Références sciences

Problèmes généraux de physique

avec rappels de cours, corrigés et formulaire de mathématiques

2e édition

Gianni Pascoli

ellipses

Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-103153
Dépôt légal : mai 2025
©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Note introductive

Le présent ouvrage réunit une sélection de problèmes corrigés couvrant la majeure partie − les fondamentaux − du programme de licence de physique. Il est divisé en huit chapitres : dynamique des solides, vibrations-ondes-élasticité, mécanique analytique, mécanique des fluides, électromagnétisme, mécanique quantique, physique statistique et relativité. On ne peut qu'insister sur le fait qu'un tel découpage est, somme toute, plutôt arbitraire surtout si l'on conçoit, en tout dernier lieu, la physique comme un unique grand corps de doctrine (que l'on songe notamment au fort couplage entre la physique statistique et la mécanique quantique). La division, que nous avons retenue ici, correspond à la vision traditionnelle de l'enseignement de la physique tel qu'il est dispensé depuis longtemps − et actuellement − aux étudiants dès leur entrée à l'Université. Précisons également que la liste des thèmes que nous avons choisi de présenter n'est évidemment pas exhaustive, quoique les sujets traités soient très diversifiés. Les problèmes proposés ciblent essentiellement la troisième année de licence, année faisant charnière avec le master, passage décisif où l'étudiant choisit sa spécialité. En ce sens, ce recueil pourra encore être utile aux étudiants en tout début de master. Il pourra en outre être consulté avec profit par les étudiants de sciences physiques se destinant plus particulièrement à l'enseignement (CAPES et agrégation). Chaque chapitre est précédé d'un résumé, contenant l'essentiel du cours, que l'étudiant se devra de lire au préalable. Les techniques calculatoires les plus courantes sont aussi regroupées dans un formulaire de mathématiques. Un index permet enfin au lecteur d'identifier plus facilement les mots-clés qui interviennent dans l'ouvrage.

Table des matières

1 Dynamique des solides **9**
- 1.1 Rappels de cours . . . 9
  - 1.1.1 **Formules de changement de référentiel** . . . 9
  - 1.1.2 **Cinétique** . . . 11
  - 1.1.3 **Théorème du barycentre** . . . 12
  - 1.1.4 **Théorème du moment cinétique** . . . 13
  - 1.1.5 **Théorèmes de König** . . . 13
  - 1.1.6 **Tenseur d'inertie** . . . 13
  - 1.1.7 **Théorème de Huygens** . . . 14
- 1.2 Énoncés des problèmes . . . 15
- 1.3 Corrigés des problèmes . . . 22

2 Vibrations-Ondes-Élasticité **39**
- 2.1 Rappels de cours . . . 39
  - 2.1.1 **Vibrations** . . . 39
  - 2.1.2 **Ondes** . . . 39
  - 2.1.3 **Élasticité linéaire** . . . 41
- 2.2 Énoncés des problèmes . . . 46
- 2.3 Corrigés des problèmes . . . 57

3 Mécanique analytique **87**
- 3.1 Rappels de cours . . . 87
  - 3.1.1 **Contraintes** . . . 87
  - 3.1.2 **Principe des travaux virtuels** . . . 88
  - 3.1.3 **Formalisme lagrangien** . . . 89
  - 3.1.4 **Formalisme hamiltonien** . . . 90
  - 3.1.5 **Transformation canonique** . . . 91
- 3.2 Énoncés des problèmes . . . 94
- 3.3 Corrigés des problèmes . . . 105

4 Mécanique des fluides **129**
4.1 Rappels de cours 129
4.1.1 **Fluides visqueux newtoniens** 129
4.1.2 **Équation de continuité** 131
4.1.3 **Équation de la dynamique** 132
4.2 Énoncés des problèmes 134
4.3 Corrigés des problèmes 147

5 Électromagnétisme **177**
5.1 Rappels de cours 177
5.1.1 **Équations de Maxwell microscopiques** 177
5.1.2 **Énergie du champ électromagnétique** 179
5.1.3 **Ondes monochromatiques** 180
5.1.4 **Équations de Maxwell macroscopiques** 180
5.1.5 **Relations constitutives (milieux linéaires)** 182
5.2 Énoncés des problèmes 184
5.3 Corrigés des problèmes 208

6 Mécanique quantique **259**
6.1 Rappels de cours 259
6.1.1 **Les postulats** 259
6.1.2 **Les descriptions de la mécanique quantique** . . . 266
6.1.3 **Seconde quantification** 270
6.1.4 **Relations utiles** 274
6.1.5 **Perturbations indépendantes du temps** 277
6.1.6 **Perturbations dépendantes du temps** 279
6.1.7 **Méthodes non-perturbatives** 280
6.2 Énoncés des problèmes 282
6.3 Corrigés des problèmes 328

7 Physique statistique **421**
7.1 Rappels de cours 421
7.1.1 **Espace des phases** 421
7.1.2 **Ensemble canonique** 423
7.1.3 **Ensemble grand canonique** 426
7.1.4 **Équation de Boltzmann** 429
7.2 Énoncés des problèmes 436
7.3 Corrigés des problèmes 454

8 Relativité **499**
8.1 Rappels de cours 499
8.1.1 **Transformation de Lorentz** 499
8.1.2 **Mécanique relativiste** 506
8.1.3 **Éléments de relativité générale** 507
8.2 Énoncés des problèmes 509
8.3 Corrigés des problèmes 532

Formulaire de mathématiques **585**

Bibliographie **636**

Index **640**

Chapitre 1

Dynamique des solides

1.1 Rappels de cours

1.1.1 Formules de changement de référentiel. Cinématique

Soit un réseau d'observateurs immobiles les uns par rapport aux autres. On suppose que chacun de ces observateurs est muni d'une règle rigide, de longueur invariable, et d'une horloge débitant un temps uniforme. Les règles ont même longueur (par ex.1 mètre) et les horloges sont synchronisées entre elles. Par définition, un tel réseau constitue un **référentiel**. Afin de concrétiser un référentiel, on lui associe un repère formé de trois axes, en général orthogonaux (mais pas forcément), d'origine commune O, soit Ox, Oy et Oz. Chacun de ces axes est orienté par un vecteur unitaire $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$. La **base** (supposée directe) formée par ce trièdre de vecteurs auquel on associe l'origine O constitue le **repère** $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. L'origine O étant arbitraire, ainsi que les orientations des vecteurs de base, il existe une infinité de repères distincts que l'on peut associer à un référentiel donné. On choisit en général celui qui est le mieux adapté au système physique que l'on étudie. En mécanique newtonienne (mécanique classique), Le référentiel fondamental est le **référentiel de Copernic** dont un repère privilégié, d'origine confondue avec le barycentre du système solaire, est constitué de trois axes orthogonaux, chacun d'eux pointant vers une étoile dite fixe [1].

1. Le barycentre du système solaire décrit en réalité une orbite quasi-circulaire autour du centre de la Galaxie avec une vitesse de l'ordre de 250 km/s. Les étoiles se déplacent dans la Galaxie avec des vitesses similaires. En toute rigueur, le concept de fixité est vide en physique !

Considérons un tétraèdre formé du Soleil et de trois étoiles voisines (repère concrétisant le référentiel de Copernic). Les étoiles (dont le Soleil fait partie) sont séparées en moyenne d'une distance de l'ordre de quelques années lumière (on rappelle que l'année lumière est la

Le référentiel de Copernic est un référentiel étalon, mais son utilisation n'est pas très commode quand on désire mesurer les positions, vitesses et accélérations des particules composant un corps donné. Comme tout étalon, on en réalise des copies d'usage plus naturel (élimination des mouvements d'ensemble dans le cas d'un système de particules). On introduit ainsi une classe particulière de référentiels, tous équivalents entre eux, appelés **référentiels d'inertie** ou **référentiels galiléens**, en translation rectiligne et uniforme par rapport au référentiel de Copernic.

Soit deux référentiels $\mathcal{R}_g$ et $\mathcal{R}$. Le référentiel $\mathcal{R}_g$ sera appelé **référentiel absolu** (on peut le supposer galiléen d'où l'indice g) et le référentiel $\mathcal{R}$ **référentiel relatif** (en mouvement quelconque). On considère un point fixe O_g pris comme origine dans le référentiel $\mathcal{R}_g$. On prend de même dans $\mathcal{R}$ un point fixe O ainsi qu'un trièdre cartésien $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un point M quelconque a pour coordonnées x, y, z. Chacun des deux référentiels est muni d'une horloge pour mesurer le temps. Les deux horloges sont supposées synchronisées.

Soit $\vec{v}_a \equiv \vec{v}(M/\mathcal{R}_g)$ la vitesse de M mesurée dans $\mathcal{R}_g$ (**vitesse absolue**), $\vec{v}_r \equiv \vec{v}(M/\mathcal{R})$ la vitesse de M mesurée dans $\mathcal{R}$ (**vitesse relative**) et $\vec{v}_e$ la **vitesse d'entraînement** (vitesse d'un point P fixe dans $\mathcal{R}$ et coïncidant avec M à l'instant t).

Relations pour les vitesses

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

et

$$\vec{v}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{O_gO}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_g} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

distance parcourue par la lumière en une année, soit environ 10^{16} m). Elles sont d'autre part affectées de mouvements propres (mouvements relatifs des unes par rapport aux autres) ~ 10 km/s. Les étoiles formant les sommets du tétraèdre se déplacent donc de $3\ 10^7 \times 10^4 = 3\ 10^{11}$ m par an, soit un rapport angulaire (parallaxe) de l'ordre de 10^{-5} radian/an ou 2 secondes d'arc/an (l'étoile de Barnard a, quant à elle, un mouvement propre de 10 secondes d'arc/an). Le tétraèdre de référence va donc se déformer peu à peu au cours du temps. À noter que le **satellite astrométrique Hipparcos**, lancé par l'Agence Spatiale Européenne, et qui a fonctionné de 1989 à 1993, avait une résolution angulaire d'une milliseconde d'arc. Son successeur, le **satellite Gaia**, lancé en 19 décembre 2013, atteint quant à lui une résolution angulaire d'une dizaine de microsecondes d'arc, soit une précision équivalente à la mesure du diamètre d'un cheveu à 1000 *km* (pour les astres ayant une luminosité supérieure ou égale à $10^{-4}\times$ celle de l'étoile Véga (Alpha Lyrae), c'est-à-dire la limite des lunettes 7×50). La mission Gaia devrait se poursuivre jusqu'en fin 2025 et le traitement des données reçues jusqu'en 2030.

Le vecteur axial $\overrightarrow{\Omega}$ représente le **vecteur rotation** du référentiel $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_g$, soit $\overrightarrow{\Omega} \equiv \overrightarrow{\Omega}\ (\mathcal{R}/\mathcal{R}_g)$ (ce vecteur dépend en général du temps). Pour la vitesse relative, on a

$$\overrightarrow{v}_r = \dot{x}\,\overrightarrow{i} + \dot{y}\,\overrightarrow{j} + \dot{z}\,\overrightarrow{k}$$

(ici et dans la suite on désignera toujours par une lettre surmontée d'un point la dérivée par rapport au temps, soit $\frac{d}{dt} \equiv \dot{}$).

Soit $\overrightarrow{a}_a \equiv \overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}_g)$ l'accélération de M mesurée dans $\mathcal{R}_g$ (**accélération absolue**), $\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R})$ l'accélération de M mesurée dans $\mathcal{R}$ (**accélération relative**), $\overrightarrow{a}_e$ l'**accélération d'entraînement** (accélération d'un point P fixe dans $\mathcal{R}$ et confondu avec M à l'instant t) et $\overrightarrow{a}_c$ **l'accélération complémentaire** (**Coriolis**).

Relations pour les accélérations

$$\overrightarrow{a}_a = \overrightarrow{a}_r + \overrightarrow{a}_e + \overrightarrow{a}_c$$

$$\overrightarrow{a}_e = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_gO}}{dt^2}\right|_{\mathcal{R}_g} + \frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{\Omega} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM})$$

$$\overrightarrow{a}_c = 2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}_r$$

1.1.2 Cinétique

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel quelconque et O un point arbitraire (pas nécessairement fixe dans $\mathcal{R}$).

Éléments cinétiques associés à une particule d'indice i : **masse** m_i, **vitesse** $\overrightarrow{v}_i$ et **accélération** $\overrightarrow{a}_i$ mesurées dans $\mathcal{R}$, **quantité de mouvement** $\overrightarrow{p}_i = m_i\overrightarrow{v}_i$, **moment cinétique** rapporté à O $\overrightarrow{\sigma}_{iO} = m_i\overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{v}_i \equiv \overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{p}_i$, **énergie cinétique** $e_{ci} = \frac{1}{2}m_i v_i^2$

Équation de la dynamique
Soit $\overrightarrow{f}_i$ la force appliquée à la particule i

$$m_i \left.\frac{d\overrightarrow{v}_i}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{f}_i + \overrightarrow{f}_{i,inertie}$$

$$\overrightarrow{f}_{i,inertie} = -m_i\,(\overrightarrow{a}_{i,e} + \overrightarrow{a}_{i,c})$$

avec $\overrightarrow{a}_{i,e}$ accélération d'entraînement et $\overrightarrow{a}_{i,c}$ accélération de Coriolis de la particule i.

Système physique composé de N particules ($i = 1, ..., N$) : masse totale $\mathsf{M} = \sum_{i=1}^{N} m_i$, impulsion $\overrightarrow{P} = \mathsf{M}\overrightarrow{v}_G = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{p}_i$, moment cinétique $\overrightarrow{\Sigma}_O = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{\sigma}_{iO}$, énergie cinétique $T = \sum_{i=1}^{N} e_{ci} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$.

Barycentre [2] **(centre de gravité) G du système**

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OM}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

ou

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{GM}_i = \overrightarrow{0}$$

Référentiel barycentrique $\mathcal{R}_B$
On prend comme origine le barycentre G et un système d'axes qui restent constamment parallèles deux à deux aux axes d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$

$$\overrightarrow{\Omega}\ (\mathcal{R}_B/\mathcal{R}_g) \equiv \overrightarrow{0}$$

1.1.3 Théorème du barycentre

(mouvement du barycentre évalué dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$)

$$\mathsf{M}\frac{d\overrightarrow{v}_G}{dt}\bigg|_{\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{R} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{f}_i$$

où M désigne la masse totale du système, $\overrightarrow{R}$ est la résultante des forces appliquées (forces extérieures et forces de contact ou de liaison seules prises en compte, les forces intérieures s'annulant deux à deux dans la sommation).

2. Les termes de **centre de masse** ou de **centre d'inertie** semblent plus appropriés car ces derniers ne sont pas liés à la notion très particulière de poids (le terme de barycentre, issu de $\beta\alpha\rho\acute{\upsilon}\varsigma$: pesant, est consacré par l'usage depuis Archimède).

1.1.4 Théorème du moment cinétique

(mouvements du système évalués dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}_B$)

$$\left.\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Sigma}_G\right|_{\mathcal{R}_B} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_G \equiv \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{GM_i} \wedge \overrightarrow{f}_i$$

où le vecteur $\overrightarrow{\Sigma}_G$ représente le moment cinétique du système rapporté au barycentre G et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_G$ le moment résultant des forces appliquées (calculé par rapport à G).

1.1.5 Théorèmes de König

Moment cinétique et énergie cinétique d'un système (masse totale M) mesurés dans $\mathcal{R}_g$: $\overrightarrow{\Sigma}_O$ et $T/\mathcal{R}_g$, puis mesurés dans $\mathcal{R}_B$: $\overrightarrow{\Sigma}_G$ et $T/\mathcal{R}_B$, on a

$$\overrightarrow{\Sigma}_O = \overrightarrow{\Sigma}_G + \overrightarrow{OG} \wedge \mathsf{M}\overrightarrow{v}_G$$

$$T/\mathcal{R}_g = T/\mathcal{R}_B + \frac{1}{2}\mathsf{M}v_G^2$$

1.1.6 Tenseur d'inertie

Corps solide
Système physique où les distances entre les particules sont invariables. On lie généralement au corps solide un **référentiel tournant** $\mathcal{R}_S$. La rotation du corps perçue dans le référentiel barycentrique est définie par un vecteur rotation, unique, $\overrightarrow{\Omega}$ tel que

$$\overrightarrow{\Omega} \equiv \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_B)$$

Tenseur d'inertie

$$\overline{\overline{I}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

exprimé dans un repère quelconque (Gx, Gy, Gz) avec $I_{xx} = \int_V dm(y^2 + z^2)$ **moment d'inertie** par rapport à l'axe Gx, ... ; $I_{xy} = -\int_V dm\, xy$, ... **produits d'inertie**, V est le volume du corps.

Moment cinétique d'un solide

$$\overrightarrow{\Sigma}_G = \overline{\overline{I}}.\overrightarrow{\Omega}$$

Énergie cinétique de rotation d'un solide

$$T = \frac{1}{2}{}^T\overrightarrow{\Omega}.\overline{\overline{I}}.\overrightarrow{\Omega}$$

Vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega}\left|\begin{array}{l}\Omega_x\\ \Omega_y\\ \Omega_z\end{array}\right.$ vecteur transposé ${}^T\overrightarrow{\Omega}\,\big|\quad \Omega_x \quad \Omega_y \quad \Omega_z.$

On introduit un repère particulier, appelé **repère principal** $\left(G, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, lié à $\mathcal{R}_S$ (référentiel du corps tournant), dans lequel le tenseur d'inertie est diagonal, soit

$$\overline{\overline{I}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Exemples : boule homogène (rayon R) : $A = B = C = \frac{2}{5}\mathsf{M}R^2$; cylindre homogène (rayon R et hauteur H) : $A = B = \frac{1}{12}\mathsf{M}\left(3R^2 + H^2\right)$, $C = \frac{1}{2}\mathsf{M}R^2$; tige homogène de longueur L : $A = B = 0$, $C = \frac{1}{12}\mathsf{M}L^2$ (M désigne dans chacun de ces exemples la masse totale du corps).
On pose usuellement

$$\overrightarrow{\Omega} = p\,\overrightarrow{i} + q\,\overrightarrow{j} + r\,\overrightarrow{k}$$

ce qui donne

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

1.1.7 Théorème de Huygens

Soit $z'z$ un axe quelconque passant par le barycentre G et $u'u$ un axe parallèle à $z'z$ et distant de Δ, on a

$$I_{u'u} = I_{z'z} + \mathsf{M}\Delta^2$$

1.2 Énoncés des problèmes

Problème 1 : cylindre roulant sur un plan incliné mobile

Un cylindre homogène, de rayon r et de masse m, roule sans glisser sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. L'angle de rotation du cylindre sera dénoté par θ (origine des angles arbitraire) et l'abscisse de son barycentre G le long du plan incliné sera désignée par x. Le plan incliné est la face hypoténuse d'un prime rectangulaire mobile, de masse M, qui glisse sans frottement sur une table horizontale fixe.

1/ Écrire la condition de non-glissement du cylindre sur le plan.

2/ Soit $\mathcal{R}_g$ un référentiel galiléen (repère associé O, X, Y) et $\mathcal{R}$ le référentiel du prisme. Calculer l'énergie cinétique du cylindre mesurée dans $\mathcal{R}_g$.

3/ Établir l'expression du lagrangien du système $cylindre + prisme$ soumis à un champ de pesanteur vertical et uniforme $\overrightarrow{g}$.

4/ En déduire les équations de la dynamique. Déterminer les accélérations respectives du cylindre et du prisme.

Problème 2 : effet draw shot

On analyse ici le mouvement d'une boule homogène et indéformable, de masse M et de rayon a, se déplaçant sur un plan horizontal.

1/ Rappeler sans démonstration le théorème du centre de masse et le théorème du moment cinétique. On fera intervenir le poids $\overrightarrow{P}$ (champ de pesanteur uniforme $\overrightarrow{g}$) et la réaction du plan $\overrightarrow{R}$. On admet, en outre, l'existence d'une force $\overrightarrow{F}$, localisée au point Q situé à la périphérie de la boule (fig. 1).

2/ Lorsque la force $\overrightarrow{F}$ en question n'agit que sur une durée très courte τ (comparée à un intervalle de temps caractéristique du mouvement ultérieur de la boule), la **percussion** $\overrightarrow{\Delta p}$ (agissant en Q) est définie par la relation suivante

$$\overrightarrow{\Delta p} = \int_{-\tau}^{0} dt\, \overrightarrow{F}$$

i/ Compléter la figure 1 avec toutes les données du problème. On décomposera la réaction du plan $\overrightarrow{R}$ en ses composantes horizontale $\overrightarrow{T}$ et verticale $\overrightarrow{N}$.

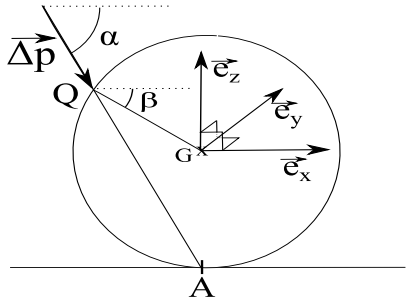

Figure 1

ii/ Écrire les conditions initiales pour les deux équations précédentes.

3/ Intégrer les deux équations établies à la question 1/ en admettant que le mouvement est horizontal et rectiligne suivant l'axe Ox. La première phase du mouvement s'effectuant avec glissement, on utilisera la **relation de Coulomb**, soit $\left|\overrightarrow{T}\right| = fN$, f étant le coefficient de frottement.

4/ Discuter les différentes phases possibles du mouvement.

Problème 3 : équations d'Euler et polhodie

1/ Soit $\mathcal{R}$ un référentiel quelconque. La vitesse d'une particule M, de masse m, évaluée dans ce référentiel est $\overrightarrow{v}$. Rappeler l'expression de son moment cinétique $\overrightarrow{\sigma}_O$ par rapport à une origine arbitraire, non nécessairement fixe O.

2/ On s'intéresse au cas d'un système composé de N particules ($M_{i=1,\ 2,\ldots,N}$, masses m_i, vitesses $\overrightarrow{v}_i$). Calculer la dérivée du moment cinétique total du système, soit $\overrightarrow{\Sigma}_O$, par rapport au temps. Montrer que si O est confondu avec le barycentre G du système, l'expression trouvée se simplifie.

3/ Rappeler la définition du référentiel barycentrique (que l'on dénotera $\mathcal{R}_B$). Établir, dans $\mathcal{R}_B$, la relation suivante

$$\left.\frac{d\overrightarrow{\Sigma}_G}{dt}\right|_{\mathcal{R}_B} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_G$$

où $\overrightarrow{\mathcal{M}}_G$ désigne le moment résultant des forces appliquées au système (on en rappellera également la définition).

4/ On suppose que le système précédent est assimilé à un corps solide (distance M_iM_j invariable pour tout couple de points M_i, M_j). Si l'on admet que ce corps tourne dans le référentiel $\mathcal{R}_B$, il existe dès lors un vecteur rotation unique $\overrightarrow{\Omega}$ qui peut dépendre du temps t mais est indépendant du point. On considère alors un second référentiel $\mathcal{R}_S$, dans lequel le corps est supposé fixe.

On associe à ce référentiel un repère cartésien $(G,\ x, y, z)$. Montrer que l'on peut dès lors écrire

$$\overrightarrow{\Sigma}_G = \overline{\overline{I}}.\overrightarrow{\Omega}$$

où $\overline{\overline{I}}$ désigne le tenseur d'inertie défini matriciellement par

$$\overline{\overline{I}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

avec $I_{xx} = \int_V dm(y^2+z^2)$ moment d'inertie par rapport à l'axe Gx, ... ; $I_{xy} = -\int_V dm\ xy$, ... produits d'inertie (V volume du corps). Le tenseur $\overline{\overline{I}}$ dépend-il du temps ?

5/ Dans le repère principal, d'axes Gx, Gy, Gz, de vecteurs unitaires respectifs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$, le tenseur d'inertie $\overline{\overline{I}}$ prend une forme diagonale (moments d'inertie A, B, C, les produits d'inertie sont quant à eux tous nuls). On dénotera par p, q, r les projections de $\overrightarrow{\Omega}$ sur les axes de ce repère. Établir que les équations permettant de calculer p, q et r sont

$$A\frac{dp}{dt} = (C-B)qr + \mathcal{M}_{Gx}$$

$$B\frac{dq}{dt} = (A-C)pr + \mathcal{M}_{Gy}$$

$$C\frac{dr}{dt} = (B-A)pq + \mathcal{M}_{Gz}$$

(**équations d'Euler-Poinsot**)

6/ On suppose désormais que $\overrightarrow{\mathcal{M}}_G = \overrightarrow{0}$ et que $r \gg p, q$. Discuter les solutions des équations d'Euler-Poinsot dans les deux cas suivants :

i/ $C > A$ et $C > B$ (ou $C < A$ et $C < B$). On examinera plus particulièrement le cas où $A = B$ (corps de révolution autour de l'axe des z).

ii/ $A < C < B$ (ou $B < C < A$)

Conclusion.

7/ Application à l'astronomie : pour la Terre, $A \simeq B\ \frac{C}{C-A} = 305, \Omega = 7.3\ 10^{-5}\ s^{-1}$. Calculer la période d'oscillation dans le cas i/.

Problème 4 : angles d'Euler. Mouvement gyroscopique de la toupie

1/ Rappeler, sans démonstration, l'expression du moment cinétique $\overrightarrow{\Sigma}_G$ d'un corps rigide, rapporté au barycentre G et exprimé dans le repère des axes principaux $\left(G, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

Le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega}$, est mesuré dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}_B$ et a pour composantes, dans le repère principal p, q, r. Montrer que l'énergie cinétique du corps peut s'écrire

$$T = \frac{1}{2} {}^T\overrightarrow{\Omega}.\overline{\overline{I}}.\overrightarrow{\Omega}$$

où ${}^T\overrightarrow{\Omega}$ est le vecteur transposé de $\overrightarrow{\Omega}$, $\overline{\overline{I}}$ est le tenseur d'inertie du corps.

2/ Exprimer les composantes de $\overrightarrow{\Omega}$, soit p, q, r, en fonction des angles d'Euler (dont on rappellera la définition).

3/ On désire étudier les mouvements d'une toupie symétrique. On introduit pour cela un second référentiel, $\mathcal{R}_g$ supposé galiléen, visualisé par le repère (O, X, Y, Z) (fig.1). La toupie (corps rigide de masse totale M) repose sur sa pointe, supposée fixe en O, et elle est plongée dans un champ de pesanteur uniforme $\overrightarrow{g}$ dirigé suivant l'axe vertical OZ. Établir que la toupie est dès lors soumise à un potentiel énergétique $V \equiv V(\theta)$. On posera $OG = \Delta$.

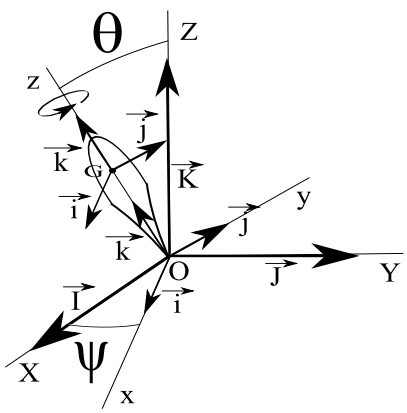

Figure 1

4/

i/ En déduire les équations de la dynamique régissant les mouvements de la toupie.

Suggestion : on utilisera le formalisme lagrangien.

ii/ On admet que θ est constant. Montrer que l'équation en θ possède deux racines en $\dot{\psi}$ (auxquelles correspondent deux régimes de précession). Établir que r considéré comme une fonction de $\dot{\psi}$ possède un minimum $r_{\min}$.

Dans le cas où $r \gg r_{\min}$, déterminer alors les valeurs de ces racines (modes de précession lent et rapide).

iii/ On relaxe la contrainte exprimant que θ est constant. Écrire l'expression de l'énergie totale E de la toupie. Montrer que θ est nécessairement compris entre deux valeurs limites θ_1 et θ_2.

5/ Effectuer le bilan des forces intervenant dans le problème.

Problème 5 : précession et nutation terrestres

Nous examinons dans ce problème l'action d'un astre, supposé ponctuel (représenté par le point A) et de masse M (Soleil ou Lune), sur le bourrelet équatorial terrestre, supposé circulaire.

1/ Écrire le théorème du moment cinétique appliqué à la Terre dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}_B$ (la force par unité de masse appliquée au point courant M sera dénotée par $\overrightarrow{f}$).

2/ la rotation de la Terre exprimée dans $\mathcal{R}_B$ (vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega}$) peut se décomposer assez naturellement de la façon suivante : la rotation propre de la Terre, que l'on notera Ω (attention, ici et dans la suite, Ω ne désigne pas le module du vecteur $\overrightarrow{\Omega}$) autour de son plus petit axe d'inertie principal (axe des pôles Gz), une **précession** d'angle ψ autour de l'axe vertical GZ, normal au plan de l'**écliptique** (GX, GY) (plan dans lequel circulent les planètes) et un balancement (**nutation**) autour de Gx (droite d'intersection bourrelet — plan de l'écliptique (sur la figure 1 seul le bourrelet équatorial est représenté). On projette le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega}$ sur les axes du repère principal lié à la Terre $(Gx,\ Gy,\ Gz)$, écrire, dans ce cas les expressions des composantes p, q, r en fonction de Ω, $\dot{\psi} \equiv \frac{d\psi}{dt}$ et $\dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt}$.

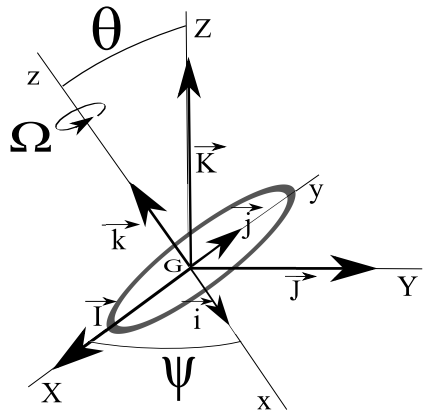

Figure 1

3/ On admet que Ω est constant ($\gg \dot{\psi}, \dot{\theta}$) et que les variations de $\dot{\psi}$ et $\dot{\theta}$ sont très faibles, de telle sorte que l'on pourra négliger les produits $\dot{\psi}^2$,

$\dot{\theta}^2$, $\dot{\psi}\dot{\theta}$ ainsi que $\ddot{\psi}$ et $\ddot{\theta}$ dans les calculs. On supposera, en outre, que ψ est voisin de zéro (convention somme toute arbitraire mais qui allège les calculs) et que θ est proche d'une valeur de référence ϵ, angle d'inclinaison de l'axe des pôles terrestres par rapport à la normale au plan de l'écliptique. Calculer explicitement $\frac{d\vec{\Sigma}}{dt}\Big|_{\mathcal{R}_B}$.

4/ On assimilera la Terre à une sphère homogène, de masse m et de rayon c, complétée par un tore circulaire mince (point courant P), de masse totale μ, concentré à l'équateur, de rayon Δ, solidaire de la sphère et schématisant le renflement équatorial terrestre.

La trajectoire de l'astre A sera supposée circulaire, de rayon D (longitude écliptique λ, mesurée par rapport à la direction fixe GX, et latitude écliptique β ou hauteur, mesurée par rapport au plan (GX, GY)). Son inclinaison par rapport au plan de l'écliptique sera désignée par i (supposé petit et tel que $sini \sim i$). L'intersection de la trajectoire avec ce plan se fait en deux points opposés par rapport à l'origine G, appelés **nœud ascendant** (l'astre passe au-dessus du plan de l'écliptique) et nœud descendant (l'astre passe au-dessous du plan de l'écliptique). La longitude du noeud ascendant sera dénotée par ω.

Rappels de trigonométrie sphérique : soit trois grands cercles dessinés sur une sphère de rayon unité. Leurs intersections mutuelles découpent un triangle sphérique de sommets A, B, C. Dénotons par $\hat{A}$ l'angle au sommet en A et a la longueur du côté opposé. On procède de façon analogue pour les autres sommets. On montre que (fig. 2)

$$\frac{sina}{sin\hat{A}} = \frac{sinb}{sin\hat{B}} = \frac{sinc}{sin\hat{C}}$$

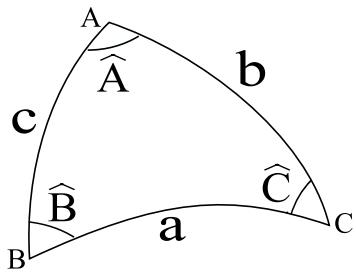

Figure 2

Établir l'expression du couple $\int dm\overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{f}$. On ne conservera que les termes du premier ordre en $\frac{\Delta}{D}$ dans les développements limités que l'on sera amené à faire.

5/ Montrer que si l'on effectue la moyenne temporelle sur une révolution de l'astre, on obtient les expressions suivantes ($\mathcal{G}$ désigne ici la constante de gravitation et C le moment d'inertie de la Terre par rapport à l'axe des pôles Gz).

$$\left\langle \dot{\psi} \right\rangle = -\frac{3}{4}\frac{\mathcal{GM}}{D^3}\mu\Delta^2 \ \frac{cos\epsilon}{C\Omega} + \frac{3}{4}\frac{\mathcal{GM}}{D^3}\mu\Delta^2 \frac{i\cos 2\epsilon \cos\omega}{sin\epsilon \ C\Omega}$$
$$\left\langle \dot{\theta} \right\rangle = -\frac{3}{4}\frac{\mathcal{GM}}{D^3}\mu\Delta^2 \frac{i \ cos\epsilon \ sin\omega}{C\Omega}$$

6/ Dans les deux relations établies à la question précédente, le moment d'inertie du tore mince par rapport à l'axe des pôles terrestres apparaît naturellement, soit $\mu\Delta^2$. Afin de coller un peu plus à la réalité, Il est maintenant légitime d'identifier cette quantité avec le moment d'inertie, par rapport à ce même axe, du bourrelet équatorial terrestre. En dernier lieu, on admettra que le renflement est fabriqué à partir d'un ellipsoïde homogène, de masse m, de demi-petit axe c et de demi-grand axe a (modèle de la Terre aplatie) auquel on soustrait une sphère homogène de rayon c et de même masse m (fig. 3). On rappelle que les moments d'inertie d'un ellipsoïde de révolution aplati sont donnés par les relations $A = \frac{1}{5}m(a^2 + c^2)$, $C = \frac{2}{5}ma^2$.

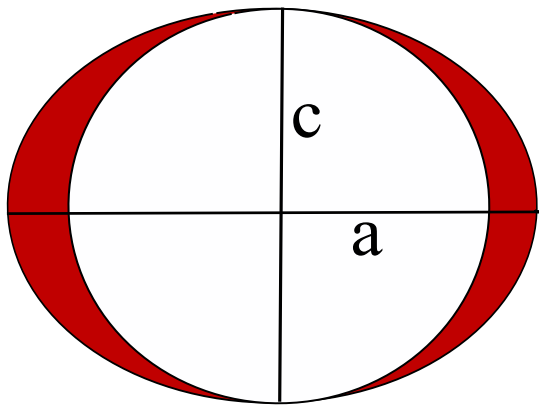

Figure 3 Bourrelet équatorial

i/ Ré-exprimer les relations $\left\langle \dot{\psi} \right\rangle$ et $\left\langle \dot{\theta} \right\rangle$ en fonction du rapport $\frac{C-A}{C}$.

ii/ Intégrer les équations correspondantes par rapport au temps. On admet que la longitude du nœud ascendant de l'astre, N, varie suivant la loi $\omega = -n_N(t - t_0)$ où n_N représente le moyen mouvement du nœud et t_0 est une constante arbitraire.

7/ *A.N.* $\frac{C-A}{C} = 0.0033$, $\epsilon = 23.44°$, $\Omega = 7.3\ 10^{-5}\ s^{-1}$.

Pour le Soleil $\mathcal{GM} = 1.3\ 10^{20} \frac{m^3}{s^2}$, $D = 1.49\ 10^{11}\ m$, $\omega \equiv 0$.

Pour la Lune $\mathcal{GM} = 4.90\ 10^{12} \frac{m^3}{s^2}$, $D = 3.83\ 10^8\ m$, $i = 5.16°$, $\omega = -n_N(t - t_0)$ avec $n_N = \frac{2\pi}{18.6\ (ans)}$.

1.3 Corrigés des problèmes

Problème 1 : cylindre roulant sur un plan incliné mobile

1/ L'abscisse x et l'angle θ sont liés par la contrainte holonomique (condition de non-glissement)

$$f\,(x,\theta\,) = x - r\theta \equiv 0$$

2/ Soit $\mathcal{R}_g$ un référentiel galiléen (repère associé O, X, Y) et $\mathcal{R}$ le référentiel du prisme. La vitesse du prisme évaluée dans $\mathcal{R}_g$ est $\dot{X}$. La vitesse horizontale du barycentre du cylindre dans ce même référentiel est

$$\dot{x}\ cos\alpha\ \ (vitesse\ relative/\mathcal{R})$$

$$+\dot{X}\ (vitesse\ d'entraînement\ \mathcal{R}/\mathcal{R}_g)$$

L'énergie cinétique du cylindre mesurée dans $\mathcal{R}_g$ est alors

$$\frac{1}{2}m\left[(\dot{x}\ cos\alpha + \dot{X})^2 + (\dot{x}\ sin\alpha)^2\right] + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

(d'après le second théorème de König) où I désigne le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe de rotation.

3/ Le lagrangien du système *cylindre + prisme* se déduit aisément de ce qui précède (cf. chapitre 3, mécanique analytique). On a

$$L\left[x,\ \dot{x}, \dot{\theta}, \dot{X}\right] = \frac{1}{2}m\left[(\dot{x}\ cos\alpha + \dot{X})^2 + (\dot{x}\ sin\alpha)^2\right]$$

$$+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{X}^2 - mgx\ sin\alpha$$

4/ Les équations de Lagrange avec contrainte sont

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} - \lambda\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} - \frac{\partial L}{\partial X} - \lambda\frac{\partial f}{\partial X} = 0$$

où l'on a introduit le multiplicateur de Lagrange λ (cf. formulaire de mathématiques, VII).

Il vient ainsi

$$m\ddot{x} \ + m\ddot{X}cos\alpha - mg\ sin\alpha - \lambda = 0$$

$$I\ddot{\theta} + \lambda r = 0$$

$$m\ddot{x}\ cos\alpha + (m+M)\,\ddot{X} = 0 \quad (*)$$

d'où l'on tire

$$\ddot{x} = \frac{g\ sin\alpha}{1+\frac{I}{mr^2}-\frac{m\ cos^2\alpha}{(m+M)}} \quad \ddot{X} = -\frac{m\ cos\alpha}{(m+M)}\ddot{x} \quad \lambda = -\frac{I\ddot{x}}{r^2}$$

Remarque : la relation (*) exprime la conservation de la composante horizontale de la quantité de mouvement du système *cylindre + prisme* (le système n'est soumis qu'à des forces extérieures verticales : poids et réaction de la table horizontale). Précisons encore que ce problème peut être traité à l'aide des lois de Newton en introduisant explicitement une force d'adhérence au point de contact cylindre-prisme (non-glissement).

Problème 2 : effet draw shot

1/ À l'instant $t > 0^+$, la boule est uniquement soumise aux forces extérieures suivantes : le poids $\overrightarrow{P}$ et la réaction du plan horizontal $\overrightarrow{R}$ appliquée au point de contact A (la percussion n'agit que pendant un très court intervalle de temps lorsque $t \in [-\tau,\ 0]$). On peut dès lors écrire les équations

-Théorème du centre de masse (par rapport à un référentiel galiléen) :

$$\mathsf{M}\frac{d\overrightarrow{v_g}}{dt} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}$$

où M est la masse de la boule et $\overrightarrow{v_g}$ la vitesse de son centre de masse G.

-Théorème du moment cinétique (exprimé dans le référentiel barycentrique)

$$I\frac{d\overrightarrow{\omega}}{dt} = \overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{R}$$

où I désigne le moment d'inertie de la boule par rapport à un axe passant par son centre (on rappelle que pour une boule homogène de masse M et de rayon a : $I = \frac{2}{5}\mathsf{M}a^2$), $\overrightarrow{\omega}$ représente le vecteur rotation.

2/

i/ Suivant les données du problème, on décompose la réaction $\overrightarrow{R}$ appliquée au point de contact A en une force tangentielle $\overrightarrow{T}$ et une force normale $\overrightarrow{N}$. On construit ainsi la figure complétée

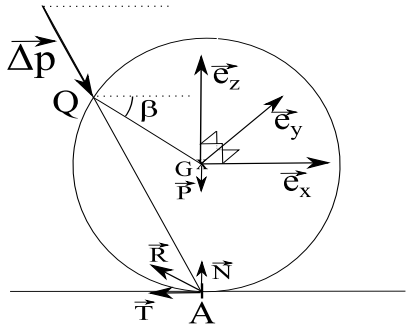

Figure 2

ii/ À l'instant initial ($t = 0$) on aura : $\mathsf{M}v_g(0) = \Delta p\ cos\alpha$ et $I\omega(0) = \Delta p\ asin(\alpha - \beta)$. On remarque que $\omega(0)$ est positif si $\alpha > \beta$ et négatif dans le cas contraire, comme on peut d'ailleurs intuitivement le visualiser en partant de la figure 2.

3/ On admet que le mouvement est horizontal et rectiligne suivant l'axe Ox. En projetant dans le repère $(G, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, on écrira

$$\overrightarrow{v_g} = v_g\ \overrightarrow{e_x}$$
$$\overrightarrow{\omega} = \omega\ \overrightarrow{e_y}$$
$$\overrightarrow{T} = T\ \overrightarrow{e_x},\ \overrightarrow{N} = N\overrightarrow{e_z} \text{ et } \overrightarrow{P} = -Mg\ \overrightarrow{e_z}$$

Le mouvement étant horizontal, on a

$$N - Mg = 0$$

On en déduit aussitôt que $N\ > 0$.
Lorsqu'il y a glissement, on peut utiliser la **loi de Coulomb** (issue de l'expérimentation), soit $\left|\overrightarrow{T}\right| = fN$, f étant le coefficient de frottement.
Pour l'équation du centre de masse, on trouve ainsi

$$\mathsf{M}\frac{dv_g}{dt} = -fN$$

qui s'intègre aisément en

$$v_g(t) = v_g(0) - fgt$$

L'équation du moment cinétique[3] devient, quant à elle

$$I\frac{d\omega}{dt} = afN$$

3. La force de frottement $\overrightarrow{T}$ est localisée en A sur la figure 2.

dont la solution est

$$a\omega\,(t) = a\omega\,(0) + \frac{5}{2} fg\ t$$

La vitesse du centre de masse v_g s'annule lorsque $t = t_c$ tel que

$$t_c = \frac{\pi}{Mgf} cos\alpha$$

La rotation angulaire s'annule lorsque $t = t_a$ tel que

$$t_a = \frac{\pi}{Mgf} sin(\alpha - \beta)$$

Enfin la condition de non-glissement $v_g - R\omega = 0$ est réalisée lorsque $t = t_{ng}$ tel que

$$t_{ng} = \frac{2}{7} \frac{\pi}{Mgf} \left[cos\alpha + \frac{5}{2} sin(\alpha - \beta) \right]$$

Pour une percussion horizontale, soit $\alpha = 0$, on peut remarquer que $t_{ng} = 0$ lorsque $sin\beta = \frac{2}{5}$. Dans ce cas la boule roule sans glisser dès l'instant initial.

Si $\alpha < \beta$, la rotation ne s'annule jamais. Si $\alpha = \beta$, la rotation est toujours nulle (boule frappée au centre). Enfin si $\alpha > \beta$ et tel que $tan\alpha > \frac{1+sin\beta}{cos\beta}$, la vitesse du centre de masse, d'abord positive, s'annule, puis la boule repart en arrière (effet draw shot).

Problème 3 : équations d'Euler et polhodie

1/ Soit $\mathcal{R}$ un référentiel quelconque. La vitesse d'une particule M, de masse m, évaluée dans ce référentiel est $\overrightarrow{v}$. Son moment cinétique par rapport à un point O arbitraire, non nécessairement fixe dans $\mathcal{R}$ est

$$\overrightarrow{\sigma}_O = m\ \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v}$$

Pour un système composé de N particules (masses m_i, vitesses $\overrightarrow{v_i}$), on a

$$\overrightarrow{\Sigma}_O = \sum_{i=1}^{N} m_i\ \overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{v_i}$$

2/ Il faut préciser dans quel référentiel on calcule cette dérivée. L'énoncé ne le précise pas, mais on peut supposer que c'est par rapport à $\mathcal{R}$. On a donc

$$\frac{d\overrightarrow{\Sigma}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} \wedge (m_i \overrightarrow{v_i}) + \overrightarrow{OM_i} \wedge (m_i \frac{d\overrightarrow{v_i}}{dt})$$

Le point O n'est pas nécessairement fixe dans $\mathcal{R}$ et donc

$$\frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} = \overrightarrow{v_i} - \overrightarrow{v}_O$$

Finalement

$$\frac{d\overrightarrow{\Sigma}_O}{dt} = -\overrightarrow{v}_O \wedge \overrightarrow{P} + \overrightarrow{OM_i} \wedge (m_i \frac{d\overrightarrow{v_i}}{dt}) \qquad (*)$$

où $\overrightarrow{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{v_i}$ désigne la quantité de mouvement totale du système.

3/ Le premier terme dans le second membre de l'expression (*) disparaît car $\overrightarrow{v}_G \wedge \overrightarrow{P} = \overrightarrow{0}$, étant donné que $\overrightarrow{P} = \mathsf{M}\overrightarrow{v}_G$ ($\mathsf{M} = \sum_{i=1}^{N} m_i$ masse totale du système). Il reste

$$\frac{d\overrightarrow{\Sigma}_G}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{GM_i} \wedge (m_i \frac{d\overrightarrow{v_i}}{dt})$$

4/ Les axes d'un repère lié au référentiel barycentrique $\mathcal{R}_B$ (d'origine commune le barycentre G) restent constamment deux à deux parallèles à ceux d'un repère lié à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ (le référentiel barycentrique est un référentiel en translation pure – mais pas forcément rectiligne, ni même uniforme car G peut avoir un mouvement quelconque dans $\mathcal{R}_g$!).
Dans le référentiel barycentrique, on a ($\overrightarrow{v_i} \equiv \overrightarrow{v}(M_i/\mathcal{R}_B)$)

$$\overrightarrow{\Sigma}_G = \sum_{i=1}^{N} m_i \, \overrightarrow{GM_i} \wedge \overrightarrow{v_i}$$

et l'on tire de la question 3/

$$\left.\frac{d\overrightarrow{\Sigma}_G}{dt}\right|_{\mathcal{R}_B} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{GM_i} \wedge (m_i \left.\frac{d\overrightarrow{v_i}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_B})$$

L'équation de la dynamique régissant le mouvement de la particule M_i dans $\mathcal{R}_B$ (la résultante des forces appliquées à M_i est $\overrightarrow{f}_i$) s'écrit

$$m_i \left.\frac{d\overrightarrow{v_i}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_B} = \overrightarrow{f}_i - m_i \left.\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}\right|_{\mathcal{R}_g}$$

(O est ici supposé fixe dans $\mathcal{R}_g$).

Il vient donc

$$\left.\frac{d\overrightarrow{\Sigma}_G}{dt}\right|_{\mathcal{R}_B} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{GM_i} \wedge \overrightarrow{f}_i \equiv \overrightarrow{\mathcal{M}}_G$$

5/ On a, par définition, dans $\mathcal{R}_B$

$$\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM_i}$$

et

$$\overrightarrow{\Sigma}_G = \sum_{i=1}^{N} m_i \, \overrightarrow{GM_i} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM_i}\right)$$

soit, en composantes

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{Gx} \\ \Sigma_{Gx} \\ \Sigma_{Gx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i \left(y_i^2 + z_i^2\right) & -\sum_i m_i x_i y_i & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}$$

(on peut aisément passer à la limite continue : $\sum_i m_i \ \dots \ \to \ \int_V dm \ \dots$, V représentant le volume du corps et $x_i \to x$, ...)
ou encore, sous forme compacte :

$$\overrightarrow{\Sigma}_G = \overline{\overline{I}}.\overrightarrow{\Omega}$$

Les quantités $x_i, y_i, \dots$ sont indépendantes du temps car le corps est fixe dans $\mathcal{R}_S$ et le repère cartésien $(G\ x, y, z)$ est lié à $\mathcal{R}_S$. Les composantes du tenseur $\overline{\overline{I}}$ sont donc indépendantes du temps, bien que leur écriture dépende évidemment du repère choisi.

5/ En choisissant adéquatement le repère (G, x, y, z) (repère principal), on peut toujours diagonaliser $\overline{\overline{I}}$ pour le ramener à la forme suivante

$$\overline{\overline{I}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{\Omega} = p\,\overrightarrow{i} + q\,\overrightarrow{j} + r\,\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{\Sigma}_G = Ap\,\overrightarrow{i} + Bq\,\overrightarrow{j} + Cr\,\overrightarrow{k}$$

6/ En dérivant, on obtient successivement

$$\left.\frac{d\overrightarrow{\Sigma}_G}{dt}\right|_{\mathcal{R}_S} = A\frac{dp}{dt}\overrightarrow{i} + ...$$

et

$$\left.\frac{d\overrightarrow{\Sigma}_G}{dt}\right|_{\mathcal{R}_B} = A\left(\frac{dp}{dt}\overrightarrow{i} + p\frac{d\overrightarrow{i}}{dt}\right) + ...$$

soit encore, compte tenu que $\left.\frac{d\overrightarrow{i}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_B} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{i}, \ldots$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{\Sigma}_G}{dt}\right|_{\mathcal{R}_B} = A\frac{dp}{dt}\overrightarrow{i} + ... + Ap\left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{i}\right) + ...$$

$$= \left.\frac{d\overrightarrow{\Sigma}_G}{dt}\right|_{\mathcal{R}_S} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{\Sigma}_G$$

Formons, à présent, le produit vectoriel $\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{\Sigma}_G$

$$\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{\Sigma}_G = \begin{vmatrix} p \\ q \\ r \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (C-B)qr \\ (A-C)pr \\ (B-A)pq \end{vmatrix}$$

On aboutit, en définitive, au système d'équations (non linéaires)

$$A\frac{dp}{dt} = (C-B)qr + \mathcal{M}_{Gx}$$

$$B\frac{dq}{dt} = (A-C)pr + \mathcal{M}_{Gy}$$

$$C\frac{dr}{dt} = (B-A)pq + \mathcal{M}_{Gz} \ (*)$$

7/ On peut négliger le produit pq dans l' équation (*). On obtient

$$C\frac{dr}{dt} \simeq 0$$

Soit $r = \Omega_0 = Cte$. En substituant dans les deux autres équations du système, il vient

$$A\frac{dp}{dt} = (C-B)\Omega_0 q$$

$$B\frac{dq}{dt} = (A - C)\,\Omega_0 p$$

équations que l'on peut aisément découpler, soit pour p

$$\frac{d^2p}{dt^2} + \frac{(C - A)\,(C - B)}{AB}\Omega_0^2 p = 0$$

et une équation très similaire pour q.

Cas i/ $C > A$ *et* $C > B$ (ou $C < A$ et $C < B$)
La solution est oscillante

$$p = ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}$$

avec

$$\omega = \sqrt{\frac{(C - A)\,(C - B)}{AB}}\Omega_0$$

et de même pour q.
Lorsque $A = B$ (corps de révolution autour de l'axe des z) les deux équations différentielles pour p et q trouvées plus haut peuvent aisément se ramener à l'équation suivante (plan complexe $\mathbb{C}$)

$$\frac{d\mathcal{W}}{dt} = -i\omega\mathcal{W}$$

où l'affixe $\mathcal{W} = p + iq \ \in \mathbb{C}$ et $\omega = \left(\frac{C}{A} - 1\right)\Omega_0$.
La transcription dans $\mathbb{R}^2$ (plan de base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$), représentation géométrique de $\mathbb{C}$, est que le point figuratif P, image de $\mathcal{W}$, parcourt un petit cercle autour de l'origine. Cette trajectoire de P est appelée **polhodie** (le terme polhodie est la traduction littérale de *trajectoire du pôle* en grec).
Posons, à présent, $\overrightarrow{\Omega}_1 = p\overrightarrow{i} + q\overrightarrow{j}$ ($\left\|\overrightarrow{\Omega}_1\right\| = |\mathcal{W}|$). Le vecteur $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{\Omega}_1 + \overrightarrow{\Omega}_0$ décrit quant à lui dans $\mathcal{R}_S$ un cône d'angle $\frac{\Omega_1}{\Omega_0}$ autour de la direction donnée par $\overrightarrow{k}$.

Cas ii/ $A < C < B$ (ou $B < C < A$)
La solution est non-oscillante

$$p = ae^{\alpha t} \ \left[+be^{-\alpha t}\right]$$

avec $\alpha = \sqrt{\frac{(A-C)(C-B)}{AB}}\Omega_0$ Le mouvement est instable, le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega}$ s'éloigne exponentiellement de l'axe Oz.

Conclusion : si le vecteur $\overrightarrow{\Omega}$ est voisin de l'axe de plus grand ou plus petit moment d'inertie, la rotation est stable ; elle est par contre instable si $\overrightarrow{\Omega}$ est voisin de l'axe de moment d'inertie médian.

7/ A.N. On donne pour la Terre $A \simeq B$, $\frac{C}{C-A} = 305$, $\Omega_0 = 7.3\ 10^{-5}\ s^{-1}$. On trouve ainsi que la période $T_{polh} = \frac{2\pi}{\omega}$ est égale à 305 jours (**Euler**, 1755). En fait la période réelle est un peu plus élevée, de l'ordre de 430 jours (**Chandler**, 1891). la différence s'explique par le fait que la Terre n'est pas un corps complètement rigide et qu'elle possède en réalité une partie douée d'élasticité (**Newcomb**, 1891). Cette partie ne contribue pas la polhodie car elle reste toujours parfaitement symétrique autour de l'axe instantané de rotation.

Problème 4 : angles d'Euler. Mouvement gyroscopique de la toupie

1/ On a (cf. rappels de cours)

$$\overrightarrow{\Sigma}_G = \overline{\overline{I}}.\overrightarrow{\Omega}$$

où $\overline{\overline{I}}$ désigne le tenseur d'inertie défini matriciellement (repère principal) par

$$\overline{\overline{I}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

et $\overrightarrow{\Omega} = p\overrightarrow{i} + q\overrightarrow{j} + r\overrightarrow{k}$ représente la rotation du corps mesurée dans le référentiel barycentrique.
L'énergie cinétique T du corps mesurée dans le référentiel barycentrique est, quant à elle

$$T = \frac{1}{2}\int d\tau \rho v^2$$

où ρ désigne la masse volumique qui dépend en général du point si le corps n'est pas homogène.
Le corps étant rigide, la vitesse de tout point M est $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}$, le vecteur $\overrightarrow{\Omega}$ pouvant éventuellement dépendre du temps. On a donc

$$T = \frac{1}{2}\int d\tau \rho (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM})^2$$

Cette expression peut encore être écrite sous la forme

$$T = \frac{1}{2}\int d\tau \rho \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}\right).\left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega}.\int d\tau\rho\ \overrightarrow{GM} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM})$$

On reconnaît l'expression du moment cinétique, soit

$$\overrightarrow{\Sigma}_G = \int d\tau\rho\ \overrightarrow{GM} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM})$$

d'où il résulte

$$T = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega}.\overrightarrow{\Sigma}_G$$

et finalement

$$T = \frac{1}{2}{}^T\overrightarrow{\Omega}.\overline{\overline{I}}.\overrightarrow{\Omega}$$

où ${}^T\overrightarrow{\Omega}$ est le vecteur transposé de $\overrightarrow{\Omega}$ ($\overrightarrow{\Omega}$ vecteur colonne $\rightarrow$ ${}^T\overrightarrow{\Omega}$ vecteur ligne). Plus explicitement

$$T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

2/ On a (cf. fig. 1 de l'énoncé, non reproduite ici)

$$p = \dot{\theta},\ q = \dot{\psi}\ sin\theta,\ r = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\ cos\theta$$

ce qui donne pour l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + B(\dot{\psi}\ sin\theta)^2 + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\ cos\theta)^2$$

3/ Le potentiel énergétique dV d'un élément de masse $dm = \rho d\tau$ situé en un point courant M et plongé dans un champ de pesanteur uniforme g est

$$dV = (\rho g d\tau)\, Z + Cte$$

Il convient d'exprimer Z en fonction de x, y, z. Écrivons que

$$X\overrightarrow{I} + Y\overrightarrow{J} + Z\overrightarrow{K} = (x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}) + \Delta\overrightarrow{k}$$

avec (cf. fig. 1 donnée dans l'énoncé)

$$\overrightarrow{i} = (cos\psi\overrightarrow{I} + sin\psi\overrightarrow{J})$$

$$\overrightarrow{j} = cos\theta(-sin\psi\overrightarrow{I} + cos\psi\overrightarrow{J}) + sin\theta\ \overrightarrow{K}$$

$$\overrightarrow{k} = sin\theta(sin\psi\,\overrightarrow{I} - cos\psi\,\overrightarrow{J}) + cos\theta\overrightarrow{K}$$

Par identification, on trouve ainsi

$$Z = (z + \Delta)cos\theta + ysin\theta$$

En intégrant, il vient

$$V(\theta) = g\int \rho d\tau\,[(z + \Delta)cos\theta + ysin\theta] + Cte$$

soit

$$V(\theta) = \mathsf{M}g\,[cos\theta\,(z_G + \Delta) + y_G sin\theta] + Cte = \mathsf{M}g\ \Delta cos\theta$$

en choisissant la constante égale à zéro et $z_G = 0$, $y_G = 0$.

4/

i/ Le lagrangien est $L = T - V$, soit

$$L = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + B(\dot{\psi}\ sin\theta)^2 + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\ cos\theta)^2 - \mathsf{M}g\ \Delta cos\theta$$

Équations en ψ et φ : les coordonnées ψ et φ sont cycliques ($\frac{\partial L}{\partial \psi} \equiv 0,\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} \equiv 0$). Il en résulte les deux intégrales premières du mouvement

$$C\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\ cos\theta\right) = \Sigma_{Gz} = Cte$$

$$B\ sin^2\theta\ \dot{\psi} + \Sigma_{Gz}cos\theta = \Sigma_{GZ} = Cte$$

Équation en θ :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

soit

$$A\ddot{\theta} - B\sin\theta cos\theta\dot{\psi}^2 + \Sigma_{Gz}sin\theta\dot{\psi} - \mathsf{M}g\ \Delta sin\theta = 0$$

ii/ Les valeurs demandées sont les racines de l'équation

$$Bcos\theta\ \dot{\psi}^2 - \Sigma_{Gz}\dot{\psi} + \mathsf{M}g\ \Delta = 0 \quad (*)$$

et l'on a

$$r = \frac{\mathsf{M}g\ \Delta + Bcos\theta\dot{\psi}^2}{C\dot{\psi}}$$

Si r est perçu comme une fonction de $\dot{\psi}$

$$r > r_{min} = 2\frac{\sqrt{B\mathsf{M}g\ \Delta cos\theta}}{C}$$

Lorsque $r \gg r_{min}$, les racines de l'équation (*) sont approximativement données par

$$\dot{\psi}\Big|_{lent} \simeq \frac{\mathsf{M}g\ \Delta}{Cr}$$

qui constitue la précession lente.

De même

$$\dot{\psi}\Big|_{rapide} \simeq \frac{Cr}{Bcos\theta} \quad \text{(précession rapide [4])}$$

iii/ L'énergie totale est

$$E = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{\left(\Sigma_{GZ} - \Sigma_{Gz}cos\theta\right)^2}{2Bsin^2\theta} + \frac{{\Sigma_{Gz}}^2}{2C} + \mathsf{M}g\ \Delta cos\theta$$

Posons $E^{'} = E - \frac{{\Sigma_{Gz}}^2}{2C}$ et $u = cos\theta$, il vient

$$\dot{u}^2 = f\left(u\right) = \frac{2B(E^{'} - \mathsf{M}g\ \Delta u)\left(1-u^2\right) - \left(\Sigma_{GZ} - \Sigma_{Gz}u\right)^2}{B^2}$$

La quantité $\dot{u}^2$ doit évidemment être positive ou nulle. Le numérateur de $f\left(u\right)$ étant une équation cubique en u et $\lim_{u\to\pm\infty} f(u) \to \pm\infty$, il convient donc de déterminer l'intervalle $[u_1,\ u_2]$ sur lequel $f(u)$ est positif ou nul. Les valeurs correspondantes pour l'angle θ, soit θ_1 et θ_2, donnent les limites de variation de θ entre lesquelles l'axe peut osciller tout en précessant autour de l'axe OZ. Cet effet est appelé **nutation**.

5/ La vision lagrangienne masque l'étude des forces. Il y a deux forces qui s'équilibrent à très peu près : le poids $\overrightarrow{g}$, appliqué en G et la réaction du support $\overrightarrow{R}$, appliquée en O. La force résultante $\delta\overrightarrow{F} = \overrightarrow{R} + \mathsf{M}\overrightarrow{g} \simeq \overrightarrow{0}$ est centripète et elle régit le très lent mouvement du barycentre autour de l'axe OZ(fig. 2).

4. La précession souvent observée est la plus lente des deux.

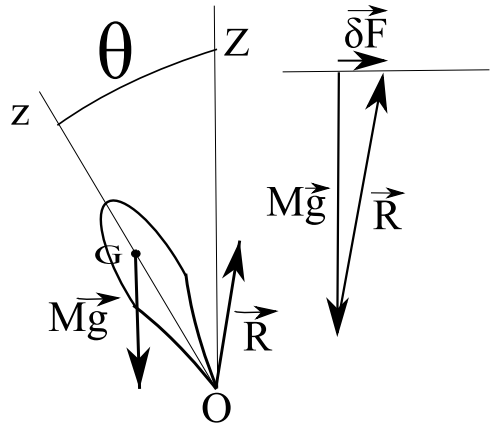

Figure 2

Problème 5 : précession et nutation terrestres

1/ Si $\overrightarrow{\Sigma}$ désigne le moment cinétique de la Terre dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}_B$, le théorème du moment cinétique s'écrit

$$\left.\frac{d\overrightarrow{\Sigma}}{dt}\right|_{R_B} = \int dm\overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{f}$$

2/ Exprimant le vecteur rotation dans le repère principal $(G, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on a

$$\overrightarrow{\Omega} = p\overrightarrow{i} + q\overrightarrow{j} + r\overrightarrow{k}$$

et le moment cinétique, projeté dans ce repère devient

$$\overrightarrow{\Sigma} = Ap\overrightarrow{i} + Bq\overrightarrow{j} + Cr\overrightarrow{k}$$

On a d'autre part, en s'aidant de la figure 1 de l'énoncé

$$r = \Omega + \dot{\psi}\ cos\theta \qquad p = \dot{\theta} \qquad q\ = \dot{\psi}\ sin\theta$$

et

$$\overrightarrow{i} = (cos\psi\overrightarrow{I} + sin\psi\overrightarrow{J})$$

$$\overrightarrow{j} = cos\theta\left(-sin\psi\overrightarrow{I} + cos\psi\overrightarrow{J}\right) + sin\theta\overrightarrow{K}$$

$$\overrightarrow{k} = sin\theta(sin\psi\overrightarrow{I} - cos\psi\overrightarrow{J}) + cos\theta\ \overrightarrow{K}$$

3/ Compte tenu des hypothèses

$$\left.\frac{d\overrightarrow{\Sigma}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_B} = C\Omega \left.\frac{d\overrightarrow{k}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_B}$$

avec

$$\left.\frac{d\overrightarrow{k}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_B} = \left(cos\psi\ sin\theta\ \dot{\psi} + sin\psi\ cos\theta\ \dot{\theta}\right)\overrightarrow{I}$$
$$+\left(sin\psi\ sin\theta\ \dot{\psi} - cos\psi\ cos\theta\ \dot{\theta}\right)\overrightarrow{J} - sin\theta\ \dot{\theta}\ \overrightarrow{K}$$
$$= \dot{\psi}sin\epsilon\,\overrightarrow{I} - \dot{\theta}(cos\epsilon\,\overrightarrow{J} + sin\epsilon\overrightarrow{K})$$

Le théorème du moment cinétique, exprimé dans le référentiel barycentrique, peut dès lors s'écrire

$$C\Omega\left[\dot{\psi}sin\epsilon\ \overrightarrow{I} - \dot{\theta}(cos\epsilon\ \overrightarrow{J} + sin\epsilon\ \overrightarrow{K})\right] = \int dm\overrightarrow{GM}\wedge\overrightarrow{f}$$

4/ Soit φ l'angle repérant un point quelconque P le long du tore (rayon Δ). On a

$$\overrightarrow{GP} = \Delta(cos\varphi\ \overrightarrow{i} + sin\varphi\ \overrightarrow{j})$$

ou, puisque $\psi \simeq 0$ et $\theta \simeq \epsilon$

$$\overrightarrow{GP} = \Delta\left(cos\varphi\,\overrightarrow{I} + sin\varphi cos\epsilon\ \overrightarrow{J} + sin\varphi sin\epsilon\ \overrightarrow{K}\right)$$

La force gravitationnelle qu'exerce l'astre, supposé ponctuel (point A) de masse M, sur un élément de masse unité pris au point courant P le long du tore, est donnée par

$$\overrightarrow{f} = -\mathcal{G}\mathsf{M}\frac{\overrightarrow{AP}}{AP^3}$$

Soit en intégrant sur tout le tore

$$\int dm\ \overrightarrow{GP}\wedge\overrightarrow{f} = \mathcal{G}\mathsf{M}\int dm\frac{\overrightarrow{GP}\wedge\overrightarrow{GA}}{AP^3}$$

(le lecteur vérifiera aisément, par raison de symétrie, que la sphère homogène ne contribue pas au calcul du couple).
La position de l'astre sur l'écliptique est repérée par le rayon-vecteur

$$\overrightarrow{GA} = D\left[\cos\lambda\,\overrightarrow{I} + sin\lambda\ \overrightarrow{J} + i\ sin(\lambda-\omega)\overrightarrow{K}\right]$$

où l'on a supposé l'inclinaison de l'orbite de l'astre sur l'écliptique petite de telle sorte que $sini \simeq i$.
On calcule les produits suivants

$$\overrightarrow{GP}.\overrightarrow{GA} = \Delta D\,[cos\varphi\ cos\lambda + cos\epsilon\ sin\varphi\ sin\lambda$$

$$+isin\epsilon\ sin\varphi\ sin(\lambda-\omega)]$$

$$\overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{GA} = \Delta \left| \begin{array}{c} cos\varphi \\ cos\epsilon\ sin\varphi \\ sin\epsilon\ sin\varphi \end{array} \right. \wedge D \left| \begin{array}{c} cos\lambda \\ sin\lambda \\ i\ sin(\lambda-\omega) \end{array} \right.$$

$$= \Delta D \left| \begin{array}{c} icos\epsilon\ sin\varphi\ sin(\lambda-\omega) - sin\epsilon\ sin\varphi sin\lambda \\ sin\epsilon\ sin\varphi\ cos\lambda - icos\varphi\ sin(\lambda-\omega) \\ cos\varphi\ sin\lambda - cos\epsilon\ sin\varphi\ cos\lambda \end{array} \right.$$

La distance Terre-astre est très grande devant les dimensions terrestres. On peut donc faire l'approximation

$$AP = \sqrt{\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right)^2} = \sqrt{\Delta^2 + D^2 - 2\,\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OA}}$$

$$\simeq D\left\{1 - \frac{\Delta}{D}\,[cos\varphi\ cos\lambda + cos\epsilon\ sin\varphi\ sin\lambda + isin\epsilon\ sin\varphi\ sin(\lambda-\omega)]\right\}$$

soit

$$\frac{1}{AP^3} = \frac{1}{D^3}\left\{1 + 3\frac{\Delta}{D}\,[cos\varphi\ cos\lambda + cos\epsilon\ sin\varphi\ sin\lambda + isin\epsilon\ sin\varphi\ sin(\lambda-\omega)]\right\}$$

L'astre effectuant une révolution complète autour de la Terre en une période, on prend la moyenne sur cette période, soit $\left\langle \frac{\overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{OA}}{SP^3} \right\rangle_\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\lambda\ \frac{\overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{OA}}{AP^3}$ (annulant toute contribution qui apparaît en $cos\lambda\ sin\lambda$ et $\left\langle sin^2\lambda \right\rangle_\lambda = \left\langle cos^2\lambda \right\rangle_\lambda = \frac{1}{2}$). Puis, on intègre sur le tore (annulant cette fois toute contribution qui apparaît en $cos\varphi\ sin\varphi$). On obtient, tous calculs faits

$$\mathsf{M}\frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \left\langle \frac{\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OA}}{AP^3} \right\rangle_\lambda$$

$$= \frac{3}{4}\frac{\Delta^2}{D^3}\mathsf{M}\frac{\mu}{2\pi} \left| \begin{array}{c} -cos\epsilon\ sin\epsilon\ + icos2\epsilon\ cos\omega \\ icos^2\epsilon\ sin\omega \\ isin\epsilon\ cos\epsilon\ sin\omega \end{array} \right.$$

(les termes en i^2, supposés très petits, ont été négligés).

5/ L'opération de moyenne temporelle donne

$$C\Omega \left| \begin{array}{c} sin\epsilon \left\langle \dot{\psi} \right\rangle \\ -\ cos\epsilon \left\langle \dot{\theta} \right\rangle \\ -sin\epsilon \left\langle \dot{\theta} \right\rangle \end{array} \right. = \frac{3}{4}\mathcal{G}\mathsf{M}\frac{\Delta^2}{D^3}\mu \left| \begin{array}{c} -cos\epsilon\ sin\epsilon + icos2\epsilon\ cos\omega \\ icos^2\epsilon\ sin\omega \\ isin\epsilon\ cos\epsilon\ sin\omega \end{array} \right.$$

soit

$$\left\langle \dot{\psi} \right\rangle = -\frac{3}{4}\frac{\mathcal{G}\mathsf{M}}{D^3}\mu\Delta^2\ \frac{cos\epsilon}{C\Omega} + \frac{3}{4}\frac{\mathcal{G}\mathsf{M}}{D^3}\mu\Delta^2\frac{icos2\epsilon cos\omega}{sin\epsilon\ C\Omega}$$

$$\left\langle \dot{\theta} \right\rangle = -\frac{3}{4}\frac{\mathcal{G}\mathsf{M}}{D^3}\mu\Delta^2\frac{i\ cos\epsilon\ sin\omega}{C\Omega}$$

6/

i/ On impose que

$$\mu\Delta^2 = C - \frac{2}{5}mc^2 = 2(C-A)$$

ii/ On aboutit, en définitive, aux expressions suivantes

$$\langle\psi\rangle = \psi_0 - \Omega_{prec}t + \delta\psi_{\ nut}\ sin\ n_N\,(t-t_0)$$

$$\langle\theta\rangle = \psi_0 - \delta\theta_{nut}\ cos\ n_N(t-t_0)$$

en posant

$$\Omega_{prec} = \frac{3}{2}\frac{\mathcal{G}\mathsf{M}}{D^3}\ \frac{C-A}{C\Omega}\ cos\epsilon$$

$$\delta\psi_{\ nut} = \tfrac{3}{2n_N}\tfrac{\mathcal{G}\mathsf{M}}{D^3}\tfrac{C-A}{C\Omega}\tfrac{icos2\epsilon}{sini} \qquad \delta\theta_{nut} = \tfrac{3}{2n_N}\tfrac{\mathcal{G}\mathsf{M}}{D^3}\tfrac{C-A}{C\Omega}i\ cos\epsilon.$$

7/ A.N. $\frac{C-A}{C} = 0.0033$, $\epsilon = 23.44°$, $\Omega = 7.3\ 10^{-5}\ s^{-1}$.
Pour le Soleil $\mathcal{G}\mathsf{M} = 1.3\ 10^{20}\frac{m^3}{s^2}$, $D = 1.49\ 10^{11}\ m$, $\omega \equiv 0$

$$\Omega_{prec} \simeq 16''/an$$

Pour la Lune $\mathcal{G}\mathsf{M} = 4.90\ 10^{12}\frac{m^3}{s^2}$, $D = 3.83\ 10^8\ m$, $i = 5.16°$, $\omega = -n_N(t-t_0)$
avec $n_N = \frac{2\pi}{18.6\ (ans)}$

$$\Omega_{prec} \simeq 34''/an$$

et
$\delta\psi_{\ nut} = 8.3''$ $(valeur\ observée\ 9.2'')$ $\delta\theta_{nut} = 15.3''$ $(valeur\ observée\ 17.2'')$

Remarque : l'axe des pôles effectue une précession rétrograde autour de la normale à l'écliptique à la vitesse angulaire $-\Omega_{prec}$. Pour la Lune le rapport $\frac{\mathcal{G}\mathsf{M}}{D^3}$ vaut deux fois celui du Soleil. L'action combinée du Soleil ($\sim \frac{1}{3}$) et de la Lune ($\sim \frac{2}{3}$) donne pour la période de précession $T = 27\ 600$ ans environ (très proche de la valeur observée, soit 25 800 ans). La précession a été découverte par l'astronome grec **Hipparque** en 140 av. J.-C en s'appuyant sur des observations beaucoup plus anciennes, effectuées par les Babyloniens vers 2000 av. J.-C. En ne considérant que la nutation seule, l'axe des pôles dessinerait une petite ellipse sur la voûte céleste (se rappeler que l'équation paramétrique de l'ellipse est $x = acost, y = bsint$!). Ce petit effet, essentiellement dû à la combinaison de l'inclinaison de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique et de la précession rétrograde du nœud lunaire ascendant, a été découvert par **J. Bradley** en 1748.

Chapitre 2

Vibrations-Ondes-Élasticité

2.1 Rappels de cours

2.1.1 Vibrations

Vibration : déséquilibre d'un système physique confiné autour d'une position dite d'équilibre stable. Le mouvement peut être périodique, c'est-à-dire qu'il se reproduit identique à lui-même au bout d'un intervalle de temps, appelé **période,** ou bien apériodique (s'il y a, par exemple, amortissement). On peut caractériser une vibration élémentaire par sa période T, mais aussi par sa fréquence ν égale à $\frac{2\pi}{T}$, ou bien encore sa pulsation $\omega = 2\pi\nu$. Le mouvement peut encore être libre (il vibre avec sa (ses) **pulsation (s)** dite(s) **propre(s)**) ou entretenu (le système vibre avec la (les) pulsation(s) de la force excitatrice).

Les **degrés de liberté** d'un système sont les mouvements élémentaires indépendants que le système est susceptible d'effectuer.

Exemple : système composé de N particules reliées entre elles par un certain nombre de liaisons rigides, ces dernières étant représentées par n équations de contraintes. On commence par retirer six mouvements correspondant aux translations et rotations globales du système. Le nombre de degrés de liberté du système devient dans ce cas $k = 3N - 6 - n$ (on aura en définitive un système de k équations de la dynamique à résoudre, une par degré de liberté, cf. chapitre 3, mécanique analytique).

2.1.2 Ondes

Une **vibration** qui se propage dans un milieu est appelée **onde**. Une onde transporte de l'énergie mais pas de matière (au sens de la mécanique classique). En général les propriétés physiques du milieu sont non modifiées après le passage de l'onde (réversibilité), mais pas toujours (onde de choc déclenchant une

explosion au sein d'un mélange gazeux !). L'usage veut que l'on classe les ondes en deux grandes catégories :

a. **Ondes progressives** (milieu dont les limites ne sont pas définies). Exemple élémentaire :

Onde scalaire plane harmonique (ou **monochromatique**) se propageant suivant un axe Ox

$$\psi(x,t) = Acos(kx - \omega t + \varphi)$$

A **amplitude**, k **vecteur d'onde** égal à $\frac{2\pi}{\lambda}$ (λ **longueur d'onde**), ω pulsation égale à $2\pi\nu$ (ν **fréquence**), φ **phase de référence**.

b. **Ondes stationnaires** (milieu confiné). Exemple élémentaire :

$$\psi(x,t) = Acos(kx + \alpha)cos(\omega t + \varphi)$$

la constante α étant alors déterminée par les conditions imposées sur la frontière du milieu (conditions aux limites).
Les ondes peuvent être du type **scalaire** (ondes caractérisées par un unique champ scalaire) ou **vectoriel** (ondes caractérisées par un champ vectoriel à trois composantes scalaires). On distingue enfin des **ondes longitudinales** (champ vectoriel parallèle à la direction de propagation), **ondes transversales** (champ vectoriel perpendiculaire à la direction de propagation), ou éventuellement mixtes.

Vitesse de phase, vitesse de groupe
Soit deux ondes harmoniques de même amplitude A se propageant dans un milieu homogène suivant un même axe Ox :

$$\psi_1(x,t) = Acos(k_1 x - \omega_1 t)$$
$$\psi_2(x,t) = Acos(k_2 x - \omega_2 t)$$

On posera

$$k_1 = k_0 + \Delta k \ , \ k_2 = k_0 - \Delta k$$

avec $\frac{\Delta k}{k_0} \ll 1$ et

$$\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega \ , \ \omega_2 = \omega_0 - \Delta\omega$$

avec $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$.
On obtient pour la somme

$$\psi(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)$$

$$= 2Acos\Delta\omega\left(t - \frac{x}{v_g}\right) cos\omega\left(t - \frac{x}{v_\varphi}\right)$$

en définissant une **vitesse de phase**

$$v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}$$

et une **vitesse de groupe**

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

Il y a deux phénomènes qui se superposent :

i/ Les deux ondes se propagent individuellement à la vitesse v_φ.

ii/ Elles interfèrent pour produire un train infini de paquets d'onde se propageant à la vitesse v_g.

La pulsation ω et le vecteur d'onde k sont d'autre part liés par la **relation de dispersion** du milieu, soit

$$\omega \equiv \omega(k)$$

Si $\Delta k \to 0$ la vitesse de groupe v_g peut encore s'exprimer comme la dérivée de ω en $k = k_0$, soit

$$v_g = (\frac{d\omega}{dk})_0$$

Si le milieu est non dispersif $\omega = ck$ (c indépendant de k), on trouve dès lors que $v_g = v_\varphi$. Mais très généralement, quand le milieu est dispersif v_g est différent de v_φ.

2.1.3 Élasticité linéaire

La **cohésion** des matériaux est assurée par les **liaisons interatomiques**. On les classe usuellement en **liaisons fortes** : liaison covalente, ionique, métallique ou **liaisons faibles** : liaison hydrogène−hydrogène ou de type Van der Waals).

Dans **l'approximation linéaire**, on peut modéliser une liaison interatomique par un ressort de raideur k reliant deux sphères dures représentant les atomes ou les ions : force microscopique $f = -k(r - r_0)$, r_0 longueur à l'équilibre.

Type de liaison	k $(\frac{N}{m})$	E (Giga Pa)
Covalente $C-C$	200	1000
Ionique $Na-Cl$	10-20	50
Métallique $Cu-Cu$	20-40	30-150
Hydrogène H_2O-H_2O	2	10
Van der Waals	1	2

Loi de Hooke (1678) : **relation linéaire contrainte-déformation**
Traction uniaxiale d'une barre de longueur au repos L_0 et de section S : force appliquée F (force par unité de surface ou **contrainte** $\sigma = \frac{F}{S}$) $\rightarrow$ **déformation** ou allongement relatif $e = \frac{L-L_0}{L_0}$.

Module d'Young (1800) :

$$E = \frac{\sigma}{e} = \frac{k}{r_0}$$

Soit un cube découpé par la pensée dans un matériau. Les translations et rotations étant mises à part, le cube contraint peut subir diverses déformations caractérisées par des variations de longueurs ou des distorsions angulaires :

Étirement suivant l'axe Ox_1 : contrainte σ_1 (Hooke, Young, Poisson, fig. 1 : traît discontinu avant étirement, traît continu après étirement)

Description matricielle (**Cauchy**, 1822) :
Champ de contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$[1], champ de déformations $\overline{\overline{\epsilon}}$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{\sigma_1}{E} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\eta & 0 \\ 0 & 0 & -\eta \end{pmatrix}$$

1. En fait la notation d'une lettre surmontée d'une double barre $\overline{\overline{\sigma}}$ ou $\overline{\overline{\epsilon}}$ indique que ces quantités sont plus généralement des tenseurs (ici de rang deux) et non pas de simples matrices. Les deux tenseurs fondamentaux de l'élasticité qui viennent d'être introduits sont représentés par leur matrice respective dans une base donnée. L'identification d'un tenseur de rang deux à sa matrice représentative est courante en physique bien qu'elle soit, en fait, abusive car la matrice ne représente que les coordonnées de ce tenseur dans une base choisie, et celles-ci se modifient donc si on change la base. Pour la définition d'un tenseur, cf. formulaire de mathématiques, II.

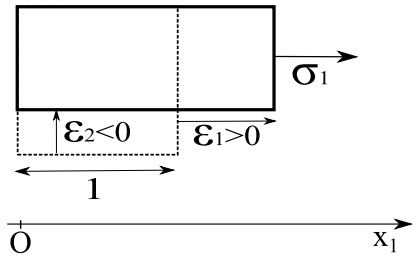

Figure 1

Expérimentalement, l'allongement $\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$ dans la direction Ox_1 (Young) s'accompagne d'un raccourcissement dans les directions perpendiculaires $\epsilon_2 = -\eta\epsilon_1$ et $\epsilon_3 = -\eta\epsilon_1$ (Poisson). Le coefficient η est le **coefficient de Poisson** compris entre 0 et $\frac{1}{2}$ (bon exemple le caoutchouc $\simeq \frac{1}{2}$, mauvais exemple le liège $\eta \simeq 0$).

Cisaillement (contraintes suivant Ox_1 appliquées sur les faces normales à Ox_2 (a) et inversement (b)).

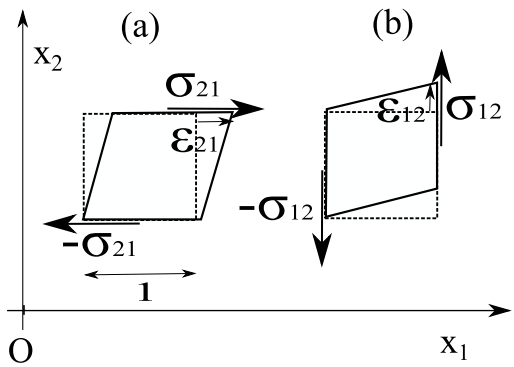

Figure 2

Description matricielle :

Champ de contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$, champ de déformations $\overline{\overline{\epsilon}}$

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\mu} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le coefficient μ est le **module de cisaillement**.
Les couples $(\sigma_{21}, -\sigma_{21})$ et $(\sigma_{12}, -\sigma_{12})$ se compensent (moment résultant nul) $\Rightarrow$ $\sigma_{21} = \sigma_{12}$ (symétrie de la matrice représentative de $\overline{\overline{\sigma}}$: ${}^T\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma}}$).

Cas général
Dans le cas de petites déformations, on applique le **principe de superposition** : la déformation globale est une combinaison linéaire des déformations élémentaires (allongements + cisaillements)

Description matricielle :
Champ de contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$ champ de déformations $\overline{\overline{\epsilon}}$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Les matrices $\overline{\overline{\sigma}}$ et $\overline{\overline{\epsilon}}$ sont symétriques ($\sigma_{\mu\nu} = \sigma_{\nu\mu}$ et $\epsilon_{\mu\nu} = \epsilon_{\nu\mu}$).

Relation de Lamé

$$\overline{\overline{\sigma}} = \lambda \left(Tr\overline{\overline{\epsilon}} \right) \overline{\overline{\mathsf{I}}} + 2\mu\overline{\overline{\epsilon}}$$

($\overline{\overline{\mathsf{I}}}$ tenseur identité de second rang ou tenseur de Kronecker, représentable par la matrice unité usuelle I_3, quelle que soit la base choisie)
avec

$$\lambda = \frac{\eta E}{(1+\eta)(1-2\eta)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\eta)} \quad (\textbf{coefficients de Lamé})$$

La force appliquée à un élément de surface $d\overrightarrow{S}$ est donnée par le produit scalaire

$$d\overrightarrow{S}.\overline{\overline{\sigma}} \equiv {}^T\overline{\overline{\sigma}}.d\overrightarrow{S} = \overline{\overline{\sigma}}.d\overrightarrow{S}$$

(pour l'identité, cf. formulaire de mathématiques, II, l'égalité résulte de la symétrie du tenseur $\overline{\overline{\sigma}}$).

Exemple : si la surface est orientée suivant l'axe Ox_1 de vecteur unitaire $\overrightarrow{e}_1$, on a $d\overrightarrow{S} = dx_2dx_3\overrightarrow{e_1}$ et la force a pour composantes

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_2dx_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}dx_2dx_3 \\ \sigma_{12}dx_2dx_3 \\ \sigma_{13}dx_2dx_3 \end{pmatrix}$$

La première composante ($\sigma_{11}dx_2dx_3$) correspond à une force normale à l'élément de surface en question et les deux autres composantes représentent une force tangentielle à cet élément.

Équation du mouvement
Toute contrainte appliquée à un matériau induit un **champ de déplacement** $\overrightarrow{u}(M,t)$ (déplacement d'une particule du matériau repéré par rapport à sa position non contrainte M).
Le mouvement de la particule est régi par l'équation de la dynamique

$$\rho\ \ddot{\overrightarrow{u}} = \overrightarrow{\nabla}.\overline{\overline{\sigma}} + \rho\overrightarrow{f}$$

Le **tenseur de déformation** $\overline{\overline{\epsilon}}$ est défini par

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\nabla} \otimes \overrightarrow{u} + {}^T\overrightarrow{\nabla} \otimes \overrightarrow{u})$$

où le tenseur ${}^T\overrightarrow{\nabla} \otimes \overrightarrow{u}$ est le transposé du tenseur $\overrightarrow{\nabla} \otimes \overrightarrow{u}$ (la matrice de rang deux 3×3 représentative de ${}^T\overrightarrow{\nabla} \otimes \overrightarrow{u}$ est obtenue à partir de celle de $\overrightarrow{\nabla} \otimes \overrightarrow{u}$ en interchangeant lignes et colonnes).

Conditions aux limites imposées sur la surface limitant le corps
Le corps est limité par une surface S de normale $\overrightarrow{n}$ (dirigée par convention vers l'extérieur du corps). Si des forces de contact $\overrightarrow{f}_S$ agissent sur S, on impose en tout point de S (conditions aux limites).

$$\overline{\overline{\sigma}}.\overrightarrow{n} = \overrightarrow{f}_S$$

2.2 Énoncés des problèmes

Problème 6 :

Partie I : chaîne infinie composée d'oscillateurs harmoniques identiques

On considère le système suivant composé de particules identiques, de masse m, reliées entre elles par des ressorts de couplage de raideur k (fig. 1)

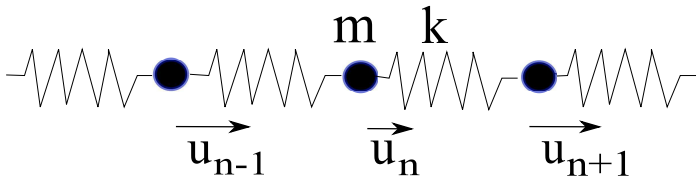

Figure 1

1/ Écrire les équations du mouvement

2/ On choisira des solutions du type

$$u_n = Re\left\{c_n e^{i\omega t}\right\}$$

où c_n représentent des coefficients de module $|c_n| = C$ et $c_n = Ce^{i\varphi}$. Établir la relation de dispersion $\omega \equiv \omega(\varphi)$. Re (partie réelle de) sera sous-entendu dans la suite.

3/ On effectuera l'étude de la relation de dispersion en supposant φ petit. À quelle vitesse s'effectue dans ce cas la propagation d'un ébranlement initialement induit sur une masse donnée ?

4/ Calculer les vitesse de phase v_φ et vitesse de groupe v_g.

Partie II : chaîne infinie alternée composée de particules de masses distinctes $m_0,\ m_1$

Soit le système suivant composé de particules de masses alternées distinctes (fig. 2)

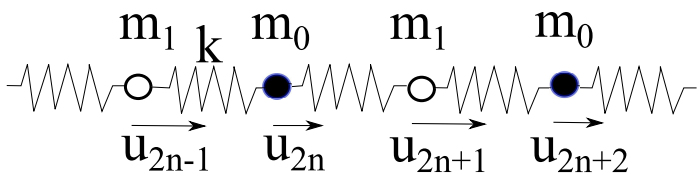

Figure 2

1/ Établir les équations du mouvement.

2/ On choisit des solutions de la forme

$$u_{2n} = Ae^{i\omega t}$$

$$u_{2n+1} = Be^{i\varphi}e^{i\omega t}$$

Déterminer la relation de dispersion. Montrer qu'il existe deux branches séparées par un intervalle de pulsations non réalisées.

Partie III : approximation seconds voisins

On reprend le système étudié dans la partie I, mais on suppose à présent qu'une particule donnée interagit non seulement avec ses voisins immédiats mais aussi avec ses second voisins (constantes d'interaction premiers voisins K_1, seconds voisins K_2).

1/ Écrire les équations de la dynamique dans l'approximation seconds voisins.

2/ On suppose que les particules sont séparées par une distance a. On cherche des solutions sous la forme

$$u_n = Ae^{i(nka-\omega t)}$$

Déterminer la relation liant la pulsation ω et ka (k est appelé vecteur d'onde). Étudier la stabilité du système.

Partie IV : chaîne de longueur finie. Quantification du spectre des valeurs de k.

1/ On considère maintenant le cas d'une chaîne finie, de longueur L, constituée de $N+1$ particules identiques et équidistantes, séparées par une distance a. On se restreindra à l'approximation premier voisin. Si le déplacement de la particule n est $u_n = c_n e^{i\omega t}$, montrer qu'une solution du type $c_n = A\ sin\ nka$ convient.

2/

i/ On impose les conditions aux limites

$$u_0 = u_N = 0$$

sur les particules situées en bout de chaîne. En déduire que le spectre des valeurs du vecteur d'onde k est quantifié.

ii/ On impose les **conditions aux limites périodiques** (dues à **Born** et **Von Karman**) suivantes

$$u_{n+N} = u_n$$

(cette condition revient en fait à boucler la chaîne, supposée de longueur finie, sur elle-même ! Une telle procédure paraît assez légitime lorsque N est très grand, beaucoup moins si N est petit). Même question qu'en i/.

iii/ Expliquez la différence entre les conditions aux limites i/ et ii/.

Problème 7 : cordes et membranes vibrantes

Partie I : cordes vibrantes

Une corde de masse linéïque μ, supposée sans raideur, est mise sous tension. Soit $\overrightarrow{T_0}$ la tension à l'équilibre. On admettra que la corde est dirigée le long d'un axe Ox. On ébranle la corde suivant Oy, puis on laisse le système évoluer librement. On admettra que pour deux points infiniment voisins situés en x et $x + dx$, on a $\left|\overrightarrow{T}(x + dx, t)\right| = \left|\overrightarrow{T}(x, t)\right| = \left|\overrightarrow{T_0}\right|$, dans l'hypothèse des petits mouvements.

1/ Établir l'équation de la dynamique pour un déplacement vertical $\psi(x, t)$. En déduire l'équation de propagation des ondes le long de la corde.

2/ Application : la corde de violon

Soit une corde tendue entre deux points fixes en $x = 0$ et $x = a$. Il est clair qu'un système d'ondes stationnaires va s'établir le long de la corde si celle-ci est pincée. On va donc choisir des solutions de la forme

$$\psi(x, t) = C\ f(t)\, g(x)$$

i/ Montrer que la solution générale peut s'écrire sous la forme d'une série

$$\psi(x, t) = \sum_n\ sin(n\frac{\pi}{a}x)[A_n\ cos\omega_n t + B_n\ sin\omega_n t]$$

ii/ On supposera qu'à l'instant initial t=0, la corde est pincée sans vitesse et a la forme précisée par l'équation suivante

$$\psi(x, 0) = \ \psi_0(x)$$

Déterminer les coefficients A_n et B_n de la décomposition.

Partie II : membranes vibrantes

Soit une membrane sans raideur, de masse surfacique μ, située à l'équilibre dans le plan Oxy.

Soit $\psi(x, y, t)$ le déplacement suivant Oz (perpendiculaire au plan Oxy).

1/ Déterminer l'équation du mouvement, puis en déduire l'équation d'onde des membranes.

2/ Application : membrane rectangulaire tendue sur un cadre rigide de côtés a et b. Montrer que dans ce cas la solution s'écrit

$$\psi\,(x, y, t) = \sum_{n,m} C_{n,m} \sin\,(n\frac{\pi}{a})\ sin(m\frac{\pi}{b}\ y)cos(\omega_{n,m}t + \ \varphi_{n,m})$$

Problème 8 : ondes dans un fluide pur et homogène. Gaz enfermé dans une enceinte sphérique

Partie I : propagation le long d'un axe Ox

On désire étudier la propagation d'une onde dans un milieu matériel. On prendra l'exemple d'un milieu infini rempli d'un fluide pur et homogène, de masse volumique ρ_0 et de pression P_0 à l'équilibre. On admettra que la propagation s'effectue dans une direction donnée, suivant l'axe Ox.

On découpera par la pensée un tube cylindrique dirigé suivant Ox de section S. Le déplacement de chaque section sera dénoté $u(x, t)$ (fig. 1). On désignera par $p(x, t)$ la surpression produite par le passage de l'onde.

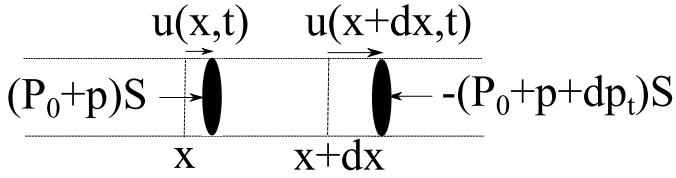

Figure 1

1/ Déterminer dans l'hypothèse des petits mouvements, l'équation vérifiée par u.

2/ Établir la relation liant p au **coefficient de compressibilité isentropique** du fluide χ_S (dont on rappellera la définition).

3/ En déduire l'équation d'onde.

4/ Montrer que les solutions de l'équation trouvée en 3/ sont de la forme

$$u\,(x, t) = F(t - \frac{x}{c}) + G(t + \frac{x}{c})$$

Que représente chacun des deux termes figurant dans la solution ?

5/ On prend l'exemple d'une onde harmonique de pulsation ω. Expliciter dans ce cas la solution. On considérera les situations suivantes :

i/ Le milieu est illimité.
ii/ Paroi placée en $x = 0$.
iii/ Fluide limité par deux parois (en $x = 0$ et $x = L$).

Partie II : propagation dans une direction quelconque

Dans la partie I, nous avons considéré une onde se propageant le long de l'axe Ox. On peut imaginer que la propagation s'effectue dans une direction quelconque. Par rapport à un trièdre $Oxyz$, On définit dans ce cas, en chaque point du fluide, un déplacement vectoriel $\overrightarrow{u}$ de composantes u_x suivant Ox, u_y suivant Oy et u_z suivant Oz.

1/ Montrer que l'équation régissant le déplacement $\overrightarrow{u}$ est

$$\Delta \overrightarrow{u} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{u}}{\partial t^2} = -rot\ rot \overrightarrow{u}$$

2/ On admet que $rot \overrightarrow{u}$ est identiquement nul. À quoi correspond physiquement cette hypothèse ? Que devient alors l'équation précédente ?

Partie III : gaz enfermé dans une enceinte sphérique de rayon R

Soit un gaz enfermé dans une enceinte sphérique de rayon R. On admet que le vecteur déplacement $\psi \equiv \psi(r, \theta, \varphi, t)$, supposé purement radial, obéit à l'équation d'onde

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

1/ On cherche des solutions de cette équation sous la forme (oscillation harmonique de pulsation ω)

$$\psi\,(r,\ \theta, \varphi, t) = \psi_\omega(r,\ \theta, \varphi)e^{i\omega t}$$

Quelle est l'équation vérifiée par $\psi_\omega(r, \theta, \varphi)$?

2/ On privilégie, à présent, les solutions obtenues par séparation des variables spatiales, soit

$$\psi_\omega(r, \theta, \varphi) = f(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

où les $Y_{lm}\,(\theta, \varphi)$ représentent les harmoniques sphériques qui obéissent à l'équation

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{cotan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) + l\,(l+1)\right] Y_{lm}\,(\theta,\ \varphi) = 0$$