

TOUT EN FICHES

Sous la direction de

Frédéric Bertrand

Professeur des universités à l'université de
technologie de Troyes

et

Myriam Maumy-Bertrand

Maître de conférences hors classe et HDR
à l'université de technologie de Troyes

LE COURS DE

MATHÉMATIQUES POUR LES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

LICENCE, IUT, PRÉPAS, ÉCOLES D'INGÉNIEURS

3^e
ÉDITION

Sandie Ferrigno

Maître de conférences à l'université de Lorraine

Didier Marx

Agrégé de physique, docteur en génie électrique et enseignant vacataire
en mathématiques appliquées à l'EEIGM et à l'ENSEM (Nancy)

Aurélie Muller-Gueudin

Maître de conférences à l'université de Lorraine

Yacoubou Rabba Idi

Agrégé de mathématiques dans la section étranger

DUNOD

Illustration de couverture :
ollirg-shutterstock.com



Pour aller plus loin et mettre toutes les chances de votre côté,
des ressources complémentaires sont disponibles sur le site
www.dunod.com.

Connectez-vous à la page de l'ouvrage (grâce aux menus déroulants, ou en saisissant
le titre, l'auteur ou l'ISBN dans le champ de recherche de la page d'accueil).
Sur la page de l'ouvrage, sous la couverture, cliquez sur le lien « LES + EN LIGNE ».

© Dunod, 2013, 2019, 2022

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
ISBN 978-2-10-084669-6

www.dunod.com

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

<i>Avant-propos</i>	ix
<i>Comment utiliser cet ouvrage ?</i>	x
Partie 1 Algèbre	1
Fiche 1 Logique	2
Fiche 2 Quantificateurs et raisonnements mathématiques	6
Fiche 3 Ensembles	10
Fiche 4 Relations binaires	14
Fiche 5 Applications	18
Fiche 6 Nombres entiers, nombres rationnels	22
Fiche 7 Structures algébriques : groupes	26
Fiche 8 Structures algébriques : anneaux et corps	30
Fiche 9 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	34
Fiche 10 Vecteurs	38
Fiche 11 Vecteurs et éléments de géométrie	42
Fiche 12 Polynômes	46
Fiche 13 Fractions rationnelles	50
Fiche 14 Systèmes linéaires	54
Fiche 15 Pivot de Gauss	58
Fiche 16 Nombres complexes	62
Fiche 17 Nombres complexes et géométrie plane	66
Fiche 18 Espaces vectoriels	70
Fiche 19 Bases – Dimension finie	74
Fiche 20 Applications linéaires	78
Fiche 21 Noyau, image et rang d'une application linéaire	82
Fiche 22 Calcul matriciel	86
Fiche 23 Matrices et applications linéaires	90
Fiche 24 Déterminant	94
Fiche 25 Applications du calcul de déterminant	98

Fiche 26	Diagonalisation	102
Fiche 27	Applications de la diagonalisation	106
Fiche 28	Espaces préhilbertiens	110
Fiche 29	Orthogonalité, groupe orthogonal	114
Fiche 30	Coniques	118
<i>Matrices et cryptographie</i>		122
Partie 2	Analyse	125
Fiche 31	Nombres réels	126
Fiche 32	Suites numériques	130
Fiche 33	Convergence et divergence d'une suite numérique	134
Fiche 34	Suites arithmétique et géométrique	138
Fiche 35	Suites particulières	142
Fiche 36	Continuité d'une fonction	146
Fiche 37	Dérivabilité d'une fonction	150
Fiche 38	Étude globale des fonctions dérivables	154
Fiche 39	Fonctions circulaires et circulaires réciproques	158
Fiche 40	Fonctions hyperboliques et hyperboliques réciproques	162
Fiche 41	Formules de Taylor	166
Fiche 42	Développements limités	170
Fiche 43	Étude d'une fonction	174
Fiche 44	Intégrales définies sur un segment	178
Fiche 45	Primitives et intégrales d'une fonction continue	182
Fiche 46	Séries numériques	186
Fiche 47	Séries à termes positifs	190
Fiche 48	Suites de fonctions	194
Fiche 49	Séries de fonctions	198
Fiche 50	Séries entières	202
Fiche 51	Développement d'une fonction en série entière	206
Fiche 52	Séries de Fourier	210
Fiche 53	Intégration sur un intervalle quelconque	214
Fiche 54	Convergences monotone et dominée – Intégrales dépendant d'un paramètre	218
Fiche 55	Équations différentielles : premier ordre	222
Fiche 56	Équations différentielles : second ordre	226
Fiche 57	Fonction d'une variable réelle : exercices de synthèse	230
Fiche 58	Fonctions de plusieurs variables	234
Fiche 59	Dérivées partielles – Gradient – Différentielle	238

Fiche 60	Dérivées partielles – Gradient – Différentielle (suite)	242
Fiche 61	Dérivées partielles d'ordre deux – Optimisation	246
Fiche 62	Courbes et surfaces paramétrées	250
Fiche 63	Courbes planes paramétrées	254
Fiche 64	Courbe plane définie par son équation polaire	258
Fiche 65	Intégrales doubles et multiples	262
Fiche 66	Sommabilité et intégrales doubles ou multiples généralisées	266
Fiche 67	Intégrales curvilignes	270
Fiche 68	Intégrales de surface	274
Fiche 69	Transformée de Laplace	278
Fiche 70	Exemples d'équations aux dérivées partielles	282
<i>Le Wi-Fi</i>		286
Partie 3	Probabilités	289
Fiche 71	Dénombrement	290
Fiche 72	Événements et probabilité	294
Fiche 73	Probabilité sur un univers fini, dénombrable ou continu	298
Fiche 74	Événements indépendants – Probabilité conditionnelle Théorème de Bayes	302
Fiche 75	Variable aléatoire réelle – Loi d'une variable aléatoire réelle	306
Fiche 76	Fonction de répartition	310
Fiche 77	Espérance	314
Fiche 78	Moments, variance et écart-type	318
Fiche 79	Paramètres de position – Intervalle de probabilité	322
Fiche 80	Fonction d'une variable aléatoire réelle – Calcul de loi	326
Fiche 81	Lois discrètes usuelles à valeurs dans un ensemble fini	330
Fiche 82	Lois discrètes usuelles à valeurs dans un ensemble dénombrable	334
Fiche 83	Loi normale	338
Fiche 84	Lois continues usuelles	342
Fiche 85	Lois continues usuelles (suite)	346
Fiche 86	Couple aléatoire – Loi d'un couple discret	350
Fiche 87	Loi d'un couple aléatoire continu	354
Fiche 88	Fonctions de répartition d'un couple aléatoire	358
Fiche 89	Moments de plusieurs variables aléatoires réelles	362
Fiche 90	Variables aléatoires indépendantes	366
Fiche 91	Fonction d'un couple aléatoire – Calcul de loi	370
Fiche 92	Loi des grands nombres	374
Fiche 93	Théorème de la limite centrale	378

Fiche 94	Approximations d'une loi par une autre	382
Fiche 95	Formulaire	386
	<i>Probabilités et jeux de hasard</i>	388
Partie 4	Statistique	391
Fiche 96	Concepts fondamentaux de la statistique	392
Fiche 97	Statistique descriptive univariée	396
Fiche 98	Représentations graphiques pour les séries statistiques quantitatives	400
Fiche 99	Représentations graphiques pour les séries statistiques qualitatives	404
Fiche 100	Caractéristiques de position	408
Fiche 101	Caractéristiques de dispersion	412
Fiche 102	Boîte à moustaches et caractéristiques de forme	416
Fiche 103	Statistique descriptive bivariée	420
Fiche 104	Représentations graphiques bivariées	424
Fiche 105	Mesures de liaison entre deux caractères	428
Fiche 106	Échantillonnage – Modèles : vocabulaire	432
Fiche 107	Estimateurs et propriétés	434
Fiche 108	Méthodes de construction d'estimateurs	438
Fiche 109	Exemples d'estimateurs de caractéristiques de position	442
Fiche 110	Exemples d'estimateurs de caractéristiques de dispersion	446
Fiche 111	Estimation par intervalle de confiance et intervalle de confiance pour une proportion	450
Fiche 112	Intervalles de confiance pour une espérance et une variance	454
Fiche 113	Introduction à la théorie des tests d'hypothèses	458
Fiche 114	Tests de conformité d'une espérance ou d'une variance à une norme	462
Fiche 115	Tests de comparaison de deux variances	466
Fiche 116	Tests de comparaison de deux espérances	470
Fiche 117	Tests du Khi-deux : adéquation et indépendance	474
Fiche 118	Test de normalité	478
Fiche 119	Régression linéaire simple	482
Fiche 120	Intervalles de confiance et tests en régression linéaire simple	486
	<i>Annexes</i>	490
	<i>Les sondages</i>	502
	<i>Corrigés des exercices</i>	505
	<i>(Les corrigés d'une sélection d'exercices sont disponibles sur dunod.com)</i>	
	<i>Index</i>	557

Avant-propos

Cet ouvrage résulte de la collaboration de cinq mathématiciens (Aurélie, Frédéric, Myriam Sandie et Yacouba) et d'un physicien (Didier). Il est organisé en quatre parties : algèbre, analyse, probabilités et statistique. Il s'adresse aux étudiants des deux premières années post-bac : licences, prépas intégrées ou IUT. Ce livre peut également aider à la préparation au CAPES de mathématiques. Yacoubou Rabba Idi, un mathématicien, nous a rejoint pour la préparation de la seconde édition du livre.

Le cours, structuré en fiches, est exposé de manière claire et synthétique. Chaque fiche présente les points essentiels à retenir, des exercices d'application illustrent les notions utiles et de nombreux exercices corrigés permettent de se préparer aux examens et concours. Certains corrigés sont disponibles sur le site dunod.com sur la page de description de l'ouvrage. Quatre focus apportent enfin des compléments historiques ou techniques en lien avec des sujets de société.

Dans la collection « Tout en fiches », vous trouverez donc l'essentiel, sauf votre propre travail, bien sûr. Alors courage !

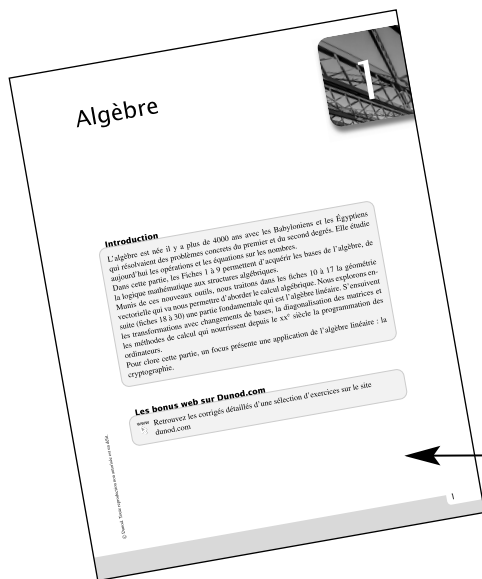
Toutes vos remarques, vos commentaires, vos critiques, et même vos encouragements seront accueillis avec plaisir aux adresses électroniques suivantes :

frederic.bertrand@utt.fr
myriam.maumy@utt.fr

Ce livre a bénéficié de la relecture attentive d'un comité de relecteurs, constitué d'enseignants et d'étudiants. Nous souhaitons qu'ils soient tous grandement remerciés ici :

Samuela Aubin, maître de conférences à l'INSA de Lyon ;
Jean-Romain Heu, professeur agrégé à l'INSA de Strasbourg ;
Jean Labourdette, docteur en mathématiques et directeur de l'ESIEA Ouest ;
Vincent Lécuyer, professeur agrégé à l'ENSIC de Nancy ;
James Ledoux, professeur des universités à l'INSA de Rennes ;
Renaud Marty et Bruno Pinçon, maîtres de conférences à l'université de Lorraine ;
Constantin Morarescu, maître de conférences à l'ENSEM de Nancy ;
Raphaële Supper, maître de conférences à l'université de Strasbourg.

Comment utiliser cet ouvrage ?



Un découpage en quatre grandes parties :
Algèbre, Analyse, Probabilités, Statistique

Des compléments sur dunod.com

120 fiches de cours

Les notions essentielles avec des renvois pour naviguer d'une fiche à l'autre

De très nombreux exemples

Un repérage facile

Fiche 1

Logique

La logique mathématique permet l'étude des mathématiques en tant que langage.

Définition 1.1
Une **assertion** est un énoncé mathématique auquel nous pouvons attribuer la valeur de vérité vrai (V) ou faux (F) mais jamais les deux simultanément.

Exemples

1. L'assertion « $10 > 100$ » est fautive (F).
2. L'assertion « 12 est un multiple de 4 » est vraie (V).
3. L'énoncé « π vaut approximativement 3,14 » n'est pas une assertion car il n'est pas assez précis pour déterminer s'il est vrai ou faux. En effet, il sera vrai si nous nous contentons d'une approximation de la valeur de π au centième près et faux sinon.

Définition 1.2
Un **prédicat** P est un énoncé mathématique contenant des lettres appelées variables tel que, quand nous remplaçons chacune de ces variables par un élément donné de cette variable nous obtenons une assertion.

Exemple
L'énoncé suivant « n est un multiple de 6 » est un prédicat car il devient une assertion lorsque nous donnons une valeur à n . En effet,
 • « 10 est un multiple de 6 » est une assertion fautive (F).
 • « 12 est un multiple de 6 » est une assertion vraie (V).

Remarque : Les **connecteurs logiques** permettent de créer de nouveaux prédicats, dits **composés**, à partir de prédicats de référence.

Définition 1.3
Soit P un prédicat. La **négation** de P est le prédicat noté $\neg P$ ou $\sim P$, qui est vrai lorsque P est faux et faux lorsque P est vrai. Nous résumons ceci dans la table de vérité suivante :

P	$\neg P$
V	F
F	V

Exemple
Soit P le prédicat « $x > 5$ ». Alors $\neg P$ est le prédicat « $x \leq 5$ ».

Remarque 1 : En effet, le contraire de « supérieur à » est « inférieur ou égal à », et non simplement « inférieur à ». De même, le contraire de « pour tout x , P » n'est pas « quel que soit x , $\neg P$ » mais « il existe x pour lequel $\neg P$ ».

Définition 1.4
Soient P et Q deux prédicats.

- Le prédicat « $P \Rightarrow Q$ » appelé **implication** de P vers Q est un prédicat qui est faux lorsque P est vrai et Q est faux, et vrai dans tous les autres cas.
- Le prédicat « $P \Leftrightarrow Q$ » appelé **équivalence** de P et de Q est un prédicat qui est vrai lorsque P et Q sont simultanément vrais ou faux, et faux dans tous les autres cas.
- Le prédicat « $P \wedge Q$ » (P et Q) appelé **conjonction** de P et de Q est un prédicat qui est vrai lorsque P et Q sont simultanément vrais, et faux dans tous les autres cas.
- Le prédicat « $P \vee Q$ » (P ou Q) appelé **disjonction** de P et de Q est un prédicat qui est vrai lorsque au moins un des prédicats P et Q est vrai, et faux dans tous les autres cas.

Nous résumons ceci dans la table de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F

Remarque 1 : Le « ou » dans la définition de $P \vee Q$ a un sens inclusif, à ne pas confondre avec le « ou » exclusif de « fromage ou dessert ».

Théorème 1.1
• Soient P et Q deux prédicats. Nous avons les équivalences logiques (notées par $=$) suivantes :

$$\neg(P \text{ ou } Q) = (\neg P) \text{ et } \neg(Q),$$

$$\neg(P \text{ et } Q) = (\neg P) \text{ ou } \neg(Q).$$

Ce sont les **lois de Morgan** pour les prédicats.

• Soient P , Q et R trois prédicats. Nous avons les équivalences logiques suivantes :

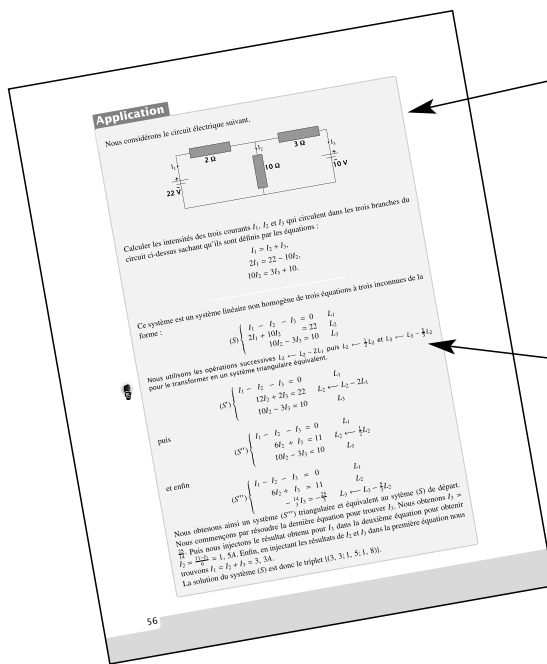
$$(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)) = ((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)),$$

$$(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)) = ((P \text{ et } Q) \text{ et } (P \text{ et } R)).$$

Théorème 1.2
Soient P et Q deux prédicats. Nous avons les équivalences logiques suivantes :

- $\neg(\neg P) = P$,
- $[P \Rightarrow Q] = [\neg(P) \text{ ou } Q]$.

2
3

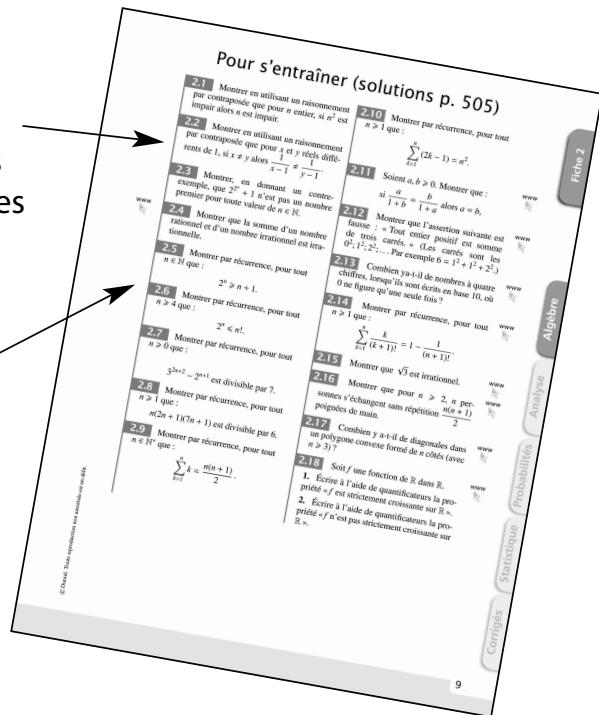


Des exemples d'applications dans tous les domaines des sciences

Des conseils méthodologiques

Des exercices pour s'entraîner
Les solutions sont regroupées
en fin d'ouvrage ou disponibles
sur le site dunod.com

Des renvois aux “+ en ligne”



Retrouvez les “+ en ligne” sur dunod.com :

- Les corrigés détaillés d'une sélection d'exercices signalés par le pictogramme .
- Des informations sur le logiciel libre **R**.

Algèbre



Introduction

L'algèbre est née il y a plus de 4000 ans avec les Babyloniens et les Égyptiens qui résolvait des problèmes concrets du premier et du second degrés. Elle étudie aujourd'hui les opérations et les équations sur les nombres.

Dans cette partie, les Fiches 1 à 9 permettent d'acquérir les bases de l'algèbre, de la logique mathématique aux structures algébriques.

Munis de ces nouveaux outils, nous traitons dans les Fiches 10 à 17 la géométrie vectorielle qui va nous permettre d'aborder le calcul algébrique. Nous explorons ensuite (fiches 18 à 30) une partie fondamentale qui est l'algèbre linéaire. S'ensuivent les transformations avec changements de bases, la diagonalisation des matrices et les méthodes de calcul qui nourrissent depuis le xx^e siècle la programmation des ordinateurs.

Pour clore cette partie, un focus présente une application de l'algèbre linéaire : la cryptographie.

Les bonus web sur dunod.com



Retrouvez les corrigés détaillés d'une sélection d'exercices sur le site dunod.com.

Logique

La logique mathématique permet l'étude des mathématiques en tant que langage.

Définition 1.1

Une **assertion** est un énoncé mathématique auquel nous pouvons attribuer la valeur de vérité vrai (V) ou faux (F) mais jamais les deux simultanément.

Exemples

1. L'assertion « $10 > 100$ » est fausse (F).
2. L'assertion « 12 est un multiple de 4 » est vraie (V).
3. L'énoncé « π vaut approximativement 3, 14 » n'est pas une assertion car il n'est pas assez précis pour déterminer s'il est vrai ou faux. En effet, il sera vrai si nous nous contentons d'une approximation de la valeur de π au centième près et faux sinon.

Définition 1.2

Un **prédicat** P est un énoncé mathématique contenant des lettres appelées variables tel que, quand nous remplaçons chacune de ces variables par un élément donné de cette variable nous obtenons une assertion.

Exemple

L'énoncé suivant « n est un multiple de 6 » est un prédicat car il devient une assertion lorsque nous donnons une valeur à n . En effet,

- « 10 est un multiple de 6 » est une assertion fausse (F).
- « 12 est un multiple de 6 » est une assertion vraie (V).



Les **connecteurs logiques** permettent de créer de nouveaux prédicats, dits **composés**, à partir de prédicats de référence.

Définition 1.3

Soit P un prédicat. La **négation** de P est le prédicat noté non (P) ou $\neg P$, qui est vrai lorsque P est faux et faux lorsque P est vrai. Nous résumons ceci dans la table de vérité suivante :

P	non (P)
V	F
F	V

Exemple

Soit P le prédicat « $x > 5$ ». Alors $\text{non}(P)$ est le prédicat « $x \leq 5$ ».

Remarque : en effet, le contraire de « supérieur à » est « inférieur ou égal à », et non simplement « inférieur à ». De même, le contraire de « pour tout x , P » n'est pas « quel que soit x , $\text{non}(P)$ » mais « il existe x pour lequel $\text{non}(P)$ ».

Définition 1.4

Soient P et Q deux prédicats.

- Le prédicat « $P \Rightarrow Q$ » appelé **implication** de P vers Q est un prédicat qui est faux lorsque P est vrai et Q est faux, et vrai dans tous les autres cas.
- Le prédicat « $P \Leftrightarrow Q$ » appelé **équivalence** de P et de Q est un prédicat qui est vrai lorsque P et Q sont simultanément vrais ou faux, et faux dans tous les autres cas.
- Le prédicat « $P \wedge Q$ » (P et Q) appelé **conjonction** de P et de Q est un prédicat qui est vrai lorsque P et Q sont simultanément vrais, et faux dans tous les autres cas.
- Le prédicat « $P \vee Q$ » (P ou Q) appelé **disjonction** de P et de Q est un prédicat qui est vrai lorsque au moins un des prédicats P et Q est vrai, et faux dans tous les autres cas.

Nous résumons ceci dans la table de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F



Le « ou » dans la définition de $P \vee Q$ a un sens inclusif, à ne pas confondre avec le « ou » exclusif de « fromage ou dessert ».

Théorème 1.1

- Soient P et Q deux prédicats. Nous avons les équivalences logiques (notées par $=$) suivantes :

$$\text{non}(P \text{ ou } Q) = (\text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q)),$$

$$\text{non}(P \text{ et } Q) = (\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q)).$$

Ce sont les **lois de Morgan** pour les prédicats.

- Soient P , Q et R trois prédicats. Nous avons les équivalences logiques suivantes :

$$(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)) = ((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)),$$

$$(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)) = ((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)).$$

Théorème 1.2

Soient P et Q deux prédicats. Nous avons les équivalences logiques suivantes :

- $\text{non}(\text{non}(P)) = P$,
- $[P \Rightarrow Q] = [\text{non}(P) \text{ ou } Q]$,

- $[\text{non } (P \Rightarrow Q)] = [P \text{ et non } (Q)],$
- $[P \Rightarrow Q] = [\text{non } (Q) \Rightarrow \text{non } (P)],$
- $[P \Leftrightarrow Q] = [(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)].$



$P \Rightarrow Q$ signifie que Q est une condition nécessaire pour P . L'implication $\text{non } (Q) \Rightarrow \text{non } (P)$ est la **contraposée** de $P \Rightarrow Q$. L'implication $Q \Rightarrow P$ est la **réciproque** de $P \Rightarrow Q$. Pour démontrer une équivalence, nous démontrons souvent une implication et sa réciproque.

Définition 1.5

Une **tautologie** est une formule propositionnelle qui prend la valeur « vrai » quelles que soient les valeurs données à ses arguments.

Exemples

Les formules suivantes sont des tautologies :

1. P ou $\text{non } (P)$, qui est le **principe du tiers exclu**,
2. $P \Rightarrow P$,
3. $(P \text{ et } Q) \Rightarrow P$,
4. $P \Rightarrow (P \text{ ou } Q)$.

Définition 1.6

Une **contradiction** est une formule qui prend la valeur « faux » quelles que soient les valeurs données à ses arguments.

Exemple

P et $\text{non } (P)$ est une contradiction, c'est le **principe de non-contradiction**. Sa négation, P est vraie ou $\text{non } P$ est vraie, est donc une tautologie.

Application

Nous suspectons trois élèves, Anita, Bernard et Christophe d'avoir dérobé du matériel dans un laboratoire de Physique. Nous possédons les informations suivantes à leur sujet :

- Si Christophe n'est pas coupable alors Bernard est coupable,
- Si Anita n'est pas coupable alors Christophe est coupable,
- Si Christophe est coupable alors Anita l'est aussi,
- Si Anita est coupable alors Bernard ne l'est pas.

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- C : « Christophe est coupable »,
- B : « Bernard est coupable »,
- A : « Anita est coupable »,
- D : « Anita ou Bernard est coupable ».



- La première information de l'énoncé se traduit par $\text{non}(C) \Rightarrow B$. Donc $\text{non}(B) \Rightarrow C$ par contraposée.
- La deuxième information se traduit par $\text{non}(A) \Rightarrow C$. Donc $\text{non}(C) \Rightarrow A$ par contraposée.
- La troisième information se traduit par $C \Rightarrow A$. Donc $\text{non}(A) \Rightarrow \text{non}(C)$ par contraposée.
- Enfin, la dernière information se traduit par $A \Rightarrow \text{non}(B)$. Donc $B \Rightarrow \text{non}(A)$ par contraposée.

Nous en déduisons que :

- L'assertion C : « Christophe est coupable » est vraie.
En effet, si nous supposons que $\text{non}(C)$ est vrai, $\text{non}(C) \Rightarrow B$, alors $B \Rightarrow \text{non}(A)$ et $\text{non}(A) \Rightarrow C$. Nous avons alors $\text{non}(C) \Rightarrow C$ ce qui est contradictoire.
- L'assertion B : « Bernard est coupable » est fausse.
En effet, si nous supposons que B est vrai, $B \Rightarrow \text{non}(A)$, alors $\text{non}(A) \Rightarrow \text{non}(B)$. Nous aurions alors $B \Rightarrow \text{non}(B)$ ce qui est contradictoire.
- L'assertion A : « Anita est coupable » est vraie.
En effet, si nous supposons que $\text{non}(A)$ est vrai, $\text{non}(A) \Rightarrow C$, alors $C \Rightarrow A$ et $\text{non}(A) \Rightarrow A$ ce qui est impossible.
- Enfin, comme Bernard n'est pas coupable, l'assertion D : « Anita ou Bernard est coupable » ne sera vraie que si Anita est coupable, ce qui est le cas puisque nous avons montré que l'assertion A est vraie dans l'item précédent. Donc l'assertion D est vraie.

Pour s'entraîner (solutions p. 505)

1.1 Soit l'assertion « $x = 2$ ». Donner la négation de cette assertion.

1.2 Écrire les contraposées des implications suivantes :

1. $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ et $y \neq 0$,
2. $[n \text{ premier}] \Rightarrow [n = 2 \text{ ou } n \text{ impair}]$.

1.3 Montrer que $[n \text{ pair}] \Leftrightarrow [n^2 \text{ pair}]$.

1.4 Nous considérons les assertions P et Q listées ci-dessous. Donner dans chaque cas la valeur de vérité pour $P \wedge Q$.

- P : « Paris est la capitale de l'Espagne »,
 Q : « $2 + 2 = 4$ »,
- P : « Un chat ronronne », Q : « Un carré a quatre cotés égaux »,

- P : « $4 \times 6 = 21$ », Q : « Venise se situe en Italie »,

- P : « Deux droites parallèles se coupent en un point », Q : « Paris est une ville de moins de dix mille habitants ».

1.5 Nous considérons les assertions P et Q listées ci-dessous. Donner dans chaque cas la valeur de vérité pour $P \vee Q$.

- P : « Un oiseau sait nager », Q : « Paris est la capitale de la France »,
- P : « Un chien a cinq pattes », Q : « Un triangle a trois côtés »,
- P : « $2 < 3$ », Q : « Madrid est la capitale de l'Espagne »,
- P : « Une voiture a deux roues », Q : « $1 + 2 = 4$ ».

Quantificateurs et raisonnements mathématiques

1. Quantificateurs

À partir d'un prédicat P , défini sur un ensemble E , nous pouvons construire de nouvelles assertions, dites quantifiées, en utilisant les **quantificateurs** « quel que soit » et « il existe ».

Définition 2.1

Le quantificateur universel « **quel que soit** » ou « **pour tout** », noté par $\forall$, permet de définir l'assertion quantifiée « $\forall x \in E, P(x)$ » qui est vraie si pour tous les éléments $x \in E$, l'assertion $P(x)$ est vraie.

Exemple

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'assertion $P : \langle n^2 > 0 \rangle$ est vraie.

Définition 2.2

Le quantificateur existentiel « **il existe** », noté par $\exists$, permet de définir l'assertion quantifiée « $\exists x \in E, P(x)$ » qui est vraie si nous pouvons trouver au moins un élément $x \in E$ tel que l'assertion $P(x)$ soit vraie. S'il en existe un et un seul nous pourrions écrire « $\exists! x \in E, P(x)$ » et nous dirions qu'il existe un unique élément x de E vérifiant $P(x)$.

Exemple

L'assertion quantifiée $P : \langle \exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 4 \rangle$ est vraie.



Si « $\forall x \in E, P(x)$ » est vraie alors « $\exists x \in E, P(x)$ » est vraie.

Définition 2.3

Soit $P(x)$ un prédicat sur un ensemble E . Alors,

$$[\text{non}(\forall x \in E, P(x))] = [\exists x \in E, \text{non}(P(x))],$$

$$[\text{non}(\exists x \in E, P(x))] = [\forall x \in E, \text{non}(P(x))].$$



Soient E et F deux ensembles. Soit $P(x, y)$ un prédicat à deux variables avec $x \in E$ et $y \in F$.

- L'assertion quantifiée « $\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y)$ » est vraie lorsque tous les éléments x de E et tous les éléments y de F vérifient $P(x, y)$.
- L'assertion quantifiée « $\exists x \in E, \exists y \in F, P(x, y)$ » est vraie lorsqu'il existe au moins un élément x appartenant à E et au moins un élément y appartenant à F vérifiant $P(x, y)$.



Si nous utilisons deux fois le même quantificateur, l'ordre n'a pas d'importance, nous pouvons alors les permuter. En revanche, si les quantificateurs sont différents, leur ordre est important.

2. Raisonnements mathématiques

Nous donnons dans ce paragraphe quelques méthodes de démonstrations basées sur des raisonnements mathématiques que nous serons amenés à utiliser dans les prochaines fiches de cet ouvrage.

2.1. Raisonnement par hypothèse auxiliaire ou déduction

Le but est de démontrer qu'un énoncé Q est vrai. Si l'énoncé P est vrai et si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie alors l'énoncé Q est nécessairement vrai.

2.2. Raisonnement par l'absurde

Le but est de démontrer qu'un énoncé P est vrai. Un raisonnement par l'absurde consiste à montrer que $\text{non}(P)$ entraîne à la fois un énoncé Q et son contraire $\text{non}(Q)$. Nous supposons l'énoncé $\text{non}(P)$ vrai et nous cherchons alors Q qui, sous cette hypothèse, serait à la fois vrai et faux. Nous disons que nous avons obtenu une contradiction ou que l'hypothèse $\text{non}(P)$ est contradictoire. Par conséquent $\text{non}(P)$ est fausse, donc P est vraie.

2.3. Raisonnement par contraposée

Le but est de démontrer des résultats en faisant apparaître une implication « $P \Rightarrow Q$ ». Le principe est qu'au lieu de montrer « $P \Rightarrow Q$ » nous montrons sa contraposée « $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$ ». Nous faisons l'hypothèse que $\text{non}(Q)$ est vraie et nous montrons que cela entraîne que $\text{non}(P)$ est vraie.

2.4. Raisonnement par contre-exemple

Le raisonnement par contre-exemple sert à montrer qu'un énoncé de la forme « $\forall x \in E, P(x)$ » est un énoncé faux. Nous cherchons alors à trouver un élément x de E qui ne vérifie pas $P(x)$.

2.5. Raisonnement par récurrence simple

Le raisonnement par récurrence simple sert à montrer qu'un énoncé de la forme « $\forall n \geq n_0, P(n)$ » est vrai. Si la propriété $P(n_0)$ est vraie et si l'implication « $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ » est vraie pour tout $n \geq n_0$, alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. Il s'effectue en trois étapes :

- **Étape d'initialisation.** Nous vérifions que $P(n_0)$ est vraie.
- **Étape d'hérédité.** Fixons un entier naturel $n \geq n_0$, puis montrons que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.
- **Étape de conclusion.** Nous concluons que l'assertion $P(n)$ est vraie $\forall n \geq n_0$.

Il existe également le raisonnement par récurrence à deux pas et le raisonnement par récurrence forte. Pour le premier, nous supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies et nous montrons que $P(n+2)$ est vraie. Pour le second, nous supposons que pour tout $k \leq n$, $P(k)$ est vraie et nous montrons que $P(n+1)$ est vraie.



Application

1. Démontrer par l'absurde l'énoncé suivant : $\sqrt{2}$ est irrationnel.
2. Soient x et y deux réels. Montrer que :

$$xy \neq 0 \implies x \neq 0 \text{ et } y \neq 0.$$

3. Montrer que :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1+na.$$

1. Si $\sqrt{2}$ est rationnel, nous pouvons écrire $\sqrt{2}$ sous la forme p/q , avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et p et q premiers entre eux. Nous avons alors $p^2 = 2q^2$. Donc p^2 est pair ce qui implique que p l'est également. Donc si p est pair, alors p peut s'écrire sous la forme $2n$. Donc $q^2 = 2n^2$ et par conséquent q est aussi pair. Mais alors, p et q ne peuvent pas être premiers entre eux, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, nous ne pouvons pas écrire $\sqrt{2}$ sous la forme p/q et donc $\sqrt{2}$ est bien irrationnel.

2.

Nous montrons ce résultat en utilisant un raisonnement par contraposée.

La contraposée de $(xy \neq 0 \implies x \neq 0 \text{ et } y \neq 0)$ est :

$$x = 0 \text{ ou } y = 0 \implies xy = 0.$$

Montrons donc cette assertion. Si nous choisissons $x = 0$ ou $y = 0$, alors le produit xy est nécessairement nul. Nous en déduisons donc le résultat cherché.

3. Pour montrer ce résultat nous allons utiliser le raisonnement par récurrence. Nous allons procéder en trois étapes.

- **Étape d'initialisation**

Pour $n = 0$, nous avons $(1+a)^0 = 1$ qui est bien supérieur ou égal à $1+na = 1+0 \times a$.

- **Étape d'hérédité**

Nous supposons que la propriété est vraie à un ordre $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $(1+a)^n \geq 1+na$. Nous voulons montrer que $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$. Nous avons, grâce à l'hypothèse d'hérédité,

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} &= (1+a)(1+a)^n, \\ &\geq (1+a)(1+na), \\ &= 1+(n+1)a+na^2, \\ &\geq 1+(n+1)a,\end{aligned}$$

car $1+a > 0$ et $na^2 \geq 0$. Donc l'assertion est vraie à l'ordre $n+1$.

- **Étape de conclusion**

Nous en déduisons que l'assertion est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.



Pour s'entraîner (solutions p. 505)

2.1 Montrer en utilisant un raisonnement par contraposée que pour n entier, si n^2 est impair alors n est impair.

2.2 Montrer en utilisant un raisonnement par contraposée que pour x et y réels différents de 1, si $x \neq y$ alors $\frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1}$.

2.3 Montrer, en donnant un contre-exemple, que $2^{2^n} + 1$ n'est pas un nombre premier pour toute valeur de $n \in \mathbb{N}$.

2.4 Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est irrationnelle.

2.5 Montrer par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ que :

$$2^n \geq n + 1.$$

2.6 Montrer par récurrence, pour tout $n \geq 4$ que :

$$2^n \leq n!.$$

2.7 Montrer par récurrence, pour tout $n \geq 0$ que :

$$3^{2n+2} - 2^{n+1} \text{ est divisible par } 7.$$

2.8 Montrer par récurrence, pour tout $n \geq 1$ que :

$$n(2n+1)(7n+1) \text{ est divisible par } 6.$$

2.9 Montrer par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2.10 Montrer par récurrence, pour tout $n \geq 1$ que :

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

2.11 Soient $a, b \geq 0$. Montrer que :

$$\text{si } \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \text{ alors } a = b,$$

2.12 Montrer que l'assertion suivante est fausse : « Tout entier positif est somme de trois carrés. » (Les carrés sont les $0^2; 1^2; 2^2; \dots$. Par exemple $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$.)

2.13 Combien y a-t-il de nombres à quatre chiffres, lorsqu'ils sont écrits en base 10, où 0 ne figure qu'une seule fois ?

2.14 Montrer par récurrence, pour tout $n \geq 1$ que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

2.15 Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

2.16 Montrer que pour $n \geq 2$, n personnes s'échangent sans répétition $\frac{n(n+1)}{2}$ poignées de main.

2.17 Combien y a-t-il de diagonales dans un polygone convexe formé de n côtés (avec $n \geq 3$) ?

2.18 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Écrire à l'aide de quantificateurs la propriété « f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ».
2. Écrire à l'aide de quantificateurs la propriété « f n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ».

www

www

www

www

www

www

www

www

Ensembles

1. Définitions

Définition 3.1

Un **ensemble** E est une collection d'objets distincts. Ces objets s'appellent les **éléments** de cet ensemble.



Pour tout élément x , nous pouvons dire si l'assertion x appartient à E ($x \in E$) est vraie ou fausse.

Exemples

1. L'**ensemble vide**, c'est-à-dire l'ensemble qui ne contient aucun élément, est noté $\emptyset$.
2. L'ensemble ne contenant qu'un seul élément x est un **singleton**, noté $\{x\}$.
3. $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.
4. $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels.
5. $\{1; 2; 3; 4\}$ est l'ensemble contenant les entiers 1, 2, 3 et 4.



Il est possible de définir un ensemble de deux manières :

- **paramétrique**, comme par exemple $\{n^2, n \in \mathbb{N}\}$;
- **implicite**, comme par exemple $\{x \in \mathbb{R}, x^3 - 2x + 1 = 0\}$.

Définition 3.2

Soient E et F deux ensembles. Nous disons que E est **inclus** dans F et nous notons $E \subset F$, si et seulement si tous les éléments de E appartiennent aussi à F . Nous disons aussi que E est une partie de F ou que F contient E . L'ensemble des parties de F se note $\mathcal{P}(F)$.

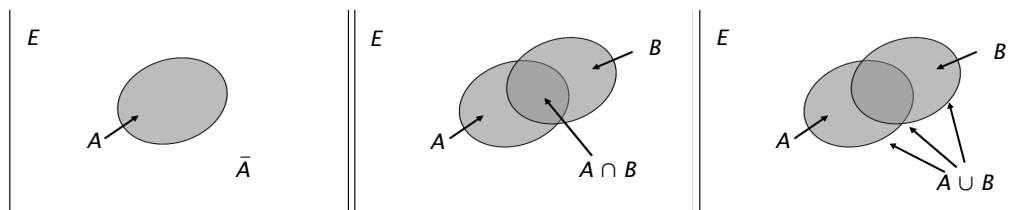
Exemples

1. L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est contenu dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.
2. $\{1\}$ est contenu dans $\{1; 2; 3; 4\}$.

Définition 3.3

Soient E un ensemble, A et B des parties de E .

- Nous définissons le **complémentaire** de A dans E par $\bar{A} = \{x \in E; x \notin A\}$.
- Nous définissons l'**intersection** de A et B par $A \cap B = \{x \in E; x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- Nous définissons l'**union** de A et B par $A \cup B = \{x \in E; x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- Deux ensembles A et B sont **disjoints** s'il n'existe aucun élément commun à A et à B , c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$.

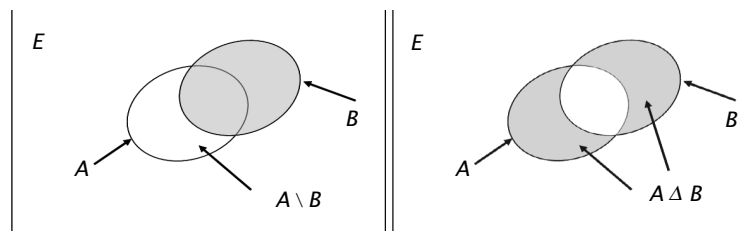


Le « ou » dans la définition de l'union a un sens inclusif, c'est-à-dire que $A \cup B$ est l'ensemble des éléments x de E qui appartiennent à l'une au moins des parties A et B . Attention dans la vie courante, le « ou » a un sens exclusif. Par exemple, au restaurant le menu du jour vous propose fromage ou dessert, l'un ou l'autre mais pas les deux !

Définition 3.4

Soient E un ensemble, A et B des parties de E . Nous définissons

- la **différence** par $A \setminus B = \{x \in E; x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \bar{B}$.
- la **différence symétrique** par $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$.



- $A \Delta B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à une et une seule des parties A et B .
- $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- La différence symétrique de deux parties A et B est commutative : $A \Delta B = B \Delta A$.

Définition 3.5

- Un **recouvrement** d'une partie A de E est une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties telles que $A_i \subset E$ et $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.
- Une **partition** P d'un ensemble E est une famille de parties non vides de E $(A_i)_{i \in I}$ telles que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $\bigcup_{i \in I} A_i = E$.

Définition 3.6

Soient A et B deux ensembles. Alors le **produit cartésien** de ces deux ensembles, noté $A \times B$, est l'ensemble des couples $(a; b)$ tels que $a \in A$ et $b \in B$.

$$A \times B = \{(a; b) ; a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Exemple

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x; y); x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}.$$



Plus généralement, le produit cartésien de n ensembles E_i est :

$$E_1 \times \dots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n) ; x_1 \in E_1 ; \dots ; x_n \in E_n\}.$$

Si $E_1 = E_2 = \dots = E_n = E$, alors nous notons E^n .

2. Propriétés

Théorème 3.1

Soient A, B et C des parties d'un ensemble E . Alors, nous avons les propriétés suivantes sur le complémentaire, la réunion et l'intersection :

- $\overline{\overline{E}} = E$ et $\overline{\emptyset} = E$,
- $\overline{\overline{A}} = A$,
- si $A \subset B$, alors $\overline{B} \subset \overline{A}$,
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (lois de Morgan),
- $A \cup B = B \cup A$: commutativité de l'union,
- $A \cap B = B \cap A$: commutativité de l'intersection,
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$: associativité de l'union,
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$: associativité de l'intersection,
- $A \cup A = A$; $A \cup \emptyset = A$ et $A \cup E = E$,
- $A \cap A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cap E = A$,
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$: distributivité de l'intersection par rapport à l'union,
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$: distributivité de l'union par rapport à l'intersection.

Application

Nous allons montrer trois des propriétés précédemment énoncées ci-dessus. Cela va nous permettre d'utiliser le **raisonnement par double inclusion**, très utile pour effectuer des démonstrations.

1. Montrer que $\overline{\overline{A}} = A$.
2. Montrer que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.



1.

Pour cela, nous devons montrer la double inclusion $\overline{\overline{A}} \subset A$ et $A \subset \overline{\overline{A}}$.

Soit $x \in \overline{\overline{A}}$, alors $x \notin \overline{A}$ et donc $x \in A$. Nous avons bien $\overline{\overline{A}} \subset A$.

Réciproquement : soit $x \in A$, alors $x \notin \overline{A}$ et donc $x \in \overline{\overline{A}}$. Nous avons bien $A \subset \overline{\overline{A}}$.

La double inclusion permet donc de conclure que $\overline{\overline{A}} = A$.

2.

Nous devons montrer la double inclusion $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.



Soit $x \in \overline{A \cap B}$, alors $x \notin A \cap B$. Nous avons donc en particulier $x \notin A$ ou $x \notin B$ c'est-à-dire $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$. Donc $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

Réciproquement : soit $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, alors, $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$ c'est-à-dire que $x \notin A$ ou $x \notin B$. En particulier, $x \notin A \cap B$ donc $x \in \overline{A \cap B}$. Nous avons donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

La double inclusion permet de conclure que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

3.

Nous devons pour cela montrer la double inclusion $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Soit $x \in \overline{A \cup B}$, alors $x \notin A \cup B$. Nous avons donc en particulier $x \notin A$ et $x \notin B$ c'est-à-dire $x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B}$. Donc $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ et ainsi nous avons montré que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Réciproquement : soit $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, alors $x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B}$ c'est-à-dire que $x \notin A$ et $x \notin B$. Donc $x \notin A \cup B$ et $x \in \overline{A \cup B}$. Nous avons montré $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Cela nous permet de conclure que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Nous aurions également pu raisonner par équivalence pour réaliser ces démonstrations mais lorsque les preuves à effectuer sont plus complexes, cela est souvent source d'erreurs et il vaut mieux privilégier le raisonnement par double inclusion.

Pour s'entraîner (solutions p. 506)

3.1 Soient $A = \{1; 2; 3\}$ et $B = \{2; 3; 4\}$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.

3.2 Soit $A = \{x \in \mathbb{R}; x > 9\}$. Déterminer le complémentaire $\overline{A}$ de A .

3.3 Trouver un exemple d'ensembles A , B et C tels que $A \cup B = A \cup C$ et $B \neq C$.

3.4 Démontrer que si $A \cup B = A \cap B$ alors $A = B$.

3.5 Démontrer que si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$ alors $B = C$. Que dire de la réciproque ?

3.6 Simplifier les quatre expressions suivantes :

1. $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$,
2. $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$,
3. $\overline{A} \cup (A \cap B)$,
4. $\overline{A} \cap (A \cup \overline{B})$.

3.7 Prouver que la différence symétrique est commutative.

3.8 Donner deux exemples pour lesquels $A \times B = B \times A$, puis deux autres pour lesquels $A \times B \neq B \times A$.

3.9 Montrer que si $A \subset B$, alors, pour tout C , nous avons : $A \times C \subset B \times C$.

3.10 Si A, B, C et D sont des parties d'un ensemble E , montrer que :

$$\begin{cases} B \setminus C \subset A \\ C \setminus D \subset A \end{cases} \Rightarrow B \setminus D \subset A.$$

3.11 Si A, B et C sont des parties d'un ensemble E , montrer que : $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.

3.12 Si A, B et C sont des parties d'un ensemble E , montrer que : $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$.

Relations binaires

Définition 4.1

Soient E et F deux ensembles.

- Une **relation binaire**, ou correspondance, de E vers F est la donnée du triplet (E, Γ, F) où Γ est une partie de $E \times F$. Pour $x \in E$ et $y \in F$, lorsque $(x, y) \in \Gamma$, nous notons cette relation par $x \mathcal{R} y$.

E est l'**ensemble de départ** de $\mathcal{R}$, F est l'**ensemble d'arrivée** de $\mathcal{R}$ et Γ est le **graphe** de la relation $\mathcal{R}$.

- Une **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur E est définie par le choix d'une partie Γ de $E \times E$.



Fiche 9

Exemples

1. La divisibilité sur $\mathbb{N}$, définie en 9.1, est une relation binaire.
2. L'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$, entre les parties de l'ensemble E , est une relation binaire.
3. Les relations de congruence sur $\mathbb{Z}$, définies en 9.6, sont également des relations binaires.

Définition 4.2

Si F est une partie de E , la **relation induite** par $\mathcal{R}$ sur F est simplement la relation $x \mathcal{R} y$ entre éléments de F .

Définition 4.3

Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E est :

- **réflexive** si elle vérifie $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$,
- **symétrique** si $\forall x \in E, \forall y \in E, x \mathcal{R} y \implies y \mathcal{R} x$,
- **antisymétrique** si elle vérifie $\forall x \in E, \forall y \in E, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x) \implies x = y$,
- **transitive** si elle vérifie $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \implies x \mathcal{R} z$.

Exemples

Dans $\mathbb{N}$, la relation $\leq$ est réflexive, antisymétrique et transitive. Elle vérifie en effet,

- $\forall x \in \mathbb{N}, x \leq x$ donc elle est réflexive.
- $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, x \leq y \text{ et } y \leq x \iff x = y$, donc elle est antisymétrique.
- $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{N}, x \leq y, y \leq z \iff x \leq z$, donc elle est transitive.

Définition 4.4

- Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E est une **relation d'équivalence** si elle est à la fois réflexive, symétrique et transitive.
- Si $x \in E$, nous appelons **classe d'équivalence** de x modulo $\mathcal{R}$ l'ensemble des y de E tels que $x \mathcal{R} y$.

Exemples

1. La relation d'égalité sur n'importe quel ensemble E est une relation d'équivalence et c'est la plus forte (elle est contenue dans toutes les autres.)
2. La relation d'équivalence la plus faible est celle dont le graphe est $E \times E$, c'est-à-dire celle qui est satisfaite par tous les couples $(x; y) \in E \times E$.

Définition 4.5

Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie dans un ensemble E est une **relation d'ordre** si elle est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive. Nous la notons souvent $<$.

Exemples

1. La relation $\leq$ est une relation d'ordre.
2. La divisibilité sur $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre.



La seule relation à la fois d'ordre et d'équivalence est l'égalité.

Définition 4.6

- Deux éléments x et y d'un ensemble E sont dits **comparables** pour $<$ si et seulement si $x < y$ ou $y < x$,
- Une relation d'ordre $<$ dans E est dite d'**ordre total** si deux éléments quelconques x et y de E sont toujours comparables, c'est-à-dire si quels que soient x et $y \in E$, nous avons $x < y$ ou $y < x$. Dans le cas contraire l'ordre est **partiel**.

Exemple

Dans $\mathbb{R}$, la relation $\leq$ est une relation d'ordre total.

Définition 4.7

Soit A une partie d'un ensemble E .

- S'il existe un élément a de E tel que, pour tout $x \in A$ nous ayons $x < a$, nous disons que a est un **majorant** de A et que A est une partie majorée de E .
- S'il existe un élément b de E tel que, pour tout $x \in A$ nous ayons $x > b$, nous disons que b est un **minorant** de A et que A est une partie minorée de E .
- Une partie **bornée** de E est une partie qui est à la fois majorée et minorée.

Définition 4.8

Soit A une partie d'un ensemble E .

- Un élément a de E est appelé **plus grand élément** de A si $a \in A$ et si a est un majorant de A . Si un tel élément existe il est unique.
- Un élément b de E est appelé **plus petit élément** de A si $b \in A$ et si b est un minorant de A . Si un tel élément existe il est unique.



Il est important de bien faire la distinction entre majorant et plus grand élément d'une partie A d'un ensemble E . Contrairement au majorant de A qui n'appartient pas nécessairement à A , le plus grand élément de A est un élément appartenant à A . Cette remarque s'applique également pour distinguer minorant et plus petit élément d'une partie A d'un ensemble E .

Définition 4.9

Soit A une partie d'un ensemble E .

- Nous appelons **borne supérieure** d'une partie majorée A , le plus petit des majorants de A . Si cette borne existe elle est unique. Elle est notée $\sup_E(A)$.
- Nous appelons **borne inférieure** d'une partie minorée A , le plus grand des minorants de A . Si cette borne existe elle est unique. Elle est notée $\inf_E(A)$.

Application

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \iff x^3 - y^3 = 3(x - y).$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence et déterminer les classes d'équivalence de cette relation.



Montrons d'abord qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

- Tout d'abord la relation est réflexive. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$x^3 - x^3 = 3(x - x) = 0.$$

Donc $x\mathcal{R}x$.

- Elle est également symétrique. En effet, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 = 3(x - y) &\implies -(x^3 - y^3) = -3(x - y), \\ &\implies y^3 - x^3 = 3(y - x). \end{aligned}$$

Donc $x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$.

- Enfin, elle est transitive. En effet, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) &\implies x^3 - z^3 = x^3 - y^3 + y^3 - z^3 \\ &= 3(x - y) + 3(y - z) = 3(x - z). \end{aligned}$$

Donc $x\mathcal{R}z$.

Nous en déduisons donc que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.



Cherchons à présent les classes d'équivalence pour cette relation, c'est-à-dire l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x\mathcal{R}y$. Pour cela, résolvons l'équation $x^3 - y^3 = 3(x - y)$.

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= 3(x - y) \\ \Rightarrow x^3 - y^3 - 3(x - y) &= 0 \\ \Rightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) - 3(x - y) &= 0 \\ \Rightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3) &= 0. \end{aligned}$$

Les solutions sont telles que $x - y = 0$ ou $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$.

Les classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$ sont donc les y réels tels que $x = y$ ou $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$.

Pour s'entraîner (solutions p. 506)

4.1 Nous définissons la relation $<$ par $x < y$ si et seulement si $x \leq y$ et $x \neq y$.

Montrer que ce n'est pas une relation d'ordre.

4.2 Nous considérons les relations suivantes :

1. $E = \mathbb{N}, x\mathcal{R}y \iff x = -y,$

2. $E = \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1,$

3. $E = \mathbb{N}, x\mathcal{R}y \iff \exists p, q \geq 1, y = px^q$ avec p et q entiers.

Ces relations sont-elles réflexives, symétriques, transitives ? Sont-elles des relations d'ordre, d'équivalence ?

4.3 Nous considérons la relation suivante : $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x^2 - y^2 = x - y$. Montrer que c'est une relation d'équivalence. Déterminer la classe d'équivalence d'un élément $x \in \mathbb{R}$. Combien y-a-t-il d'éléments dans cette classe ?

4.4 Soient a et b deux réels strictement positifs. Les parties suivantes sont-elles majorées, minorées ? Si oui, donner les bornes supérieures et/ou inférieures.

1. $\{a + bn; n \in \mathbb{N}\},$

2. $\left\{a + \frac{b}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\},$

3. $\{a + (-1)^n b; n \in \mathbb{N}\}.$

4.5 Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ avec $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$.

Montrer que A est majorée, B est minorée et que $\sup(A) \leq \inf(B)$.

4.6 Soient (a, b) appartenant à $\mathbb{N}^2$ et une relation binaire $\mathcal{R}$ telle que :

$$a\mathcal{R}b \text{ ssi } a \text{ divise } b.$$

$\mathcal{R}$ est-elle une relation d'équivalence ? d'ordre ? totale ?

4.7 Considérons un ensemble E et une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E . Supposons que $\mathcal{R}$ est symétrique et transitive. Dire, en justifiant votre réponse, si le raisonnement suivant est correct.

« Soit $x \in E$. Nous avons $x\mathcal{R}y$ donc, comme $\mathcal{R}$ est symétrique, nous avons $y\mathcal{R}x$. Comme $\mathcal{R}$ est transitive et que nous avons $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, nous en déduisons que $x\mathcal{R}x$. Par conséquent, $\mathcal{R}$ est réflexive. »

Applications

Définition 5.1

Une **fonction** f de l'ensemble de départ E dans l'ensemble d'arrivée F est définie par une correspondance qui permet d'associer à tout $x \in E$ **au plus un élément** $y \in F$. Nous appelons **ensemble de définition** de f l'ensemble des éléments x de E tels que $\exists y \in F$ tel que $y = f(x)$. Pour tout $x \in E$, l'élément $y \in F$ tel que $y = f(x)$, s'il existe, est appelé l'**image** de x par f . Pour tout élément $y \in F$, tout élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$ est un **antécédent** de y par f . Les fonctions de E dans F forment un ensemble noté $\mathcal{F}(E, F)$.



Un élément x a au plus une image. En revanche, un élément y peut avoir un nombre quelconque d'antécédents. Par exemple, soit la fonction $x \mapsto \cos x$; 1 a une infinité d'antécédents et 2 n'en a aucun.

Définition 5.2

Une application f de l'ensemble de départ E dans l'ensemble d'arrivée F est définie par une correspondance qui permet d'associer à tout $x \in E$ **un unique élément** $y \in F$ que nous notons $f(x)$. Pour tout $x \in E$, l'élément $y \in F$ tel que $y = f(x)$ est appelé l'**image** de x par f . Pour tout élément $y \in F$, tout élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$ est un **antécédent** de y par f . Les applications de E dans F forment un ensemble noté $\mathcal{F}(E, F)$.



Ainsi, une application fournit une image à tout élément de E , quand une fonction ne le fait qu'au sein de son domaine de définition.

Exemples

1. L'application de E dans E qui à x associe x est l'application identité. Nous la notons Id_E .
2. L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\sqrt{x}$ est une fonction dont le domaine de définition est $\mathbb{R}_+$.

Définition 5.3

Soient E, F et G des ensembles. Soit f une application de E dans G et g une application de F dans G . Si $E \subset F$ et si, pour tout $x \in E$, nous avons $f(x) = g(x)$, nous disons que f est une **restriction** de g ou que g est un **prolongement** de f .

Définition 5.4

Soient E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G . La **composée** de f par g est l'application de E dans G notée par $g \circ f$ et définie par :

$$x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$