

Yannick Vincent, Robert Eymard

Équations différentielles

Cours et exercices corrigés

DUNOD

© Dunod, 2026
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-089446-8

Table des matières

Introduction	1
I Équations différentielles scalaires linéaires	12
I.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants .	12
I.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients fonctions .	16
I.3 Problème de Cauchy	18
I.4 Équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2	22
Exercices	24
II Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants	27
II.1 Le cas particulier de la dimension 2	28
II.2 Le cas homogène en dimension quelconque	32
II.3 Résolution avec l'exponentielle matricielle	40
II.4 Calcul de solutions avec l'exponentielle matricielle	47
II.5 Problèmes affines à coefficients constants	54
II.6 Trajectoires, portraits de phase et points d'équilibre	57
Exercices	60
III Systèmes différentiels linéaires à coefficients non constants	68
III.1 Existence et unicité d'une solution du problème de Cauchy	68
III.2 Système fondamental de solution et résolvante	76
Exercices	86
IV Systèmes différentiels non linéaires	90
IV.1 Deux exemples de problèmes non linéaires	91
IV.2 Problème de Cauchy et nature des solutions	92
IV.3 Théorèmes de Cauchy-Lipschitz et théorème des bouts	94
IV.4 Existence et unicité d'une solution locale	101
IV.5 Preuve des résultats du cas localement lipschitzien	105

IV.6 Flot d'un système différentiel localement lipschitzien	111
Exercices	115
V Problèmes autonomes	122
V.1 Trajectoires et portrait de phase	123
V.2 Points d'équilibres : définitions et premiers résultats	127
V.3 Théorèmes de stabilité et fonctions de Liapunov	130
V.4 Autres théorèmes du xx ^e siècle	141
Exercices	145
VI Modèles biologiques	152
VI.1 Modèle SIR d'épidémiologie	152
VI.2 Modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra	158
VI.3 Modèle de compétition de Lotka-Volterra	164
VII Modèles physiques	174
VII.1 Mouvement d'un pendule pesant	174
VII.2 Mouvement d'un satellite	182
VII.3 L'attracteur de Lorenz	192
Corrigés des exercices	197
Bibliographie	277
Index	279

Avant-propos

*À Marin, né juste à temps
pour participer aux dernières
réunions de rédaction de cet ouvrage.*

Cet ouvrage présente la théorie des équations différentielles et s'adresse prioritairement aux étudiantes et étudiants en Licence de mathématiques (dans toute la suite de ce livre, nous nous adresserons à l'ensemble des personnes intéressées par le sujet en alternant l'usage de termes féminins et masculins, suivant en cela Michèle Audin [Audin, 2006]).

En situation d'apprentissage, il est parfois difficile de tisser des liens entre des approches qui semblent *a priori* différentes et qui ont été présentées dans des contextes distincts. Cela est d'autant plus vrai pour les équations différentielles que certains enseignements du cycle Licence sur le sujet ne sont parfois qu'optionnels, impliquant de fait une certaine hétérogénéité au sein des promotions. Pour cette raison, il nous a semblé utile de rassembler, dans un même ouvrage, les divers éléments théoriques présentés dans les cours des trois années de Licence. Autrement dit, notre ambition est que ce livre puisse jouer le rôle d'un outil « tout en un » pour l'étude des équations différentielles. Nous espérons que cela rendra l'apprentissage plus progressif et facilitera la compréhension des liens entre les aspects calculatoires, souvent plus simples, et les résultats plus théoriques. Bien que nous donnions presque toujours une preuve rigoureuse des résultats théoriques énoncés, notre objectif premier est que le lecteur trouve dans notre ouvrage la compréhension de leur application par les exemples et exercices traités dans chaque chapitre. Seuls quelques théorèmes nous ayant semblé relever plutôt d'un programme de Master sont admis sans démonstration. Des références sont alors données permettant aux personnes intéressées de s'y reporter.

Mais nous poursuivons également un autre objectif : celui de faire partager à nos lectrices notre intérêt pour les modèles formulés au moyen de systèmes d'équations différentielles. Nous avons donc inclus dans cet ouvrage des exercices et des dévelop-

pements portant sur des modèles issus de la physique (principalement l'électricité et la mécanique, avec une petite incursion dans une modélisation simplifiée de phénomènes météorologiques avec l'attracteur de Lorenz), l'épidémiologie et la dynamique des populations. Les spécialistes de ces domaines trouveront sans doute que notre approche est trop rudimentaire, et les résultats présentés très incomplets : nous nous efforçons en effet de traiter principalement les questions d'existence globale et locale des solutions, des points d'équilibre et des comportements asymptotiques, ce qui peut négliger beaucoup d'autres aspects dans l'étude de ces modèles. Plutôt que de développer les applications dans toute leur complexité, nous avons choisi de mettre l'accent sur des raisonnements rigoureux dans la continuité du contenu de cet ouvrage.

Pour répondre aux objectifs que nous avons décrits, nous avons cherché une progressivité dans les notions traitées. Ainsi, les premiers chapitres de ce livre sont abordables avec les connaissances acquises durant les études secondaires, quand les derniers sont plus spécifiquement accessibles en fin de cycle de licence. Plus exactement, le premier chapitre, traitant des équations différentielles scalaires linéaires, correspond au contenu d'un cours de première année. Les chapitres II et III abordent la question de la résolution des systèmes différentiels linéaires. Ils sont généralement enseignés en deuxième année et font naturellement appel aux résultats d'algèbre linéaire, en particulier à la réduction des endomorphismes. Les chapitres suivants présentent l'étude des systèmes différentiels non linéaires et s'adressent prioritairement aux étudiants de troisième année. Au début de chaque chapitre, les connaissances requises sont listées et servent à baliser le parcours d'apprentissage. Il nous semble cependant difficile, voire impossible, que l'ensemble des notions présentées dans ce livre soient enseignées au cours d'un seul module de troisième année, comme de deuxième année. Nous avons conçu cet ouvrage comme un support, dans lequel une enseignante pourrait puiser pour construire un cours adapté à ses étudiants.

Nous espérons enfin que ce livre pourra être utile à un public plus large que celui des promotions de Licence à l'Université. Les trois premiers chapitres reprennent en effet bon nombre de notions enseignées dans les classes préparatoires. Il pourra par ailleurs intéresser des personnes spécialisées en physique, en biologie ou en économie qui chercheraient un cours rigoureux tourné vers les applications. Les chapitres traitant des équations différentielles non linéaires pourront intéresser des étudiantes de niveau Master, notamment celles préparant l'agrégation car certaines démonstrations pourraient servir de base à un développement lors de l'épreuve orale. Plus généralement, ce livre s'adresse à tous ceux qui, comme nous, prennent de l'intérêt et du plaisir à explorer cette discipline des mathématiques.

Yannick Vincent et Robert Eymard¹

1. Toute notre gratitude va à Nathalie Debouzy, Thierry Gallouët, Raphaële Herbin et Lucas Oger qui nous ont aidés à améliorer cet ouvrage.

Introduction

Les équations différentielles, de quoi s'agit-il ?

Une **équation différentielle ordinaire** (abrégée en **EDO**) peut modéliser de manière mathématique l'évolution de certains systèmes physiques, biologiques, économiques ou sociaux par exemple. L'étude des EDO a été introduite à la fin du $xvii^e$ et au $xviii^e$ siècle par des mathématiciens ou des physiciens tels que Newton dans le cadre de la mécanique. Elle a été ensuite développée aux xix^e et xx^e siècles par des mathématiciens tels que Cauchy, Lipschitz, Euler, Peano ou encore Poincaré qui y ont apporté des contributions notables.

Dans les paragraphes qui suivent, nous passons en revue quelques mots de vocabulaire de la théorie des équations différentielles en soulignant des distinctions importantes.

Équations différentielles vs systèmes différentiels

Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une équation dont l'inconnue est une fonction d'une variable (dans les modèles, cette variable est souvent le temps). Elle se présente sous la forme d'une relation entre cette fonction et sa dérivée (ou éventuellement ses dérivées successives). L'exemple le plus classique, connu de tous les lycéens, est sans doute celui de l'équation $x' = x$ où x désigne une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cette équation admet pour solutions toutes les fonctions de la forme $t \mapsto ke^t$, où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque. Pour avoir une unique solution à cette équation, il faut ajouter une condition portant sur la valeur prise par x en un temps donné. Pour définir sans ambiguïté la fonction exponentielle, on impose par exemple la condition $x(0) = 1$, appelée **condition initiale**. On dit ainsi que la fonction exponentielle est solution du **problème de Cauchy**² $x' = x$ et $x(0) = 1$. Cette distinction entre équation différentielle et problème de Cauchy se retrouve en fait

2. En anglais, un problème de Cauchy est nommé « Initial Value Problem » abrégé en (IVP); nous utilisons pour les illustrations informatiques la procédure en langage Python `solve_ivp`.

tout au long du livre. On retiendra qu'une équation différentielle admet généralement une infinité de solutions quand un problème de Cauchy en admet, sous des hypothèses satisfaites par un grand nombre de problèmes, une seule.

Il est possible de considérer également des **systèmes différentiels**, pour lesquels il y a plusieurs fonctions inconnues. On peut, par exemple, chercher à déterminer des fonctions x_1 et x_2 , dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que
$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2 \\ x'_2 = 2x_1 - 3x_2 \end{cases}.$$

En posant, pour $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, on voit donc que la fonction $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est solution de $X'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} X(t)$. De manière plus générale, on considérera dans cet ouvrage des systèmes différentiels portant sur n fonctions inconnues (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et leurs dérivées, qui seront mis sous la forme $X'(t) = F(X(t))$ où X est une fonction inconnue à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Pour cette raison, cette dernière équation sera également appelée système différentiel (voir chapitre II). Notons que l'acronyme EDO fait indistinctement référence aux équations différentielles et aux systèmes différentiels.

Linéaire vs non linéaire

L'équation $x' = x$ est une équation **linéaire** dans le sens suivant : si x_1 et x_2 sont deux solutions de cette équation et si λ est un réel, alors $x_1 + \lambda x_2$ est également solution. Cette propriété n'est en revanche pas vérifiée par l'équation $x' = x^2$ qui, de ce fait, est dite **non linéaire**. Cette notion de linéarité se généralise d'ailleurs au cas des systèmes différentiels où il convient, là aussi, de distinguer les systèmes différentiels linéaires des non linéaires.

Cette différence est importante. Les équations différentielles linéaires admettent toujours des solutions définies sur la totalité de l'intervalle dans lequel le problème posé à un sens et dans lequel on recherche une solution (on dit alors que la solution est **globale**). Pour ces problèmes linéaires, lorsque les coefficients sont constants, on peut même donner une expression explicite des solutions, comme dans le cas de l'équation $x' = x$ dont les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$ (ces résultats font l'objet du chapitre I pour le cas scalaire et du chapitre II pour le cas des systèmes à coefficients constants). Dans le cas des équations différentielles linéaires à coefficients non constants, la propriété de solution globale est encore vérifiée, mais en revanche, il n'est pas toujours possible d'obtenir une expression explicite de la solution (voir le chapitre III). Le cas des équations non linéaires ajoute de nouvelles difficultés. On verra que certaines de ces équations n'admettent pas de solution globale et qu'il faut restreindre l'intervalle considéré pour qu'une solution existe (on dit alors que la solution est **locale** mais pas globale). C'est par exemple le cas de l'équation $x' = x^2$ avec $x(0) = 1$, dont nous montrons au chapitre IV qu'elle n'admet pas de solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais seulement sur un sous-intervalle. Notons de plus qu'une difficulté des équations

non linéaires vient du fait que, là aussi, il n'est souvent pas possible de déterminer une expression explicite des solutions, alors que l'on a besoin d'en comprendre les propriétés. Dans ce cas, on se tourne vers une étude **qualitative**. On commence généralement par montrer qu'il existe une solution, on détermine son ensemble de définition, puis on poursuit l'étude en déterminant ses propriétés principales (caractère borné, convergent, périodique, etc.).

Dans ce livre, l'étude des équations et systèmes différentiels linéaires font l'objet des chapitres I à III. Ils sont généralement étudiés en première et deuxième année de licence. Le cas des équations et systèmes différentiels non linéaires, souvent traité dans un cours de troisième année, fait ensuite l'objet des chapitres IV à VII.

Autonome vs non autonome

On dit qu'une équation est autonome si elle ne dépend pas explicitement de la variable (souvent le temps). Par exemple, l'équation $x'(t) = x(t)$ (où l'inconnue est la fonction x dépendant de la variable $t \in \mathbb{R}$) est une équation autonome. On peut d'ailleurs écrire cette équation sous une forme abrégée $x' = x$, dans laquelle la variable t n'apparaît pas. À l'inverse, l'équation $x'(t) = tx(t)$ n'est pas autonome car les coefficients de l'équation dépendent de t .

Au lycée, seul le cas des équations différentielles à coefficients constants (et donc autonomes) est traité. Le chapitre I reprend notamment ces résultats avant de présenter le cas plus général des équations à coefficients non constants (c'est-à-dire des équations non autonomes).

Afin de bien comprendre la différence entre équation autonome et non autonome, donnons un exemple physique. On s'intéresse au mouvement d'un pendule, c'est-à-dire une masse suspendue par exemple au plafond par un fil, après l'avoir écartée de sa position d'équilibre (la verticale). On verra dans la suite de cette introduction que le mouvement du pendule se modélise alors par l'équation différentielle $x''(t) + \sin(x(t)) = 0$ où l'inconnue est la fonction x (de la variable t). Cette équation est autonome. Si l'on s'intéresse aux solutions des problèmes de Cauchy ayant respectivement pour conditions initiales $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$ d'une part et $x(1) = 2$, $x'(1) = 0$ d'autre part, la solution d'un des deux problèmes est obtenue par translation de la solution de l'autre. D'un point de vue physique, cela signifie que si l'on réalise deux fois la même expérience (à $t = 0$ et à $t = 1$), le mouvement du pendule sera le même. Supposons maintenant que le pendule évolue dans une pièce ventée. La force de ce vent, notée $V(t)$, modifiera ainsi le mouvement du pendule et l'équation sera par exemple de la forme $x''(t) + \sin(x(t)) = V(t)$. Cette équation est non autonome et, si V n'est pas constante, il n'y aura plus de lien aussi évident entre la solution vérifiant $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$ et celle vérifiant $x(1) = 2$, $x'(1) = 0$. Les solutions dépendront également de la force du vent $V(t)$ et donc du moment où l'on réalise l'expérience. Ceci est dû au fait que le vent est ici complètement extérieur au système. On comprend ainsi que la compréhension d'un système physique ou biologique, exprimé sans action

extérieure, passe le plus souvent par un modèle d'équations différentielles autonomes.

Sur le plan mathématique, les équations et systèmes différentiels autonomes ont des propriétés particulières et l'on dispose alors d'outils spécifiques pour les étudier, tels que les portraits de phase par exemple. Ils feront l'objet spécifique du chapitre V.

EDO vs EDP

Les EDO doivent être distinguées des **équations aux dérivées partielles** (EDP). Lorsqu'une équation établit une relation entre une fonction inconnue $x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et ses dérivées (ou ses dérivées partielles), il y a une différence fondamentale entre le rôle joué par m et celui joué par n .

- Si $m = 1$, la fonction inconnue est une fonction d'une unique variable réelle, et on parle d'EDO ; quand $n = 1$, on parle d'une équation différentielle et quand $n > 1$, on parle de système d'équations différentielles ou simplement de système différentiel, comme évoqué précédemment dans cette introduction. Le cas $n > 1$ est naturellement un peu plus compliqué que celui de $n = 1$, mais la théorie développée dans ce cours reste très proche dans les deux cas : la dérivée de la fonction est obtenue par dérivation au sens habituel de chaque composante, qui est alors une fonction réelle d'une seule variable réelle ; les fonctions à intégrer sont continues et le cadre de l'intégrale de Riemann permet de traiter les questions étudiées.
- Si $m > 1$, on parle d'EDP. Le cadre théorique nécessaire à l'étude des EDP diffère notablement de celui des EDO, et nécessite des connaissances supplémentaires en analyse fonctionnelle. Les solutions des EDP doivent être recherchées dans des espaces fonctionnels de dimension infinie (espaces de Lebesgue ou espaces de Sobolev qui sont des cas particuliers d'espaces de Banach ou de Hilbert) et dont la définition repose sur la théorie de l'intégration de Lebesgue.

Notations

Différentes notations et conventions sont possibles dans le cadre d'un cours sur les équations différentielles. Notre objectif étant de présenter un certain nombre de modélisations liées à la physique et à la biologie, nous avons choisi de noter la variable t , faisant référence à un temps, plutôt que x . Aussi, nous avons choisi de noter la fonction inconnue x plutôt que y ou f . Ce choix se justifie aisément si l'on pense cette grandeur comme étant la coordonnée d'un point sur un axe. À partir du second chapitre, on se placera d'ailleurs en dimension pouvant être supérieure ou égale à deux et $x(t)$ sera remplacé par $X(t) \in \mathbb{R}^n$ désignant un point de l'espace affine. De plus, la notation $x'(t)$ sera plus souvent utilisée que la notation $\frac{dx}{dt}(t)$.

Ainsi, cela signifie qu'une équation différentielle (en dimension 1) sera par exemple notée

$$x'(t) = t^3 x(t) + t,$$

là où l'on trouve dans la littérature, parmi d'autres possibles, les notations suivantes :
 $y'(t) = t^3 y(t) + t$, $y'(x) = x^3 y(x) + x$, $\frac{dy}{dt} = t^3 y + t$, $f'(t) = t^3 f(t) + t$, $f'(x) = x^3 f(x) + x$, $\frac{df}{dx}(x) = x^3 f(x) + x$. .

Enfin, il convient d'expliciter un autre choix relatif aux équations différentielles linéaires. Elles peuvent être présentées sous la forme $x'(t) = ax(t) + b$ ou sous la forme $x'(t) + ax(t) = b$. Bien entendu, il ne s'agit que d'une différence de forme, les deux étant équivalentes à un changement de signe près et l'on trouve les deux choix possibles dans la littérature. Celles et ceux qui préféreront la dernière comprendront aisément pourquoi l'on parle d'équation « sans second membre » lorsque $b = 0$. Cependant, les théorèmes plus avancés sur les équations différentielles (le théorème de Cauchy-Lipschitz notamment, présenté au chapitre II), font souvent l'hypothèse que l'équation différentielle est mise sous une forme qui exprime directement la dérivée x' en fonction de x et de t . La forme choisie dans cet ouvrage pour les équations différentielles linéaires est ainsi cohérente avec l'ensemble de l'ouvrage.

Nous ne considérons par ailleurs dans ce livre que des équations différentielles ou des systèmes différentiels définis en tout point d'un unique intervalle réel, ce qui couvre un grand nombre de modèles pertinents. En particulier, nous n'abordons pas les questions de raccord entre des solutions définies sur plusieurs intervalles disjoints. Ajoutons au sujet de la notion d'intervalle que nous ne considérons que des intervalles d'intérieur non vide en adoptant la définition ci-dessous.

Définition – Intervalle

Dans le cadre de ce livre, un intervalle de $\mathbb{R}$ désigne un ensemble ayant l'un des neuf types suivants (où $A, B \in \mathbb{R}$ et $A < B$) :

$$\begin{array}{ccccccc}]-\infty; +\infty[&]-\infty; A[&]-\infty; A] &]A; +\infty[\\ [A; +\infty[&]A; B[& [A; B] & [A; B] \end{array}$$

En particulier un singleton n'est pas un intervalle.

Enfin, dans le cadre des systèmes d'équations différentielles, nous considérerons des fonctions $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ au sens précisé ci-dessus et n est un entier supérieur ou égal à 1. Dans le cadre de ce livre, l'espace $\mathbb{R}^n$ est assimilé à l'espace des matrices réelles possédant n lignes et une colonne (que nous appellerons également des vecteurs colonnes) :

Définition – Vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et transposition

On considère $\mathbb{R}^n$ comme un ensemble de vecteurs colonnes, à savoir

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pour des raisons typographiques, nous écrirons souvent les éléments $X \in \mathbb{R}^n$ en utilisant la notation de transposition suivante : $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$.

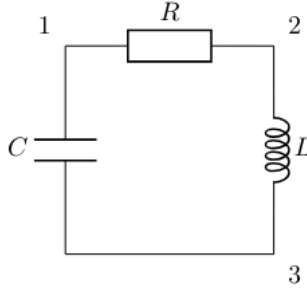
Équations différentielles et modélisation

Comme cela a été mentionné dans l'Avant-propos, nous avons fait le choix de présenter un ensemble de modèles tout au long du livre, dans le cadre d'exercices de fin de chapitre ainsi que dans les chapitres VI et VII qui sont spécifiquement consacrés à cette question. Nous espérons que ce choix permettra de familiariser le lecteur avec ces modèles et d'illustrer la façon dont les résultats de la théorie des équations différentielles peuvent s'appliquer dans des contextes variés et significatifs.

Les paragraphes qui suivent décrivent, à titre d'exemples introductifs, trois modèles formulés sous forme d'équations ou de systèmes différentiels. Le premier, modélisant un circuit RLC en électricité, correspond au cas linéaire. Les deux suivants, le pendule pesant en mécanique et le modèle logistique en dynamique des populations, sont en revanche non linéaires.

Modèle RLC

Le modèle RLC représente un circuit électrique composé de trois éléments en série : une résistance dont la valeur, mesurée en ohms (Ω) est notée R , une inductance dont la valeur, mesurée en henrys (H), est notée L , et un condensateur, dont la capacité, mesurée en farads (F), est notée C (ces unités sont celles du système international). Ce modèle est couramment utilisé pour analyser le comportement des circuits électriques dans le domaine du temps. Nous considérons l'exemple dans lequel le condensateur porte une charge initiale Q_0 , exprimée en coulombs (C), et le circuit est fermé au temps $t = 0$. L'enjeu du modèle est de donner des équations permettant de calculer, pour un temps $t \in [0, +\infty[$ exprimé en secondes (s), l'intensité du courant $I(t)$ exprimée en ampères (A). Chacun des trois éléments (résistance, inductance, condensateur) constitue un dipôle pour lequel la physique propose une loi de comportement, reliant les fonctions $I(t)$ et la tension aux bornes du dipôle. On définit les points 1, 2 et 3 comme sur le circuit ci-dessous.



Comme les éléments sont en série, l'intensité du courant $I(t)$ est identique dans tous les points du circuit.

La loi d'Ohm décrit la relation entre la tension $V_2(t) - V_1(t)$ aux bornes de la résistance située entre les points 1 et 2 et l'intensité du courant $I(t)$:

$$V_2(t) - V_1(t) = RI(t). \quad (1)$$

La tension $V_3(t) - V_2(t)$ aux bornes de l'inductance située entre les points 2 et 3 est donnée par la formule :

$$V_3(t) - V_2(t) = LI'(t). \quad (2)$$

La relation entre la tension $V_1(t) - V_3(t)$ aux bornes du condensateur et sa charge $Q(t)$ est donnée par :

$$V_1(t) - V_3(t) = \frac{1}{C}Q(t). \quad (3)$$

Enfin, la variation de la charge du condensateur est liée à l'intensité du courant par la relation $I(t) = Q'(t)$. Les deux équations du modèle RLC sont alors données par les relations $V_2(t) - V_1(t) + V_3(t) - V_2(t) + V_1(t) - V_3(t) = 0$ et $I(t) = Q'(t)$, ce qui aboutit au système d'équations, dont les inconnues sont les fonctions du temps I et Q suivant :

$$\begin{cases} I'(t) = -\frac{1}{L}(RI(t) + \frac{1}{C}Q(t)) \\ Q'(t) = I(t). \end{cases} \quad (4)$$

Ces équations sont considérées avec la condition initiale suivante : pour $t = 0$, le condensateur porte la charge $Q(0) = Q_0$, et l'intensité qui traverse le circuit est nulle, donc $I(0) = 0$.

Ce modèle est donc sous la forme $X'(t) = AX(t)$ pour tout $t \in [0, +\infty[$ avec $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ Q_0 \end{pmatrix}$, en posant $X(t) = \begin{pmatrix} I(t) \\ Q(t) \end{pmatrix}$ et

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'un système différentiel linéaire homogène d'ordre 1, de taille 2×2 . Nous verrons au chapitre II comment résoudre ce problème à partir de l'étude des propriétés spectrales de la matrice A .

Notons que ce système est exprimé aussi bien au moyen d'une unique équation différentielle, dite du second ordre, dont l'unique inconnue est la fonction Q :

$$LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = 0, \quad (5)$$

avec les conditions initiales $Q(0) = Q_0$ et $Q'(0) = 0$. Nous voyons ainsi que le même problème peut être exprimé sous deux formes différentes, et nous verrons dans le cours que ces formes sont équivalentes.

Pendule pesant

Le pendule pesant est un système mécanique classique qui illustre des principes fondamentaux de la mécanique newtonienne. On considère une masse ponctuelle m attachée à une tige ou un fil inextensible de longueur L , suspendue dans un champ gravitationnel uniforme $\vec{g}$. En négligeant les frottements et les forces dissipatives, l'équation décrivant la dynamique du pendule peut être obtenue à partir de la seconde loi de Newton.

La seconde loi de Newton s'écrit :

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (6)$$

où $\vec{F}$ est la somme des forces appliquées sur la masse, et $\vec{a}$ est l'accélération.

Dans le cas du pendule pesant, deux forces agissent sur la masse :

- La force gravitationnelle $\vec{F}_g = m\vec{g}$, dirigée verticalement vers le bas.
- La tension du fil $\vec{T}$, qui agit le long de la direction du fil et ne contribue pas directement au mouvement angulaire.

Pour décrire le mouvement angulaire du pendule, on choisit un repère polaire avec l'angle θ mesurant la déviation par rapport à la verticale.

