

Philippe Monnier

Topologie et calcul différentiel

Cours et exercices corrigés

DUNOD

© Dunod, 2026
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-089445-1

Table des matières

1	Les espaces métriques	1
1.1	Les distances	1
1.1.1	Des exemples classiques	2
1.1.2	Distance produit, distance induite	3
1.2	Les boules	3
1.3	Les suites	5
1.3.1	Suites convergentes	5
1.3.2	Suites de Cauchy	6
1.3.3	Suites extraites et valeurs d'adhérence	6
1.3.4	Suites réelles	7
1.4	Topologie des espaces métriques	8
1.4.1	Les parties ouvertes	9
1.4.2	Les parties fermées	12
1.4.3	Intérieur et adhérence	15
1.4.4	Parties denses	18
1.4.5	Parties d'intérieur vide	20
	Exercices	22
2	La continuité	23
2.1	Application continue	23
2.2	Application uniformément continue	24
2.3	Application lipschitzienne	26
2.4	Application linéaire continue	27
2.5	Montrer la continuité	28
2.6	Les homéomorphismes	29
	Exercices	32
3	Les espaces vectoriels normés	33
3.1	Des exemples à connaître	33
3.2	Quelques propriétés classiques	35
3.3	Les applications linéaires continues	36
3.4	Le cas de la dimension finie	38
3.4.1	Se ramener à $\mathbb{R}^n$	39
3.4.2	Les théorèmes importants	39
3.5	La convergence des suites	42
3.6	Le dual topologique	43
3.6.1	Les hyperplans	44

3.6.2	Bases d'Auerbach en dimension finie	45
	Exercices	47
4	Les espaces préhilbertiens	49
4.1	Propriétés générales des espaces préhilbertiens	50
4.1.1	L'inégalité de Cauchy-Schwarz	50
4.1.2	Orthogonalité	52
4.1.3	Quelques identités classiques	53
4.1.4	Plongement dans le dual topologique	54
4.2	La projection orthogonale	55
4.3	Le procédé de Gram-Schmidt	57
4.4	Les espaces de Hilbert	60
4.4.1	L'espace de Hilbert de référence : $\ell^2(\mathbb{R})$	61
4.4.2	La projection orthogonale dans un espace de Hilbert	61
4.4.3	Le théorème de représentation de Riesz	62
4.5	Le cas complexe	63
	Exercices	65
5	Normes équivalentes	67
5.1	Comparaison de normes	67
5.2	Normes équivalentes	69
5.3	Distances équivalentes	70
6	Topologie induite, topologie produit	71
6.1	Topologie induite	71
6.2	Topologie produit	73
7	La fonction distance	77
7.1	Continuité de la distance	77
7.2	Distance à un sous-ensemble	78
7.2.1	Distance à une partie compacte	80
7.2.2	Distance à une partie dans un espace vectoriel normé	80
7.2.3	Distance à une partie dans un espace préhilbertien	84
7.3	Différentiabilité de la distance à une partie fermée	87
8	Les espaces compacts	89
8.1	Deux définitions de la compacité	89
8.2	Premières propriétés	91
8.3	Démontrer la compacité	92
8.4	Exemples classiques	93
	Exercices	95
9	Les parties compactes en dimension finie	97
9.1	Les parties compactes de $(\mathbb{R}^n, \ \cdot\ _\infty)$	97
9.2	L'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$	98
9.3	Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$	99
9.4	Les parties compactes en dimension finie	99
9.5	En résumé	100
9.6	Le théorème de Riesz	101

10 Les boules fermées en dimension finie	105
10.1 Caractérisation des boules unités fermées	105
10.1.1 Jauge d'une partie compacte et convexe	105
10.1.2 Caractérisation des boules	107
10.2 Les boules euclidiennes	109
10.3 Le volume des boules euclidiennes	111
10.3.1 Avec la fonction Γ	112
10.3.2 Avec les intégrales de Wallis	113
10.3.3 Avec la transformée de Laplace	115
10.3.4 Comportement asymptotique et variations	117
10.3.5 Les boules non euclidiennes	119
10.3.6 Le volume des ellipsoïdes	119
10.3.7 L'ellipsoïde de John-Loewner	120
11 Utilisation de la compacité	121
11.1 Existence d'un élément particulier	121
11.2 Uniformisation	125
11.2.1 Le théorème de Heine	125
11.2.2 Uniformisation lipschitzienne	127
11.2.3 Suites de fonctions	129
11.3 Approximation des fonctions continues	131
11.3.1 Approximation polynomiale	132
11.3.2 Régularisation par convolution	133
12 Les espaces complets	135
12.1 Propriétés classiques	136
12.2 Les exemples à connaître	138
12.2.1 $\mathbb{Q}$ n'est pas complet, mais $\mathbb{R}$ oui	138
12.2.2 Les espaces vectoriels normés de dimension finie	140
12.2.3 Les espaces vectoriels d'applications continues	140
12.2.4 Les espaces vectoriels de suites	141
12.3 Montrer la complétude	142
12.4 Séries dans un espace de Banach	144
12.5 Utiliser la complétude	148
12.6 Le complété d'un espace métrique	148
Exercices	150
13 Les espaces connexes	151
13.1 La connexité	151
13.2 La connexité par arcs	154
13.3 Montrer la connexité	156
13.4 Utiliser la connexité	156
14 Théorèmes de point fixe	159
14.1 Avec la compacité	159
14.1.1 Applications de type « contractantes »	159
14.1.2 Théorèmes de Kakutami	162
14.2 Avec la complétude	164
14.3 Avec la connexité	167

Exercices	168
15 Prolongement d'applications	169
15.1 Le théorème de prolongement uniformément continu	169
15.2 Le théorème de Hahn-Banach	171
15.3 Le théorème de Tietze-Urysohn	173
15.4 Prolongement différentiable	173
15.5 Prolongement d'une fonction plate	179
16 Applications différentiables	181
16.1 La différentiabilité	181
16.2 Des exemples à connaître	185
16.3 Les dérivées partielles	187
16.4 Applications de classe C^1	189
16.5 Montrer la différentiabilité	192
16.5.1 Composition de fonctions classiques	192
16.5.2 Revenir à la définition	192
16.5.3 Décomposer l'application	193
16.6 La dérivée directionnelle	194
16.7 Un peu de géométrie	196
16.7.1 Interprétation géométrique de la différentielle	196
16.7.2 Le plan tangent au graphe d'une fonction	197
16.8 Le gradient d'une fonction numérique différentiable	198
16.9 Suites d'applications différentiables	200
Exercices	205
17 Différentiabilité d'ordre supérieur	207
17.1 Différentiabilité d'ordre 2	207
17.1.1 Expliciter $d^2 f_a(h, k)$ avec la matrice hessienne	208
17.1.2 Expliciter $d^2 f_a(h, k)$ à la main	210
17.1.3 Expliciter $d^2 f_a(h, k)$ avec une double dérivée directionnelle	211
17.1.4 La différentiabilité d'ordre $r \geq 2$	212
17.2 Le théorème de Schwarz	212
17.3 Utiliser la différentielle d'ordre 2	214
17.4 Applications de classe C^r	215
17.5 Formules de Taylor	216
17.6 Régularisation par convolution	219
18 Le théorème des accroissements finis	221
18.1 L'inégalité des accroissements finis	221
18.2 Quelques applications	222
19 Le théorème d'inversion locale	225
19.1 Changements de variables	226
19.2 Inversion locale	228
19.3 Résolution d'équations	230
19.4 Classification locale des applications	230
19.4.1 Les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$	231
19.4.2 Les fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$	232

19.4.3	Les fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$	234
19.5	Inversion globale	236
19.5.1	Théorème d'inversion globale simple	237
19.5.2	Le théorème de Hadamard-Levy	238
19.5.3	D'autres résultats classiques	239
20	Le théorème des fonctions implicites	243
20.1	Des cas simples	243
20.2	Le cas général	246
20.3	Fonctions implicites versus Inversion locale	248
21	Un peu de géométrie différentielle	251
21.1	Les surfaces régulières	251
21.2	Le plan tangent	254
21.3	Les sous-variétés différentielles	255
22	Extrema de fonctions numériques	259
22.1	Un critère topologique	260
22.2	Les points critiques	261
22.2.1	Condition de classe C^2	262
22.2.2	Point presque critique	264
22.3	Optimisation sous contraintes	265
22.4	L'apport de la convexité	269
	Correction des exercices	272
	Index	290
	Bibliographie	292

Avant-propos

La topologie et le calcul différentiel sont des thèmes standards enseignés en Licence de Mathématiques. Ils constituent un passage obligé pour faire sérieusement de l'analyse à un niveau avancé, autre que l'analyse sur $\mathbb{R}$. Si on souhaite avoir la sensation de maîtriser à un niveau correct ces deux domaines, il faut faire un effort d'abstraction et accepter l'idée de se défaire partiellement des réflexes acquis sur les fonctions d'une variable réelle et d'essayer de les généraliser. Cela demande un peu de temps et d'engagement.

Ces deux domaines étant étroitement liés, il est difficile de faire sérieusement du calcul différentiel sans avoir de notion de topologie, c'est pourquoi il peut être intéressant de les rassembler. Dans ce livre, les notions topologiques de base sont développées dans les chapitres 1 à 15, puis le calcul différentiel est abordé dans les chapitres 16 à 22. Mais la séparation n'est pas aussi nette ; on pourra parfois retrouver des propriétés de calcul différentiel dans les chapitres de topologie. Certains chapitres contiennent des exercices qui sont assez classiques, ou qui sont des démonstrations de propriétés de cours qu'il est bon de savoir faire car elles font appel à des techniques usuelles. Tous les exercices sont corrigés à la fin du livre.

Concernant la partie topologie, le cadre d'étude fixé dans ce livre est celui des espaces métriques et en particulier des espaces vectoriels normés. La topologie générale ne sera quasiment pas abordée, les espaces de Hilbert non plus. Je donne beaucoup de résultats dans le langage des espaces métriques mais un lecteur qui préfère se restreindre aux espaces vectoriels normés pourra adapter sans peine les énoncés à ce cadre.

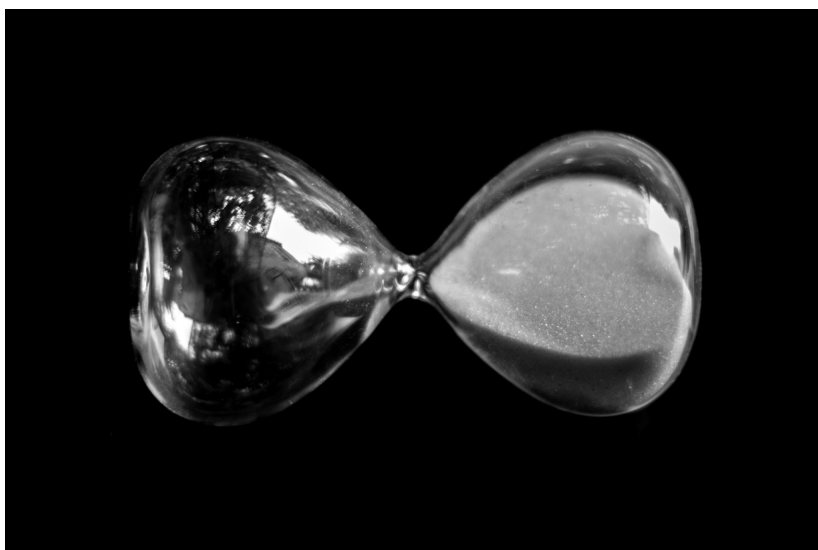
Le calcul différentiel est développé sur des espaces vectoriels normés de dimension finie plutôt que dans les espaces de Banach. Il s'agit d'une simple initiation aux notions de base avec une légère incursion dans la géométrie différentielle.

À qui s'adresse ce livre ? Cet ouvrage a été initialement rédigé dans l'optique d'accompagner la préparation à l'agrégation interne de mathématiques. Les notions ne sont pas forcément introduites d'une façon chronologique. Par exemple, je n'hésite pas à parler de continuité dans le premier chapitre sur les propriétés topologiques de base des espaces métriques alors que la notion même de continuité n'est officiellement introduite et développée que dans le deuxième chapitre. Cette particularité est surtout présente dans les chapitres de topologie. Ce livre s'adresse donc à des étudiantes et des étudiants qui ont déjà des connaissances, même très succinctes, en topologie et calcul différentiel ; ne serait-ce que sur $\mathbb{R}^2$, par exemple. Il sera utile *en troisième année de licence de mathématiques ou pour la préparation de l'agrégation interne ou externe de mathématiques*. Cet ouvrage peut également être utile pour découvrir la topologie ou le calcul différentiel, comme complément d'un cours plus respectueux de la progression habituelle.

Ainsi, sa lecture, en particulier la partie topologie, n'est pas forcément linéaire et certaines notions se répondent d'un chapitre à l'autre. On vient y chercher régulièrement ce dont on a besoin ou envie.

J'aimerais remercier Christine et Marie-Pierre pour la relecture du manuscrit, Élise pour la patience sans faille, Roxane pour les encouragements enthousiastes, ainsi que les candidats à l'agrégation interne qui ont suivi mes cours de topologie et calcul différentiel ces dernières années.

Les photographies sont de Clara Laïb (lien Instagram @claralbmt), talentueuse photographe et mathématicienne. Je la remercie.



Chapitre 1

Les espaces métriques

Dans ce premier chapitre, nous survolons les notions de base sur les espaces métriques, sans forcément rentrer dans les détails. Pour une introduction plus détaillée sur le sujet, on pourra consulter par exemple : [10], [11], [23], [27], [29], [30], [37].

La notion de distance sur un ensemble permet de donner un cadre propre, clair et relativement simple aux idées intuitives de : *proximité de deux éléments*, *voisinage d'un point*, *convergence d'une suite*. Ce sont des notions essentielles pour faire de l'analyse. Dans ce livre, on se placera souvent dans le cadre général des espaces métriques mais la majeure partie des exemples et applications importants que nous donnons concernent le cadre, plus restreint, des espaces vectoriels normés. Une bonne maîtrise des espaces vectoriels normés peut être largement suffisante si on trouve que les espaces métriques sont trop abstraits.

1.1 Les distances

Une **distance** sur un ensemble E est une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie, pour tout x, y et z dans E :

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire)

Dans ce cas, on dit que (E, d) est un **espace métrique**. On utilise parfois également le mot *métrique* pour désigner une distance.

Remarque 1.1.1. Si x et y sont deux éléments d'un espace métrique (E, d) , alors on a $0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$. Par conséquent, $d(x, y) \geq 0$. Une distance est donc toujours à valeurs positives, ce qui n'est pas surprenant.

Si E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (ou complexe), une **norme** sur E est une application $\| \cdot \| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie, pour tout x et y dans E et λ dans $\mathbb{R}$:

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

On dira alors dans ce cas que $(E, \| \cdot \|)$ est un **espace vectoriel normé**.

Remarque 1.1.2. Il est important de noter que si $(E, \| \cdot \|)$ est un espace vectoriel normé, alors c'est un espace métrique en définissant $d(x, y) = \|x - y\|$, mais la réciproque n'est pas vraie. La distance discrète sur un espace vectoriel, que nous définirons plus tard dans l'Exemple 1.1.6, en est un contre-exemple. Si E est un espace vectoriel muni d'une distance d , on peut alors définir $\| \cdot \| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\|x\| = d(0, x)$. Quelles propriétés doit posséder d pour que $\| \cdot \|$ soit une norme sur l'espace vectoriel E ? Il suffit que d soit invariante par translation, c'est-à-dire que, pour tout x, y et a dans E , on ait $d(x - a, y - a) = d(x, y)$, et qu'elle soit invariante par homothétie, c'est-à-dire $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y)$ pour tous x et y dans E et λ réel.

Remarque 1.1.3. Il y a une conséquence assez classique de l'inégalité triangulaire qu'il faut connaître et savoir utiliser quand c'est nécessaire. On l'appelle parfois la *seconde inégalité triangulaire*. Nous l'exprimons ici avec les normes mais on peut faire la même chose avec les distances. Si x et y sont dans un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$ alors on a $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ ce qui donne $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. De la même manière, on obtient $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$ donc on peut conclure

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

Dans un espace métrique, on a $|d(x, a) - d(a, y)| \leq d(x, y)$ pour tous x, y, a dans E (voir le Chapitre 7).

1.1.1 Des exemples classiques

Nous donnons ici quelques exemples de distances et de normes. Nous verrons d'autres exemples de normes dans le Chapitre 3.

Exemple 1.1.4. La *valeur absolue* $|\cdot|$ est la norme standard sur $\mathbb{R}$. Notons qu'il est assez facile de vérifier que toute norme sur $\mathbb{R}$ est en fait de la forme $\alpha|\cdot|$ où $\alpha > 0$. Lorsque nous parlerons de $\mathbb{R}$ en tant qu'espace métrique ou topologique, il sera implicite qu'il s'agit de $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue. De la même manière, la norme standard sur $\mathbb{C}$ est le module $|\cdot|$. Elle correspond à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 1.1.5. Sur $\mathbb{R}^n$, on a les normes classiques : si $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| \quad \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \quad \|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$$

et plus généralement, pour tout $p \in [1; +\infty[$, on a la norme de Hölder

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

Exemple 1.1.6. La *distance discrète* sur un ensemble E est définie par $d(x, y) = 0$ si $x = y$ et $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$. Cette distance n'est pas d'une utilité extraordinaire mais elle permet de construire des contre-exemples simples.

Exemple 1.1.7. La *droite achevée* $\overline{\mathbb{R}}$.

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante, continue et bornée. On définit alors $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et le prolongement $\bar{f}$ de f à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant simplement $\bar{f}(-\infty) = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ et $\bar{f}(+\infty) = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$. Maintenant, on définit $\bar{d} : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\bar{d}(x, y) = |\bar{f}(x) - \bar{f}(y)|$. On peut montrer que $\bar{d}$ est une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$.

Deux exemples très classiques sont $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$ et $f(x) = \text{Arctan}(x)$.

Exemple 1.1.8. La *distance SNCF* sur $\mathbb{R}^2$ centrée sur l'origine.

Si $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$, alors on définit $d(x, y) = \|x - y\|_2$ si x, y et l'origine sont alignés et $d(x, y) = \|x\|_2 + \|y\|_2$ sinon. L'appellation SNCF fait référence à la structure du réseau ferroviaire français selon laquelle il est parfois plus commode de passer par Paris pour voyager entre villes de province.

1.1.2 Distance produit, distance induite

Si (E_1, d_1) et (E_2, d_2) sont deux espaces métriques, on peut munir le produit $E_1 \times E_2$ d'une distance, appelée **distance produit** δ_∞ , définie par

$$\delta_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)).$$

Avec des espaces vectoriels normés $(E_1, \|\cdot\|_1)$ et $(E_2, \|\cdot\|_2)$ on définit la norme produit sur $E_1 \times E_2$:

$$\|(x_1, x_2) - (y_1, y_2)\|_\infty = \max(\|x_1 - y_1\|_1, \|x_2 - y_2\|_2).$$

Si (E, d) est un espace métrique et A est une partie de E , alors la restriction de d à A définit la **distance induite** d_A sur A . On a $d_A(x, y) = d(x, y)$ pour tout x et y dans A . Ainsi, (A, d_A) est un espace métrique. Pour plus de détails sur les propriétés topologiques de ces deux notions, on pourra consulter le Chapitre 6.

1.2 Les boules

Dans un espace métrique (E, d) , on définit pour tout $a \in E$ et $r > 0$ les parties suivantes :

- la **boule ouverte** : $B(a; r) = \{x \in E; d(a, x) < r\}$
- la **boule fermée** : $\overline{B}(a; r) = \{x \in E; d(a, x) \leq r\}$
- la **sphère** : $S(a; r) = \{x \in E; d(a, x) = r\}$

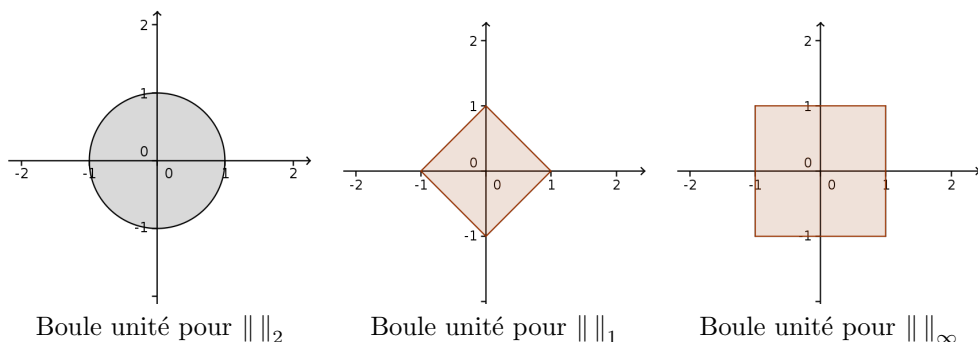
L'élément a est le **centre** et le nombre réel r est le **rayon**. Dans certains livres, la boule fermée est plutôt notée $B'(a; r)$.

Dans un espace vectoriel normé, il suffit de remplacer $d(a, x)$ par $\|x - a\|$. Parmi toutes les boules, il y en a une qui occupe une place centrale lorsqu'on travaille dans un espace vectoriel normé. Il s'agit de la **boule unité** $B(0; 1)$ (ouverte) ou $\overline{B}(0; 1)$ (fermée)

centrée en l'origine 0 et de rayon 1. En utilisant des homothéties et des translations (qui sont des homéomorphismes, c'est-à-dire des bijections continues de réciproque continue, voir le Chapitre 2), on peut toujours ramener une boule à la boule unité.

Exemple 1.2.1. Dans $(\mathbb{R}, |.|)$ la boule ouverte centrée en a et de rayon r est simplement l'intervalle ouvert $]a - r, a + r[$. Ainsi, tout intervalle non vide ouvert borné est une boule ouverte.

Exemple 1.2.2. Si on regarde les boules dans $\mathbb{R}^2$ muni des normes classiques rappelées dans l'Exemple 1.1.5, il est facile de vérifier que la boule unité fermée est le disque de centre 0 et de rayon 1 pour $\|\cdot\|_2$, le carré plein défini par les points $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$ pour la norme $\|\cdot\|_1$, et le carré plein défini par les points $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$:



Exemple 1.2.3. Dans le cas de la distance discrète sur un ensemble E , il est assez facile de vérifier que si $r \leq 1$ alors $B(a; r) = \{a\}$, et si $r > 1$ alors $B(a; r) = E$. De la même manière, $\overline{B}(a; r) = \{a\}$ si $r < 1$ et $\overline{B}(a; r) = E$ si $r \geq 1$.

Exemple 1.2.4. Pour la distance SNCF, les boules ouvertes ont plusieurs formes. Si elles sont centrées en l'origine, il s'agit tout simplement des boules euclidiennes, pour $\|\cdot\|_2$, c'est-à-dire des disques. En revanche, une boule $B(A; r)$ centrée en un point A de $\mathbb{R}^2$ autre que l'origine peut avoir deux formes selon la valeur de r . Notons $\Delta = d(0, A)$.

Si $r \leq \Delta$, alors la boule est un segment ouvert centré en A et d'amplitude $2r$ et porté par la droite passant par A et l'origine. En effet, dans ce cas, si $X \in B(A; r)$ alors A, O et X doivent être alignés car sinon, on aurait $\Delta + \|X\|_2 < r$, ce qui n'est pas possible.

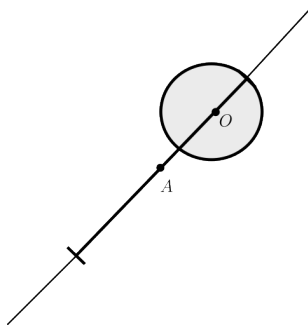


FIGURE 1.1 – Boule $B(A; r)$ pour $r > \Delta$

Si $r > \Delta$, alors la boule ressemble à une raquette dont le manche est un segment porté par la droite passant par A et l'origine, et le tamis est une boule euclidienne centrée en l'origine et de rayon $r - \Delta$, comme on peut le voir sur la figure 1.1 ci-dessous. En effet, si on considère $X \in B(A; r)$, alors on a deux situations. Si A , O et X sont alignés, alors X est sur le segment de centre A de longueur $2r$ et passant par l'origine O . Sinon, X est caractérisé par $\Delta + \|X\|_2 < r$, c'est-à-dire X est dans la boule centrée en O et de rayon $r - \Delta$.

Partie bornée

Prenons une partie A non vide d'un espace métrique (E, d) et considérons alors l'ensemble $\mathcal{I} = \{d(x, y) ; x, y \in A\} \subset \mathbb{R}$. C'est une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dira que A est **bornée** si $\mathcal{I}$ est majorée, c'est-à-dire si $\sup \mathcal{I} \in \mathbb{R}$. Cette borne supérieure s'appelle alors le **diamètre** de A .

On peut voir facilement que A est bornée si, et seulement si, il existe a dans E et $r > 0$ tels que A soit incluse dans la boule fermée ou ouverte selon ce qu'on veut, centrée en a et de rayon r . Par exemple, dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, une partie A est bornée si, et seulement si, il existe un réel $M > 0$ tel que $\|x\| \leq M$ pour tout x dans A (c'est-à-dire, A est incluse dans la boule fermée de centre 0 et de rayon M).

Attention, le fait d'être borné n'est pas une notion topologique mais plutôt métrique (voir la dernière remarque du Chapitre 5).

1.3 Les suites

Les suites constituent un ingrédient très important en topologie et en analyse. Il convient donc d'en maîtriser les subtilités. Nous ne donnons ici que quelques rappels élémentaires. Pour avoir un texte plus complet on peut consulter par exemple [11]. On considère dans cette partie une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans un espace métrique (E, d) .

1.3.1 Suites convergentes

On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers $\ell \in E$ si

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N) d(\ell, x_n) < \varepsilon.$$

Autrement dit, à partir d'un certain rang, les x_n sont dans la boule ouverte $B(\ell; \varepsilon)$. Notons qu'on peut donner la même définition en remplaçant l'inégalité stricte $<$ par l'inégalité large $\leq$, cela ne change absolument rien. L'élément ℓ est alors la **limite** de la suite convergente et, grâce aux propriétés de la distance, cette limite est unique. Remarquons qu'il est très facile de montrer qu'une suite convergente est bornée.

On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **diverge** si elle ne converge pas, c'est-à-dire, par négation :

$$(\forall \ell \in E) (\exists \varepsilon > 0) (\forall N \in \mathbb{N}) (\exists n \geq N) d(\ell, x_n) \geq \varepsilon.$$

Cette caractérisation est parfois utilisée pour montrer par l'absurde qu'une suite converge.