 Orthogonalité et produit scalaire . . . 60
- 11 Projeté orthogonal d'un point sur une droite ou un plan de l'espace . . . 62

MÉMO VISUEL



64

EXERCICES & SUJETS

- SE TESTER • DÉMONSTRATION CLÉ . . . 66
- S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC . . . 67

CORRIGÉS

73

4 Équations de droites et de plans



COURS & MÉTHODES

- 12** Équation cartésienne d'un plan de l'espace 84
- 13** Représentation paramétrique d'une droite de l'espace 86
- 14** Coordonnées des points d'intersection de droites et de plans 88

MÉMO VISUEL



90

EXERCICES & SUJETS

- SE TESTER • DÉMONSTRATION CLÉ** 92
- S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC** 94
- CORRIGÉS** 97

Analyse

5 Suites numériques

COURS & MÉTHODES

- 15** Définitions, comparaison et encadrement 110
- 16** Limites : opérations et suites monotones 112
- 17** Suites géométriques et fonction exponentielle 114

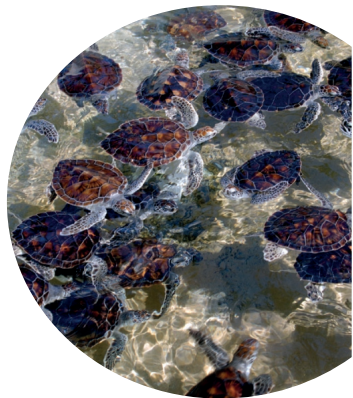
MÉMO VISUEL



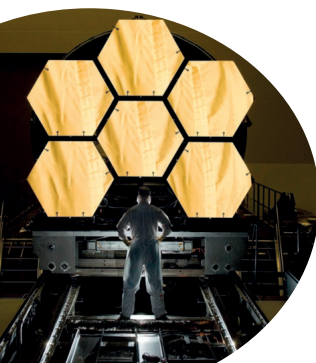
116

EXERCICES & SUJETS

- SE TESTER • DÉMONSTRATIONS CLÉS** 118
- S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC** 120
- CORRIGÉS** 125



6 Compléments sur la dérivation



COURS & MÉTHODES

- 18** Dérivée de la composée de deux fonctions 136
- 19** Fonctions convexes 138

MÉMO VISUEL



140

EXERCICES & SUJETS

- SE TESTER • DÉMONSTRATION CLÉ** 142
- S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC** 143

CORRIGÉS

151

7 Limites et continuité des fonctions d'une variable réelle



COURS & MÉTHODES

20	Limites et asymptotes	160
21	Opérations sur les limites, comparaison	162
22	Limites et continuité	164

MÉMO VISUEL



EXERCICES & SUJETS

SE TESTER • DÉMONSTRATION CLÉ

S'ENTRAÎNER • OBJECTIF **BAC**

CORRIGÉS

166

168

169

174

8 Fonctions de référence : logarithme, sinus et cosinus

COURS & MÉTHODES

23	Définition et propriétés analytiques de la fonction logarithme népérien	184
24	Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien	186
25	Comparaison des fonctions puissance, ln et exp	188
26	Fonctions trigonométriques	190

MÉMO VISUEL



EXERCICES & SUJETS

SE TESTER • DÉMONSTRATIONS CLÉS

S'ENTRAÎNER • OBJECTIF **BAC**

CORRIGÉS

184

186

188

190

192

194

195

200



9 Primitives, équations différentielles



COURS & MÉTHODES

27	Notions d'équation différentielle et de primitive	212
28	Équation différentielle $y' = ay + f$	214
29	Calculs de primitives	216

MÉMO VISUEL



EXERCICES & SUJETS

SE TESTER • DÉMONSTRATIONS CLÉS

S'ENTRAÎNER • OBJECTIF **BAC**

CORRIGÉS

218

220

221

225

10 Calcul intégral



COURS & MÉTHODES

30	Définition de l'intégrale	232
31	Propriétés de l'intégrale	234

MÉMO VISUEL

		236
--	--	-----

EXERCICES & SUJETS

SE TESTER • DÉMONSTRATIONS CLÉS	238
S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC	240

CORRIGÉS

	245
--	-----

Probabilités

11 Schéma de Bernoulli, loi binomiale

COURS & MÉTHODES

32	Schéma de Bernoulli	258
33	Succession d'épreuves	260
34	Loi binomiale	262

MÉMO VISUEL

		264
--	---	-----

EXERCICES & SUJETS

SE TESTER • DÉMONSTRATION CLÉ	266
S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC	267

CORRIGÉS

	276
--	-----



12 Sommes de variables aléatoires



COURS & MÉTHODES

35	Somme de deux variables aléatoires	286
36	Application à la loi binomiale	288
37	Échantillon de taille n d'une loi de probabilité	290

MÉMO VISUEL

EXERCICES & SUJETS

SE TESTER • DÉMONSTRATION CLÉ	294
S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC	295

CORRIGÉS

CORRIGÉS	300
----------	-----

13 Concentration, loi des grands nombres

COURS & MÉTHODES

38	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev Inégalité de concentration	312
39	Loi des grands nombres	314

MÉMO VISUEL

MÉMO VISUEL	316
-------------	-----

EXERCICES & SUJETS

SE TESTER • S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC	318
--	-----

CORRIGÉS

CORRIGÉS	324
----------	-----



ANNEXES

40	Les listes	336
41	Logique mathématique	338
42	Algorithmique : variables, boucles, fonctions	340
43	Le raisonnement par récurrence	342
Index		345



Les vidéos de l'ouvrage



Retrouvez l'ensemble de ces vidéos
sur la chaîne Youtube **annabac**

■ Les notions-clés

► Quelles sont les positions relatives de droites et de plans dans l'espace ?

hatier-clic.fr/mat_T_01



► Qu'est-ce qu'une représentation paramétrique de droite dans l'espace ?

hatier-clic.fr/mat_T_02



► Comment déterminer une équation cartésienne de plan dans l'espace ?

hatier-clic.fr/mat_T_03



► Comment appliquer les principaux théorèmes relatifs aux limites de suites ?

hatier-clic.fr/mat_T_04



► Qu'est-ce que la composée de deux fonctions ?

hatier-clic.fr/mat_T_05



► Comment étudier les asymptotes à la courbe représentative d'une fonction ?

hatier-clic.fr/mat_T_06



► Comment montrer l'existence de solutions à l'équation $f(x) = k$?

hatier-clic.fr/mat_T_07



► Quelles sont les propriétés à connaître de la fonction logarithme népérien ?

hatier-clic.fr/mat_T_08



► Comment déterminer une primitive d'une fonction ?

hatier-clic.fr/mat_T_09



► Comment montrer qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale ?

hatier-clic.fr/mat_T_10

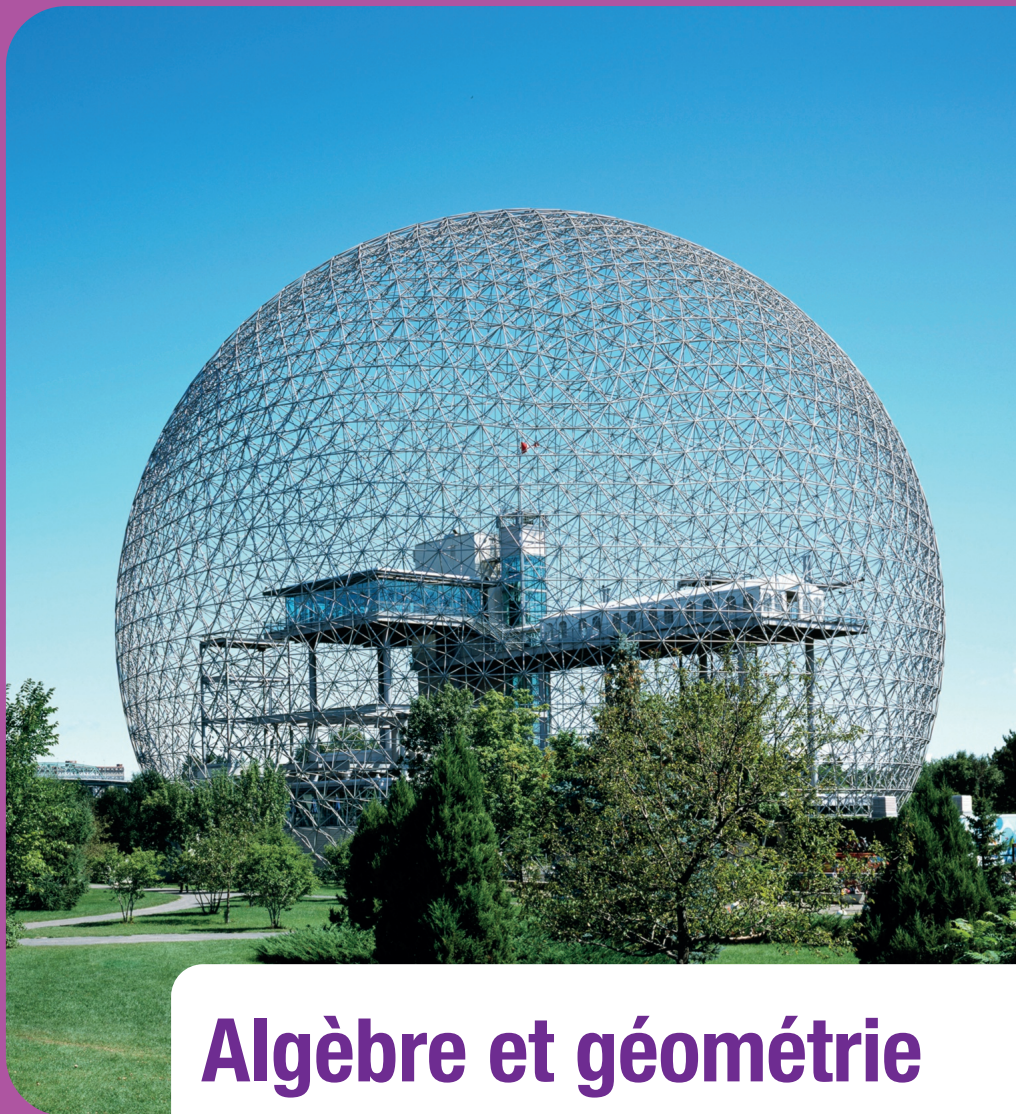


■ Savoir-faire & démonstrations

► Maths T^{le} (spécialité)
Savoir-faire & démonstrations

hatier-clic.fr/mat_T





Algèbre et géométrie

1 Combinatoire et dénombrement

La combinatoire et le dénombrement permettent de compter le nombre d'objets possédant une qualité donnée. La gestion des mégadonnées (big data), dont la taille rend le dénombrement difficile, constitue un défi pour les statistiques et l'informatique.

FICHES DE COURS

1	Réunion, produit cartésien et parties d'ensembles	12
2	Arrangements, factorielle et combinaisons	14
3	Démonstration par récurrence	16

MÉMO VISUEL

18

EXERCICES & SUJETS

SE TESTER	Exercices 1 à 3	20
DÉMONSTRATIONS CLÉS	Exercices 4 à 6	21
S'ENTRAÎNER	Exercices 7 à 13	21
OBJECTIF BAC	Exercice 14 • Sujet guidé	23

CORRIGÉS

Exercices 1 à 14	25
------------------	----

1

Réunion, produit et parties d'ensembles

En bref

Décrire un ensemble d'objets à l'aide de réunions, de produits ou de parties d'ensembles permet de les dénombrer rigoureusement.

I Réunion de deux ensembles

■ **Définition :** La **réunion** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A **ou** à B ; elle est notée $A \cup B$.



À NOTER

L'**intersection** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A et à B ; elle est notée $A \cap B$.

■ **Principe additif :** Soient A et B deux ensembles disjoints (d'intersection vide). Si m et n sont les nombres d'éléments respectifs de A et de B , alors la réunion de A et B comporte $m + n$ éléments.



À NOTER

Si les deux ensembles ne sont pas disjoints, il faut ôter au résultat le nombre d'éléments r de leur intersection.

II Produit cartésien

■ **Définitions :** Le **produit cartésien** de deux ensembles A et B est l'ensemble des couples (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$. Il est noté $A \times B$.

On note A^k l'ensemble $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ termes}}$, ces éléments sont des k -uplets.

■ **Principe multiplicatif :** Si m et n (entiers naturels non nuls) sont les nombres d'éléments respectifs de deux ensembles A et B , alors le produit cartésien $A \times B$ comporte $m \times n$ éléments.

Soit A un ensemble à n éléments et k un entier naturel non nul. L'ensemble A^k des k -uplets (k -listes) d'éléments de A comporte n^k éléments.

III Parties d'un ensemble

■ **Définition :** Un ensemble A est une **partie** d'un ensemble E si et seulement si tous les éléments de A sont des éléments de E . On écrit alors $A \subset E$.

On dit également que A est un **sous-ensemble** de E .

■ **Théorème :** Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n .



À NOTER

C'est également le nombre de n -uplets de l'ensemble $\{0; 1\}$.

Méthodes

1 Déterminer le nombre d'éléments d'une réunion d'ensembles

Déterminer le nombre d'entiers naturels inférieurs à 199 dont l'écriture décimale comporte le chiffre 0.

SOLUTION

On considère les ensembles disjoints suivants :

$A = \{0; 10; \dots; 90\}$, le sous-ensemble de ces entiers inférieurs à 99 ;

$B = \{100; \dots; 109\}$, le sous-ensemble de ces entiers compris entre 100 et 109

et $C = \{110; \dots; 190\}$ le sous-ensemble de ces entiers supérieurs à 109.

A et B ont chacun 10 éléments et C en a 9. **Il y a donc en tout 29 entiers naturels** inférieurs à 199 dont l'écriture décimale comporte le chiffre 0.



CONSEILS

Regroupez les nombres considérés en plusieurs ensembles facilement dénombrables.

2 Utiliser le produit cartésien

Les cartes d'un jeu sont numérotées de 1 à 3 et coloriées en rouge, vert, bleu, jaune ou noir. Toutes les cartes de ce jeu sont différentes et ce jeu contient toutes les cartes possibles.

Combien y a-t-il de cartes dans ce jeu ?

SOLUTION

Considérons $N = \{1; 2; 3\}$ et $C = \{\text{rouge}; \text{vert}; \text{bleu}; \text{jaune}; \text{noir}\}$. Alors chaque couple de $N \times C$ définit une unique carte du jeu complet.

Il y a donc $3 \times 5 =$ **15 cartes** dans ce jeu.



CONSEILS

Caractérisez chaque carte par un couple.

3 Dénombrer le nombre de parties d'un ensemble

Un caractère Braille est représenté par deux colonnes de trois points chacune, chaque point étant ou non en relief.

Combien peut-on former de caractères différents, sachant qu'au moins un des points doit être en relief ?

SOLUTION

Considérons l'ensemble B des six points des deux colonnes, tous ces points étant en relief. Fabriquer un caractère braille, c'est choisir les points qui seront en relief, c'est-à-dire choisir une partie de B différente de la partie vide (un au moins des points est en relief) : il y a donc $2^6 - 1$ choix possibles, soit **63 caractères brailles**.



CONSEILS

Considérez un caractère comme une partie d'un ensemble à six éléments.

2

Arrangements, factorielle et combinaisons

En bref

Le nombre de listes de k objets deux à deux distincts pris parmi n , ordonnées ou non, se détermine en fonction de k et de n .

I Arrangements et factorielle

■ **Définition :** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle **arrangement** de k éléments d'un ensemble E comportant n éléments, tout k -uplet d'éléments deux à deux distincts de E .

■ **Théorème :** Le nombre d'arrangements de k éléments d'un ensemble à n éléments est $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$.

■ **Définition :** La **factorielle** d'un entier naturel non nul n est le produit des entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à n ; elle est notée $n!$.

On convient de plus que $0! = 1$.

Remarque : Un arrangement des n éléments d'un ensemble E à n éléments est appelé une **permutation** des éléments de E . Il y a $n!$ permutations de E .



À NOTER

Pour tout entier naturel n :
 $(n+1)! = (n+1) \times n!$

II Combinaisons

■ **Définition :** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle **combinaison** de k éléments d'un ensemble E comportant n éléments, toute partie de E possédant k éléments.

■ **Théorème :** Soit $n \in \mathbb{N}$ et k entier, $0 \leq k \leq n$. Le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments est $\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$ ou encore $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ce nombre est noté $\binom{n}{k}$ qu'on lit « k parmi n ».

■ Valeurs particulières et propriétés

Pour tous entiers naturels n et k , $0 \leq k \leq n$:

$$\bullet \binom{n}{0} = 1 ; \binom{n}{1} = n ; \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \text{ et } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

■ Relation de Pascal

$$\text{Si } k+1 \leq n, \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Cette relation permet de construire le **triangle de Pascal** qui donne la valeur des $\binom{n}{k}$ pour des petites valeurs de n :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Méthodes

1 | Déterminer un nombre de k -uplets

On dispose de 10 couleurs pour fabriquer un drapeau tricolore de trois bandes horizontales. Combien de drapeaux différents pourra-t-on fabriquer ?



CONSEILS

Identifiez la taille des k -uplets, c'est-à-dire k , et l'ensemble des éléments pouvant former ces k -uplets.

SOLUTION

Pour fabriquer un drapeau tricolore il faut choisir trois couleurs différentes parmi les 10 couleurs et colorier les bandes du drapeau, par exemple de haut en bas, à l'aide de ces trois couleurs.

Il y a $10 \times 9 \times 8$ triplets de trois couleurs distinctes, soit **720 drapeaux** tricolores possibles.

2 | Calculer à l'aide de combinaisons

a. On désire former une équipe de 15 élèves dans une classe qui en comporte 20. Combien d'équipes différentes pourrait-on former ?

b. Calculer $\binom{9}{4}$ et $\binom{9}{6}$. En déduire $\binom{9}{5}$, $\binom{10}{5}$, $\binom{10}{6}$ et $\binom{11}{6}$.



CONSEILS

On rappelle que $\binom{n}{k}$ est le nombre de choix de k objets parmi n .

SOLUTION

a. Il y a $\binom{20}{15}$ manières de choisir 15 élèves cartes parmi 20.

Or, $\binom{20}{15} = \binom{20}{5}$ par symétrie et $\binom{20}{5} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \mathbf{15\,504}$.

b. On a $\binom{9}{4} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \mathbf{126}$ et, par symétrie, $\binom{9}{6} = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = \mathbf{84}$.

En utilisant la symétrie puis la relation de Pascal :

$$\binom{9}{5} = \binom{9}{4} = \mathbf{126} ;$$

$$\binom{10}{5} = \binom{9}{4} + \binom{9}{5} = \mathbf{252} ;$$

$$\binom{10}{6} = \binom{9}{5} + \binom{9}{6} = \mathbf{210} ;$$

$$\text{et } \binom{11}{6} = \binom{10}{5} + \binom{10}{6} = \mathbf{462}.$$

3

Démonstration par récurrence

En bref

Une démonstration par récurrence consiste à démontrer qu'une infinité de propositions dépendantes d'un entier naturel n sont vraies.

I Le principe de récurrence

Soit n_0 un entier naturel et soit $\mathcal{P}_{n_0}, \mathcal{P}_{n_0+1}, \mathcal{P}_{n_0+2}, \dots, \mathcal{P}_n, \dots$ une suite de propositions.

Si la $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie et si, pour n'importe quel entier naturel n tel que $n \geq n_0$, la vérité de $\mathcal{P}_n$ entraîne celle de $\mathcal{P}_{n+1}$, alors on peut conclure que pour tout entier naturel n tel que $n \geq n_0$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.



À NOTER

Dans la grande majorité des cas, n_0 vaut 0 ou 1.

II La démonstration par récurrence

1 Mise en œuvre

Soit n_0 un entier naturel. Pour démontrer par récurrence qu'une proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on procède en deux étapes qui permettront de conclure :

- l'**initialisation** pour vérifier que la proposition $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie ;
- l'**hérédité** montrant que si la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel n quelconque tel que $n \geq n_0$, alors la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ doit être également vraie.

Le principe de récurrence permettra alors de conclure que pour tout entier naturel n tel que $n \geq n_0$, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie.



À NOTER

Lors de la seconde étape, on suppose la proposition $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain rang n : c'est l'**hypothèse de récurrence**, souvent notée HR.

2 Quelques pièges à éviter

■ Oublier l'initialisation : par exemple la proposition « $10^n + (-1)^n$ est un multiple de 11 » est héréditaire, puisque $10^{n+1} + (-1)^{n+1} = 10(10^n + (-1)^n) - 11(-1)^n$, mais elle est fausse pour tout entier n .

■ Supposer, pour montrer l'hérédité, que la proposition est vraie pour **tout** entier naturel n , puisque c'est ce que l'on veut justement démontrer !

On supposera donc la proposition vraie pour **un** entier naturel.