

Humberto Guerrero Salas

Programación Lineal aplicada

ECOE
EDICIONES



Humberto Guerrero Salas

Programación Lineal aplicada

```
private $username;  
private $password;  
private $database;  
private $charset;  
  
private $link = null;  
  
public function connect()  
{  
    if (!$link = mysql_connect($self::$host  
        $self::$username, $self::$password,  
        $self::$charset))  
        throw new MySQLException("Cannot connect  
        to MySQL database: " . mysql_error());  
}
```



Guerrero Salas, Humberto

Programación lineal / Humberto Guerrero Salas. -- Bogotá :
Ecoe Ediciones, 2009.

280 p. ; 24 cm.

Incluye bibliografía.

ISBN 978-958-648-617-0

1. Programación lineal 2. Modelos matemáticos 3. CPM (Análisis de redes) 4. PERT (Análisis de redes) 5. Programación lineal - Problemas, ejercicios, etc. I. Tit.

519.72 cd 21 ed.

A1226199

CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

Colección: Ingeniería y salud en el trabajo
Área: Informática

Primera edición: Bogotá, agosto de 2009

Reimpresión: Bogotá, abril de 2014

ISBN: 978-958-648-617-0

© Humberto Guerrero Salas

© Del complemento virtual en el SIL (Sistema de Información en Línea)
www.ecoediciones.com - Humberto Guerrero Salas

© Ecoe Ediciones
E-mail: info@ecoediciones.com
www.ecoediciones.com
Carrera 19 No. 63C-32, Pbx. 2481449

Coordinación editorial: Andre del Pilar Sierra

Autoedición: Cristina Castañeda Pedraza

Carátula: Wilson marulanda

Impresión: Gráficas de la Sabana
Cra 69 H 77 - 36, Tel. 6300255

Impreso y hecho en Colombia

DEDICATORIA

A Dios,
a mi madre Laura María Salas Reyes (Q. E. P. D.)
a mi padre Saul Guerrero Martín (Q. E. P. D.)

A mi esposa Edilma Bautista Pulido
y a mis hijas Mónica Natalia y Angélica Rocío
A mis hermanos y especialmente a María Helena Guerrero Salas.

AGRADECIMIENTOS

Al terminar esta obra, me gustaría nombrar a muchas personas; lamentablemente no lo puedo hacer. Me perdonan a quienes omito.

Agradecimientos muy especiales:

Al Ing. *ORLANDO DE ANTONIO*, un gran amigo sin su apoyo y opiniones hubiera sido difícil llegar al final.

Al Ing. *JAIRO HUMBERTO TORRES ACOSTA*, mi maestro, colega y amigo, quien me inició en el tema de la investigación de operaciones.

Al doctor *JAIRO CORREA RODRIGUEZ* (Q.E.P.D), sus ideas fueron fundamentales en el inicio de este texto.

Al Ing. *WILSON HERNANDO SOTO URREA*, sus sugerencias y recomendaciones fueron valiosas.

A todo el equipo de trabajo de Ecoe Ediciones; ellos han hecho posible esta publicación.

Al personal de "SOFTWARE shop" quienes autorizaron el uso del paquete WIN-QSB para la solución de ejercicios de este texto. Esta empresa, distribuidor de software científico líder en Latinoamérica se puede contactar en www.SOFTWARE-shop.com

A todos mis estudiantes, durante los últimos 20 años.

Contenido general

Prólogo	XI
Introducción	XIII
Capítulo 1. Introducción a la programación lineal.	1
1.1. Generalidades.	3
1.2. Ejemplo prototipo.	3
1.3. Modelo general de programación lineal.	5
1.3.1. Forma estándar del modelo de programación lineal.	5
1.3.2. Forma matricial del modelo de programación lineal.	6
1.3.3. Forma sumatorial.	8
1.3.4. Forma canónica del modelo de programación lineal.	8
1.4. Otras formas del modelo.	8
1.5. Procedimiento para la construcción de modelos.	8
1.6. Reglas de equivalencia.	10
1.7. Suposiciones de la programación lineal.	13
Capítulo 2. Planteamiento de modelos de programación lineal.	15
2.1. Aplicaciones en producción.	17
2.2. Aplicaciones en dietas.	25
2.3. Aplicaciones de mezcla.	27
2.4. Aplicaciones en distribución.	33
2.5. Aplicaciones en asignación.	39
2.6. Aplicaciones en comercialización.	44
2.7. Aplicaciones en publicidad.	46
2.8. Aplicaciones en el medio ambiente.	48
2.9. Aplicaciones agrícolas.	49
2.10. Aplicaciones financieras.	51
Problemas propuestos.	56
Capítulo 3. Programación lineal método gráfico.	73
3.1. Problemas de maximización.	75
3.1.1. Solución única.	75
3.1.2. Solución óptima múltiple.	81
3.1.3. Solución no acotada.	85
3.1.4. Problema sin solución.	87
3.2. Problemas de minimización.	89
3.2.1. Solución única.	89
3.2.2. Solución óptima múltiple.	93
3.2.3. Solución no acotada.	94
3.2.4. Problema sin solución.	99
3.2.5. Solución degenerada.	100
3.2.6. Restricciones de igualdad.	103
Problemas propuestos.	107
Capítulo 4. Programación lineal: método simplex.	123
4.1. Problemas de maximización.	124
4.1.1. Solución única.	124
4.1.2. Solución óptima múltiple.	128

4.1.3. Solución no acotada.	132
4.1.4. Problema sin solución.	134
4.2. Problemas de minimización.	136
4.2.1. Solución única.	136
4.2.2. Solución óptima múltiple.	138
4.2.3. Solución no acotada.	142
4.2.4. Problema sin solución.	143
4.2.5. Solución degenerada.	146
4.2.6. Restricciones de igualdad.	147
Problemas propuestos.	151
Capítulo 5. Programación lineal: métodos especiales.	165
5.1. Método de doble fase.	167
5.2. Método dual simplex.	177
Problemas propuestos.	184
Capítulo 6. Programación lineal: Dualidad.	201
6.1. Problemas de maximización.	203
6.1.1. Solución única.	203
6.1.2. Solución óptima múltiple.	207
6.1.3. Solución no acotada.	210
6.1.4. Problema sin solución.	212
6.2. Problemas de minimización.	214
6.2.1. Solución única.	214
6.2.2. Solución óptima múltiple.	219
6.2.3. Solución no acotada.	221
6.2.4. Problema sin solución.	223
6.2.5. Solución degenerada.	226
6.2.6. Restricciones de igualdad.	229
6.3. Interpretación económica de la dualidad.	232
Problemas propuestos.	235
Capítulo 7. Programación lineal: análisis de sensibilidad.	249
7.1. Cambio en la disponibilidad de recursos.	254
7.2. Cambio en precios o costos unitarios.	257
7.3. Cambio en la asignación unitaria de recursos.	260
7.4. Nuevas restricciones.	262
7.5. Nuevos productos.	266
Problemas propuestos.	271
Capítulo 8. Transporte, transbordo y asignación.	273
8.1. El modelo del transporte.	275
8.1.1. Estructura general.	275
8.1.2. Primera solución básica factible.	276
8.1.2.1. Método de la esquina noroeste.	277
8.1.2.2. Método de aproximación de Vogel.	277
8.1.3. Solución óptima.	289
8.2. El modelo del transbordo.	295
8.3. El modelo de asignación.	302
Problemas propuestos.	308
Capítulo 9. Apéndice de problemas a problemas propuestos.	313
Bibliografía	329

PRÓLOGO

Al recibir del Ing. Humberto Guerrero Salas, la invitación para revisar el texto que en este momento tiene el lector en sus manos, mi primera impresión, fue que se trataba de un libro más de los muchos que actualmente se encuentran en el mercado.

Sin embargo, al adentrarme en una lectura rigurosa del mismo me causó gran curiosidad como el Ing. Guerrero, abordó los temas de una manera realmente extraordinaria, ya que el rigor pedagógico y didáctico con el que esta construido da un nuevo enfoque de la verdadera utilización de la investigación de operaciones, en especial de la programación, lineal, hoy en día. Empezando, por la descripción y formulación detallada en los primeros capítulos, sobre cómo realizar un óptimo planteamiento de un problema ingenieril, lo cual brinda al estudiante una motivación y herramientas sin precedentes para la utilización eficaz de las matemáticas como un instrumento práctico de la Ingeniería, que no poseen en otros textos avanzados de programación lineal.

Al continuar en los capítulos posteriores, el estudiante ya consolidado en el planteamiento de problemas, se encontrará con una metodología eficaz e innovadora en la resolución de los problemas e interpretación adecuada de las soluciones, producto de la experiencia y las investigaciones que el Ing. Guerrero ha realizado en su trayectoria profesional; siendo así, un texto ágil e innovador en el desarrollo de soluciones óptimas a partir del análisis de sensibilidad, permitiendo que el estudiante al reemplazar algunos de los parámetros mas significativos puede replantear un problema, sin tener que remitirse necesariamente al principio.

Por último, sólo espero que el presente texto sea aprovechado al máximo, por el futuro profesional, como un texto dinamizador e integrador de los procesos de optimización, un texto que de seguro se convertirá en el ámbito ingenieril de necesaria consulta.

Ing. Magíster. Doctorando Wilson Hernando Soto Urrea.

Introducción

En los ochenta cuando inicié mis estudios de ingeniería, siempre tuve una pasión por la ciencias exactas en especial las matemáticas, pero a medida que avanzaba mis estudios universitarios descubrí ciertas falencias en el aprendizaje de las matemáticas aplicadas; de ahí que mi propósito desde hace años, como docente de ingeniería en varias universidades del país, ha sido el elaborar un libro con una didáctica y una pedagogía innovadora, —que nace de mi larga experiencia como docente de *Investigación de Operaciones*—, que le permita al estudiante pasar los obstáculos que se presentan en su aprendizaje matemático con mayor facilidad y además con aplicaciones prácticas y del diario vivir en la ingeniería.

La investigación de operaciones, inicia con la argumentación de la programación lineal. Consulté, leí y estudié un sin

número de textos (todos muy buenos) referentes al tema; pero nunca quedé satisfecho por la forma en que se abordaban los temas y especialmente las explicaciones, además quedaban muchas dudas sin resolver, que no me permitían profundizar como yo quería en el tema. Este hecho generó en mí, la inquietud de querer escribir un texto que hiciera claridad en las explicaciones y procesos, con el fin de obtener un resultado óptimo, que se ajuste a las verdaderas necesidades de la ingeniería en la sociedad de hoy. Resultado que necesariamente debe ser interpretado a la luz de las aplicaciones; y no en términos de variables. Es posible, que este último acontecimiento sea lo más motivante en la realización del presente texto; ya que primordialmente se hace énfasis en la generación o construcción de un mo-

delo matemático a partir de una formulación y no lo que generalmente se hace; que es dar una función objetivo con unas restricciones para aplicar un algoritmo de solución. Es por esto que a través de todo el texto se tiene en cuenta la formulación del problema, construcción del modelo matemático, obtención de una solución óptima aplicando un procedimiento establecido dentro del texto, para finalmente realizar una interpretación práctica de la solución óptima.

El texto se divide en 8 capítulos, los cuales llevan una secuencia lógica en el desarrollo y avance en la adquisición de los conocimientos. Estos capítulos se resumen de la siguiente manera:

- Capítulo 1. Hace referencia a todas las generalidades de la programación lineal entre las cuales se mencionan los pasos para construir un modelo matemático, reglas de equivalencia, estructura general del modelo y usos de la programación lineal.
- Capítulo 2. Se avanza hacia el tema de la construcción de modelos a partir de una formulación teniendo en cuenta diferentes aplicaciones en producción, mezclas y distribución entre otros.
- Capítulo 3. Se trata paso a paso el método de solución gráfica de problemas de programación lineal, con su correspondiente formulación de las aplicaciones e interpretación de las respuestas.
- Capítulo 4. Se da un paso adelante a la aplicación del método simplex, nuevamente teniendo en cuenta la formulación e interpretación. Dentro de estas interpretaciones se realizan aplicaciones en cuanto a las diferentes respuestas que se pueden presentar tal como: solución única, solución múltiple, solución no acotada, no solución y solución degenerada.
- Capítulo 5. En este capítulo se presentan dos métodos alternativos de solución: método de doble fase y método dual simplex; con su correspondiente procedimiento e interpretación de las soluciones.
- Capítulo 6. Se aborda el tema de la dualidad en sus diferentes alternativas de solución, realizando comparación con las soluciones obtenidas a través del método simplex.
- Capítulo 7. Para este capítulo se pasa al análisis postóptimo de las soluciones. Se realizan aplicaciones de cambio en la disponibilidad de los recursos, cambio en costos o precios unitarios, cambio en recursos tecnológicos, nuevas restricciones y nuevos productos. En cada tipo de modificación se realizan ejemplificaciones de cuando se presenta cambio en la solución óptima y cuando no se presenta cambio en la misma.

- Capítulo 8. Se abordan los problemas de transporte, asignación y trasbordo; realizando la formulación, primera solución básica factible y el avance hacia la optimización, con su correspondiente procedimiento e interpretación de la solución.

Al final del texto se ha colocado en el apéndice 1 el manejo y solución de los problemas con el paquete WINQSB y en el apéndice 2 la solución de algunos ejercicios seleccionados.

Vale la pena mencionar que este texto en su estructura es muy sencillo de comprender, pero, requiere obviamente de conocimientos elementales de matemáticas y álgebra lineal (matemáticas primitivas). Además, el texto puede ser básico no sólo para ingeniería; sino también para cualquier profesión que esté interesada en el tema.

Para terminar, quiero agradecer a todas las personas que deseen colaborar con el mejoramiento de este texto enviando sus sugerencias a:

azhguerrero@yahoo.com.mx
sigma_humberto_guerrero@yahoo.com.mx

El autor.

Introducción a la programación lineal

PRESENTACIÓN

Se establece el proceso lógico que se debe llevar para el correcto planteamiento del modelo matemático de problemas de programación lineal y reglas de equivalencia de la función objetivo y las restricciones de un modelo de programación lineal; además de las formas generales del modelo de programación lineal y sus suposiciones.

OBJETIVO GENERAL

Al finalizar el capítulo el estudiante debe estar en capacidad de identificar un problema de programación lineal.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Conocer las diferentes formas generales del modelo de programación lineal.
- Identificar variables
- Aplicar las reglas de equivalencia.
- Identificar parámetros.

COMPETENCIAS

El estudiante aprenderá a identificar las diferentes formas de modelo de programación lineal, los procesos en los cuales pueda aplicar la programación lineal y seguir el procedimiento de obtención del modelo matemático de programación lineal.

INDICADORES DE LOGRO

El estudiante deberá manejar los conceptos de planteamiento e identificación de variables, identificación de parámetros y aplicaciones de la programación lineal; así como el manejo de las reglas de equivalencia.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Manejo de ecuaciones lineales simultáneas.
- Conocimiento de propiedades de las desigualdades.
- Concepto de máximos y mínimos.

1.1. GENERALIDADES

La programación lineal es básicamente la lucha o disputa de una cantidad de actividades (productos) por unos recursos de carácter limitado, de tal forma que se obtenga un máximo de rendimiento.

Cuando se hace referencia a rendimiento, se está hablando de la optimización del sistema que puede ser de dos formas así:

- Maximización, cuando lo que se persigue es el máximo de utilidad o ingreso.
- Minimización, cuando se persigue un mínimo de costos o egresos de una empresa.

La programación lineal es una de las técnicas más útil de la investigación de operaciones una amplia gama de problemas empresariales, tales como: económicos, industriales, financieros, productivos, hospitalarios, etc.

Para visualizar mejor lo anterior se utiliza el siguiente ejemplo:

1.2. EJEMPLO PROTOTIPO

Una fábrica de muebles produce sillas, mesas y escritorios para los cuales ha establecido que rinden una contribución a las utilidades de \$5.000, \$8.000 y \$6.000 por unidad respectivamente.

Para la producción de dichos artículos la compañía cuenta con una disponibilidad semanal de 100 metros de madera, 150 metros de tubo y 120 horas de mano de obra (horas-hombre).

Además, mediante un estudio se ha determinado que para producir una silla se requieren 5 metros de madera, 3 metros de tubo y 4 horas de mano de obra; para producir una mesa se necesitan 3 metros de madera, 6 metros de tubo y 3 horas hombre de trabajo; mientras que para producir un escritorio se requieren 7 metros de madera, 4 metros de tubo y 3 horas de mano de obra.

Se desea plantear el modelo de programación lineal que se genera a fin de incrementar al máximo las utilidades de la compañía.

Análisis de la información

La información paramétrica que ofrece el modelo es la utilidad de cada uno de los artículos, los recursos disponibles y el consumo de cada recurso por cada unidad producida.

Por lo tanto hay que determinar qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar a fin de conseguir el máximo de utilidad la empresa. Esta cantidad se representa por medio de variables.

En resumen la información se puede presentar como se realiza en el siguiente cuadro:

RECURSO	PRODUCTO			DISPONIBLE SEMANAL
	SILLA	MESA	ESCRITORIO	
MADERA	5 m	3 m	7 m	100 metros
TUBO	3 m	6 m	4 m	150 metros
MANO OBRA	4 m	3 m	3 m	120 horas
UTILIDAD/UD	\$5000	\$8000	\$6000	
VARIABLE	X_1	X_2	X_3	

En donde las variables se definen de la siguiente forma:

X_1 = cantidad de sillas a producir por semana.

X_2 = cantidad de mesas a producir por semana.

X_3 = cantidad de escritorios a producir por semana.

Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, el objetivo es incrementar al máximo posible la utilidad total de la compañía, la cual está representada por la siguiente función lineal:

$5000X_1 + 8000X_2 + 6000X_3$ a esta ecuación se le denomina función objetivo.

La anterior función debe ser maximizada teniendo en cuenta que los recursos: madera, tubo y mano de obra son de carácter limitado y no se puede utilizar más de su disponibilidad así:

$$5X_1 + 3X_2 + 7X_3 \leq 100 \text{ metros. Restricción para la madera.}$$

$$3X_1 + 6X_2 + 4X_3 \leq 150 \text{ metros. Restricción para el tubo.}$$

$$4X_1 + 3X_2 + 3X_3 \leq 120 \text{ horas. Restricción para la mano de obra.}$$

Las anteriores inecuaciones se les denominan restricciones funcionales del problema.

Por lógica, y sin haber estudiado demasiado, se sabe que no se pueden producir cantidades negativas, entonces todas las variables del problema se deben restringir a valores no negativos así:

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0 \text{ estas son las llamadas restricciones de no negatividad.}$$

En resumen, si se denota a la utilidad como Z el modelo matemático de programación lineal queda como se muestra a continuación:

$$\text{Max } Z = 5000X_1 + 8000X_2 + 6000X_3$$

Sujeto a:

$$5X_1 + 3X_2 + 7X_3 \leq 100 \text{ metros de madera.}$$

$$3X_1 + 6X_2 + 4X_3 \leq 150 \text{ metros de tubo.}$$

$$4X_1 + 3X_2 + 3X_3 \leq 120 \text{ horas de mano de obra.}$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

1.3. MODELO GENERAL DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Generalizando, si se tienen n productos o actividades y m recursos disponibles el problema se transforma en:

RECURSO	PRODUCTO					b_i
	1	2	3		n	DISPONIBLE
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}		a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}		a_{2n}	b_2
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}		a_{3n}	b_3
.....						
.....						
M	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}		a_{mn}	b_m
C_j	c_1	c_2	c_3		c_n	
X_j	x_1	x_2	x_3		x_n	

Donde en forma generalizada se define lo siguiente:

b_i = cantidad disponible del recurso i ($i = 1, 2, 3, \dots, m$)

c_j = costo o precio unitario del producto o actividad j ($j = 1, 2, 3, \dots, n$)

X_j = cantidad a fabricar del artículo j ($j = 1, 2, 3, \dots, n$)

a_{ij} = cantidad de recurso i ($i = 1, 2, 3, \dots, m$) necesario para fabricar una unidad del artículo j ($j = 1, 2, 3, \dots, n$)

1.3.1. Forma estándar del modelo de programación lineal

Esta es la forma más conocida y trabajada del modelo de programación lineal. Su planteamiento se presenta enseguida:

$$\text{Max } Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \dots + C_nX_n$$

s.a.

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \dots + a_{1n}X_n \leq b_1$$

$$a_{21}X_1 = a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \dots + a_{2n}X_n \leq b_2$$

$$a_{31}X_1 = a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + \dots + a_{3n}X_n \leq b_3$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{m1}X_1 = a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + \dots + a_{mn}X_n \leq b_m$$

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \geq 0$$

1.3.2. Forma matricial del modelo de programación lineal

Para definir la forma matricial del modelo de programación lineal se hace necesario definir todos los vectores y matrices que en el modelo intervienen así:

MATRIZ A: esta matriz contiene todos los elementos de asignación unitaria de recursos. En algunos textos se denomina matriz de coeficientes tecnológicos.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{matrix} \end{matrix}$$

VECTOR X: este vector contiene todas las variables del problema y está definido como vector columna.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

VECTOR b: en este vector se involucran todas las disponibilidades de recursos o términos independientes. Está definido como un vector columna.

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

VECTOR C: en este vector fila se involucran todos los coeficientes de costo, utilidad, ingreso o precio, según sea el caso

$$C = (C_1 \ C_2 \ C_3 \dots \ C_n)$$

VECTOR 0: el vector columna cero contiene tantos ceros como variables involucre el problema, y garantiza las restricciones de no negatividad.

$$0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

El modelo matemático de programación lineal en su forma matricial es como se muestra a continuación:

$$MaxZ = (C_1 \ C_2 \ C_3 \dots \ C_n) \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

s.a.

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \leq \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \geq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

1.3.3. Forma sumatorial

El modelo matemático de programación lineal utilizando sumatorias es como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \text{Max} Z &= \sum_{j=1}^n C_j X_j \\ \text{s.a.} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j &\leq b_i \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, m \\ X_j &\geq 0 \quad \forall j = 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

1.3.4. Forma Canónica del modelo de programación lineal

La forma canónica del modelo matemático de programación lineal, es tal vez la más simple como se encuentra este modelo y con base en ésta es como se desarrollan todas sus demostraciones. Su forma es la siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Max} Z &= CX \\ \text{s.a.} \\ AX &\leq b \\ X &\geq 0 \end{aligned}$$

1.4. OTRAS FORMAS DEL MODELO

El lector puede observar que se ha utilizado en todas las formas una función objetivo de maximización y las restricciones funcionales son del tipo menor o igual que. Esto no indica que siempre es así, eso depende de la formulación del problema y puede incluir lo siguiente:

- La función objetivo puede ser de minimización.
- Las restricciones pueden ser del tipo mayor o igual.
- Las restricciones pueden ser de igualdad estrictamente.

Esto se podrá observar cuando se llegue al capítulo de métodos de solución.

1.5. PROCEDIMIENTO PARA LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

Con base en lo escrito hasta acá y la experiencia del autor se recomiendan seguir estos pasos para la construcción de modelos matemáticos (no se nombra sólo hasta la construcción del modelo, sino además, hasta la implantación):

PASO 1: Formulación del modelo

A esto es lo que el autor llama literatura del problema, aquí se debe estructurar toda la información de parámetros y variables y la interacción entre ellas.

PASO 2. Análisis de la información

En este paso se debe realizar minuciosamente el análisis de cada parámetro del modelo y cómo influye en él; además, de permitir una visualización de lo que se quiere conseguir (objetivo) y definir a grandes rasgos las limitantes del sistema.

PASO 3. Definición de variables

Este es tal vez el paso más importante, pues si la variable queda mal definida; la solución del problema arrojará malos resultados, conllevando a malas decisiones. Aquí se debe establecer qué se desea conocer (en matemáticas, incógnitas), para lograr la solución de un problema en particular.

PASO 4. Establecer la función objetivo

Con base en la definición de las variables se debe estructurar que es lo que más le conviene a la empresa o persona donde se está realizando la solución del problema. En general se llama maximización a todo aquello que entra a la empresa en términos benéficos (puede haber alguien entrando basura); como por ejemplo maximizar ingresos, utilidades y productividad entre otras y se habla de minimización a todo lo que no le convenga a la empresa pero que necesariamente lo debe realizar. Se habla acá de minimizar egresos y costos básicamente; también se puede hablar de minimizar la creación de desperdicios o contaminantes. En esta función cada variable debe tener un coeficiente de rendimiento según sea maximizar o minimizar.

PASO 5. Determinar las restricciones

Definida perfectamente la función objetivo se debe evaluar qué restricciones impiden lograr un valor máximo o mínimo de la función objetivo; pues necesariamente no habrá recursos infinitos para su utilización (si esto fuera así no habría problema y estaríamos perdiendo el tiempo). Entonces se parte del hecho que hay unos recursos de carácter limitado, entre los cuales se pueden nombrar los siguientes: dinero disponible, mano de obra disponible, materia prima disponible, restricciones gubernamentales, capacidad de producción, capacidad de almacenaje, restricciones del mercado, etc. Al igual que la función objetivo, en cada una de las restricciones, cada variable debe tener un coeficiente. No olvide que las restricciones de no negatividad también forman parte de las restricciones.

PASO 6. Solución del modelo matemático

La función objetivo, junto con las restricciones (pasos 4 y 5) en conjunto, es lo que se llama el modelo matemático. Éste se debe solucionar en lo posible con

una técnica de optimización (hay más técnicas, como por ejemplo la simulación que no arroja soluciones óptimas), la cual permite hallar los valores de las variables definidas en el paso tres.

PASO 7. Prueba del modelo y la solución

Con base en la solución del modelo, se debe realizar las pruebas pertinentes, especialmente corroborar en las restricciones, que se cumpla con la mejor utilización de los recursos y que la función objetivo tenga su valor óptimo. En este paso, se debe evaluar el funcionamiento del modelo con su respectiva solución; a fin de verificar el cumplimiento de los objetivos.

PASO 8. Implantación del modelo

Realizadas todas las pruebas de rigor en el punto anterior, no queda más que implementar la solución en la práctica. No olvide que la mayoría de modelos arrojan soluciones óptimas; que casi siempre en la realidad no funcionan perfectamente por diferentes factores. Por lo tanto no olvide aplicar el paso nueve.

PASO 9. Controlar y retroalimentar

En todo momento se debe estar atento a cualquier modificación en la información y parámetros del modelo; a fin de ir evaluando los posibles cambios que se deban realizar y que no descontrolen el sistema.

1.6. REGLAS DE EQUIVALENCIA¹

Primera regla

Maximizar cX es equivalente a minimizar $-cX$

Ejemplo: Máx. $Z = 3X_1 + 4X_2$ es equivalente a Min $(-Z) = -3X_1 - 4X_2$.

O también se puede realizar a la inversa así:

Minimizar cX es equivalente a maximizar $-cX$

Ejemplo: Min $Z = 7X_1 + 9X_2$ es equivalente a Máx. $(-Z) = -7X_1 - 9X_2$.

Segunda regla

Una desigualdad $AX \leq b$ es equivalente a $-AX \geq -b$.

Ejemplo:

1 PRAWDA, Juan. *Métodos y modelos de investigación de operaciones*: volumen 1, pag. 69. Ed. Limusa, 1994.

$$3X_1 + 6X_2 + 4X_3 \leq 150 \text{ es equivalente a } -3X_1 - 6X_2 - 4X_3 \geq -150.$$

Esta regla también se puede dar al revés así:

$$\text{Una desigualdad } AX \geq b \text{ es equivalente a } -AX \leq -b.$$

Ejemplo:

$$3X_1 + 6X_2 \geq 150 \text{ es equivalente a } -3X_1 - 6X_2 \leq -150.$$

Tercera regla

Toda restricción de la forma $AX = b$ se puede establecer como la intersección de dos desigualdades así: $AX \leq b$ y $AX \geq b$.

Ejemplo: $4X_1 + 3X_2 + 3X_3 = 120$ horas es equivalente a la intersección de las dos siguientes restricciones:

$$4X_1 + 3X_2 + 3X_3 \leq 120 \text{ horas.}$$

$$4X_1 + 3X_2 + 3X_3 \geq 120 \text{ horas.}$$

Cuarta Regla

Toda desigualdad de la forma $AX \leq b$ puede convertirse en igualdad mediante la adición de un vector H en el lado izquierdo de la restricción. Este vector contiene m componentes no negativas y se le denomina vector de holgura y a sus componentes variables de holgura. Es decir el vector queda así:

$$H = \left\{ \begin{matrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ \vdots \\ H_m \end{matrix} \right\} \geq \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

Ejemplo:

$$5X_1 + 3X_2 + 7X_3 \leq 100.$$

$$3X_1 + 6X_2 + 4X_3 \leq 150.$$

$$4X_1 + 3X_2 + 3X_3 \leq 120.$$

$$\text{Es equivalente a: } 5X_1 + 3X_2 + 7X_3 + H_1 = 100.$$

$$3X_1 + 6X_2 + 4X_3 + H_2 = 150.$$

$$4X_1 + 3X_2 + 3X_3 + H_3 = 120.$$

$$H_1, H_2, H_3 \geq 0$$

Quinta regla

Toda desigualdad de la forma $AX \geq b$ puede convertirse en igualdad mediante la resta de un vector S en el lado izquierdo de la restricción. Este vector contiene m componentes no negativas y se le denomina vector de exceso o superflúo y a sus componentes variables de exceso o superflúo. Es decir, el vector queda así:

$$S = \left\{ \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_m \end{matrix} \right\} \geq \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

Ejemplo: $5X_1 + 3X_2 + 7X_3 \geq 100.$

$$3X_1 + 6X_2 + 4X_3 \geq 150.$$

$$4X_1 + 3X_2 + 3X_3 \geq 120.$$

Es equivalente a: $5X_1 + 3X_2 + 7X_3 - S_1 = 100.$

$$3X_1 + 6X_2 + 4X_3 - S_2 = 150.$$

$$4X_1 + 3X_2 + 3X_3 - S_3 = 120.$$

$$S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Sexta regla

Una variable no restringida (en algunos textos se denomina irrestricta), es aquella que puede tomar cualquier clase de valor: positivos, cero o negativos; puede escribirse como la diferencia entre otras dos variables no negativas.

Ejemplo: si la variable X_1 se considera no restringida, es equivalente a expresar esta misma variable como: $X_1 = R_1 - R_2$. (Con R_1 y R_2 mayores o iguales que cero)

La variable X_1 será positiva si R_1 es mayor que R_2 , será cero si R_1 es igual que R_2 y será negativa si R_1 es menor que R_2 .

Estas reglas de equivalencia tendrán su máxima aplicación (especialmente la última) cuando se aborde el tema de dualidad.

1.7. SUPOSICIONES DE LA PROGRAMACION LINEAL²

En todo problema de programación lineal se consideran presentes las siguientes suposiciones:

Suposición de proporcionalidad

$$\text{Max } Z = 5000X_1 + 8000X_2 + 6000X_3$$

Sujeto a:

$$5X_1 + 3X_2 + 7X_3 \leq 100 \text{ metros de madera.}$$

$$3X_1 + 6X_2 + 4X_3 \leq 150 \text{ metros de tubo.}$$

$$4X_1 + 3X_2 + 3X_3 \leq 120 \text{ horas de mano de obra.}$$

La proporcionalidad se refiere en el caso del ejemplo prototipo de la sección 1.2, por una silla fabricada la utilidad es \$5.000, por dos sillas fabricadas la utilidad es \$10.000. Lo que quiere decir que la contribución a la utilidad por concepto de sillas depende del valor que tome la variable X_1 en este caso. De igual manera ocurre con el consumo de recursos en cada una de las restricciones, pues se sabe que cada silla requiere 5 metros de madera, 3 metros de tubo y 4 horas de mano de obra; y el consumo total de cada recurso por concepto de la fabricación de sillas depende de la cantidad de sillas que se fabriquen o sea el valor que tome la variable.

Suposición de aditividad

Para saber cuál es la utilidad total en el ejemplo prototipo se debe conocer el valor de cada variable (cantidad de sillas, mesas y escritorios); por lo tanto, también se establece la utilidad total generada por cada uno de los artículos y así poder sumar cada una de estas utilidades. Del mismo modo se procede para determinar cuánto es el recurso consumido para cada una de las restricciones por la cantidad de producto fabricado y el total se halla sumando el consumo de cada producto. En conclusión la aditividad se refiere a que hay que sumar las utilidades generadas independientemente por cada artículo para establecer la utilidad total y para calcular el consumo total de cada recurso, también se suman los consumos independientes de los mismos.

Suposición de divisibilidad

Aquí se refiere a que en todo problema de programación lineal se supone que las variables pueden tomar cualquier valor fraccionario; o sea que para el problema de la sección 1.2 se podría decir que se va a fabricar $1/3$ de escritorio.

² WINSTON, Wayne. *Investigación de operaciones*. Pág 53. Editorial Thomson. Cuarta edición, 2004.

Suposición de certidumbre

Todo problema de programación lineal supone que se conocen exactamente los coeficientes de las variables en la función objetivo (costos, utilidades, etc.), los consumos unitarios de recurso (coeficientes de las variables en las restricciones) y la disponibilidad de cada uno de los recursos (lado derecho de las restricciones); esto es conocer perfectamente todos los parámetros del modelo. Con un solo parámetro que se desconozca, se genera incertidumbre.

Planteamiento de modelos de programación lineal

PRESENTACIÓN

Se presentan algunos ejemplos de aplicación de la programación lineal, haciendo énfasis en la construcción del modelo matemático.

OBJETIVO GENERAL

Al finalizar el capítulo el estudiante debe estar en capacidad de construir modelos matemáticos de programación lineal, dada una formulación del problema.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar variables de decisión del modelo.
- Identificar parámetros del modelo.
- Estructurar la función del objetivo.
- Estructurar las restricciones

COMPETENCIAS

El estudiante aprenderá a identificar procesos en los cuales pueda aplicar la programación lineal y construir modelos matemáticos de programación lineal con base en una formulación. La aplicación se realizará en el entorno empresarial en producción, mercados, dietas entre otros.

INDICADORES DE LOGRO

El estudiante deberá construir modelos de programación lineal a partir de una formulación, identificando variables y parámetros; así como manejar la aplicación práctica de la programación lineal.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Manejo de ecuaciones lineales simultáneas.
- Concepto de maximización y minimización.
- Conocimiento de propiedades de las desigualdades.

Tal como se ha mencionado en el capítulo anterior, la aplicación de la programación lineal a través de toda su historia ha sido muy diversa. Por lo tanto en este capítulo se presentarán las formulaciones y planteamientos de modelos clásicos de este tema.

2.1. APLICACIONES EN PRODUCCIÓN

Ejercicio 2.1.1. La compañía SIGMA fabrica pupitres, sillas y mesas, para los cuales ha establecido que rinden una contribución a las utilidades de \$ 5.000, \$6.000 y \$3.000 por unidad respectivamente. Para la producción de dichos artículos la compañía cuenta con una disponibilidad semanal de 150 metros de madera, 120 metros de tubo y 200 horas-hombre de trabajo. Plantee el modelo matemático de programación lineal que se genera si sabe que para producir un pupitre se requiere de 5 metros de madera, 3 metros de tubo y 4 horas-hombre de trabajo; para producir una silla se requieren 3 metros de madera, 4 metros de tubo y 5 horas-hombre de trabajo; mientras que, para producir una mesa se requieren 2 metros de madera, 3 metros de tubo y 1 hora-hombre de trabajo.

Solución

Análisis de información

Para el planteamiento de este problema primero se organiza la información en la tabla 2.1.

TABLA 2.1.				
RECURSO	PRODUCTO			DISPONIBILIDAD SEMANAL DEL RECURSO
	PUPITRES	SILLAS	MESAS	
MADERA	5 m	3 m	2 m	150 metros
TUBO	3 m	4 m	3 m	120 metros
HORAS-HOMBRE	4 h	5 h	1 h	200 horas
UTILIDAD/UNIDAD	\$5.000	\$6.000	\$3.000	

Definición de variables

En la compañía SIGMA se debe decidir cuántos pupitres, sillas y mesas se deberán producir por semana para lograr un máximo de utilidad; por lo cual las variables de decisión son:

X_1 =cantidad de pupitres a producir por semana

X_2 =cantidad de sillas a producir por semana

X_3 = cantidad de mesas a producir por semana

Función objetivo

La compañía debe garantizar un máximo de utilidad, por lo tanto la función objetivo es la siguiente:

$$\text{Máx. } Z = 5.000 X_1 + 6.000 X_2 + 3.000 X_3$$

Restricciones del modelo

Además, la compañía debe tener en cuenta las siguientes limitaciones en los recursos:

$$5X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 150 \text{ metros de madera.}$$

$$3X_1 + 4X_2 + 3X_3 \leq 120 \text{ metros de tubo.}$$

$$4X_1 + 5X_2 + X_3 \leq 200 \text{ horas-hombre.}$$

También, se deben considerar las restricciones de no negatividad (restricciones de signo de las variables), ya que en este caso, no se pueden producir unidades negativas de ningún producto. Tales restricciones son las siguientes:

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Modelo matemático completo

En compendio, el modelo matemático de programación lineal para la compañía SIGMA queda de la siguiente manera:

$$\text{Máx. } Z = 5.000 X_1 + 6.000 X_2 + 3.000 X_3$$

s.a.

$$5X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 150 \text{ metros de madera.}$$

$$3X_1 + 4X_2 + 3X_3 \leq 120 \text{ metros de tubo.}$$

$$4X_1 + 5X_2 + X_3 \leq 200 \text{ horas-hombre.}$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0 \text{ restricciones de no negatividad}$$

Ejercicio 2.1.2. La compañía BETA ha sacado del mercado un producto que ya no le era rentable, lo cual genera que haya una capacidad disponible semanal que no se está utilizando en sus 3 departamentos así: 200 horas en corte, 240 horas en soldadura y 150 horas en empaque.

El departamento de producción propone que dicha capacidad sea utilizada en la producción de puertas, ventanas y claraboyas en la forma más eficiente posible, para dichos artículos se ha establecido un posible precio de venta de \$5.000, \$3.000 y \$4.000 por unidad respectivamente. Además se ha determi-