PC/PC*

Colles de mathématiques

Jacques Delfaud

NOUVEAUX PROGRAMMES !

410 EXERCICES CORRIGÉS

- Exercices de calcul
- Exercices de raisonnement
- Exercices avec questions ouvertes

ellipses

PC/PC*

Colles de **mathématiques**

PC/PC*

Colles de **mathématiques**

Jacques Delfaud

NOUVEAUX PROGRAMMES

Sous la direction de François Pantigny

ellipses

Collection Colles de Prépas
dirigée par François Pantigny

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur
www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-066557
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Bienvenue en PC (ou PC*) !

En arrivant en classe préparatoire, on peut avoir quelques appréhensions concernant les interrogations orales de mathématiques. Rapidement, elles deviendront moins impressionnantes et vous comprendrez que cette spécificité du système des « prépas » est extrêmement efficace pour assimiler les notions et progresser. Néanmoins, le cours étant conséquent, l'étudiant ne se sent pas toujours au point lorsqu'arrive l'interrogation. Nous lui proposons une gamme d'exercices acompagnée de rappels de cours pour lui permettre de s'entraîner davantage. Dans l'objectif d'une préparation efficace, les exercices de ce livre sont classés en trois catégories :

- Les « exercices axés sur le calcul ». Ils ont pour objectif, via la pratique calculatoire, de vérifier la connaissance et la compréhension des notions du cours.
- Les « exercices axés sur le raisonnement ». Ces exercices demandant plus de recul, leur objectif est de renforcer l'assimilation des concepts.
- Les « exercices avec questions ouvertes ». Ces exercices amènent l'étudiant à avoir sa propre réflexion, à construire sa démonstration ou son contre-exemple selon les cas.

Ce livre complet vous propose une grande variété d'exercices : du classique de concours à l'exercice orginal, de l'exercice d'application directe du cours à l'exercice abstrait. Les corrections figurent après la liste des énoncés.

Enfin permettons-nous un conseil. Parmi vos camarades de classe, les membres de votre « trinôme » seront ceux que vous côtoierez le plus. N'hésitez pas à en faire de véritables partenaires en partageant les exercices de ce livre. Vous pourrez soit travailler le même exercice et confronter vos solutions, soit travailler chacun un exercice différent, lire le corrigé proposé et exposer oralement une solution à vos camarades.

Nous vous souhaitons tous nos vœux de réussite.

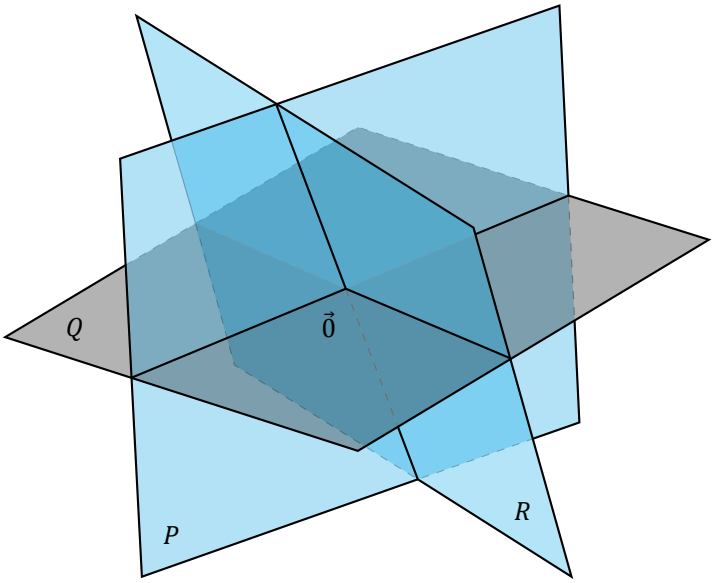
Bonne lecture !

Sommaire

1	Compléments d'algèbre linéaire	1
2	Réduction des endomorphismes	21
3	Endomorphismes des espaces euclidiens	67
4	Espaces vectoriels normés	103
5	Séries numériques	151
6	Suites et séries de fonctions	193
7	Séries entières	245
8	Intégrales généralisées	303
9	Suites et séries de fonctions intégrables	341
10	Intégrales à paramètres	369
11	Ensemble dénombrables, familles sommables	409
12	Variables aléatoires discrètes	425
13	Espérance et variance	451
14	Calcul différentiel	501

Compléments d'algèbre linéaire

1



Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ sp 3, trois hyperplans P, Q et R en position dite « quelconque » ont pour intersection le sous-espace nul $\{\vec{0}\}$. Plus généralement, dans un espace de dimension n, n hyperplans en position quelconque ont pour intersection $\{\vec{0}\}$.

Énoncés des exercices

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 ⋆

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -64 & 47 & 22 & -94 \\ 66 & 39 & 22 & -88 \\ 3 & 3 & -5 & -6 \\ 69 & 47 & 22 & -99 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}^4$ associé à A dans la base canonique $\mathcal{B}$.

1) Déterminer une base de $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot \mathrm{Id})$ pour $\lambda \in \{-8, -5, 17\}$.
2) Montrer que $E = E_{-8} \oplus E_{-5} \oplus E_{17}$.

Exercice 2 ⋆

Soient l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ et f l'endomorphisme de E représenté, sur la base $\mathcal{B}$, par la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

On définit $F = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 - e_3, e_2 + e_3 + 2e_4)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_1 + e_2 + e_4)$.

1) Montrer que F et G sont stables par f.
2) En déduire que A est semblable à une matrice blocs $B = \begin{pmatrix} M & 0_2 \\ 0_2 & N \end{pmatrix}$ où 0_2 désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(M, N) \in \left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right)^2$.

Exercice 3 ⋆

On considère les cinq points suivants de $\mathbb{R}^2$:

$(x_1, y_1) = (-2, 3)$, $(x_2, y_2) = (0, -1)$, $(x_3, y_3) = (1, 6)$, $(x_4, y_4) = (5, 24)$ et $(x_5, y_5) = (6, 7)$.

On veut déterminer un polynôme P dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_4[X]$ tel que, pour tout $i \in [\![1, 5]\!]$, on ait $P(x_i) = y_i$.

1) Montrer que $\mathcal{B} = \big(1, X + 2, (X + 2)X, (X + 2)X(X - 1), (X + 2)X(X - 1)(X - 5)\big)$ est une base de E, puis calculer les coordonnées de P dans cette base.
2) Montrer ensuite que la famille $\mathcal{B}' = \big(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\big)$ où $P_1 = X(X - 1)(X - 5)(X - 6)$, $P_2 = (X+2)(X-1)(X-5)(X-6)$, $P_3 = (X+2)X(X-5)(X-6)$, $P_4 = (X+2)X(X-1)(X-6)$ et $P_5 = (X + 2)X(X - 1)(X - 5)$ est une autre base de E, puis calculer les coordonnées de P dans cette base.

Exercice 4 ⋆⋆

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.
Soient F et G les sous-espaces vectoriels de E définis par :

$$F = \mathrm{Ker}(f) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Ker}(f^2 - 2f + 2 \cdot \mathrm{Id}_E).$$

1) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
2) Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme $g = f^2 - 2f + 2 \cdot \mathrm{Id}_E$ puis déterminer une base de G.
3) Montrer que F et G sont deux-sous espaces vectoriels stables par f.
4) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
5) Déterminer une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f soit de la forme :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}, \text{ avec } (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4.$$

Exercice 5 ⋆

1) Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation : $X + \mathrm{Tr}\,(X) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.
2) Soient n un entier naturel non nul et une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation : $AX - XA = I_n$.

Exercice 6 ⋆

Calculer le déterminant d'ordre $n \geqslant 2$ suivant :

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & -x & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & & 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} - x \end{vmatrix}.$$

Exercice 7 ⋆

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un nombre entier naturel non nul et l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On considère deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ puis on définit les trois endomorphisme u, v et w de E par :

$$\forall M \in E, \quad u(M) = AM, \quad v(M) = MB \text{ et } w(M) = AMB.$$

Déterminer la trace de chacun de ces trois endomorphismes.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 8 ⋆

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.
On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ représenté par A dans la base canonique $\mathcal{B}$.

1) Calculer M^p pour p entier naturel non nul quelconque.
2) Montrer que : $\mathbb{R}^n = \text{Im}(M) \oplus \text{Ker}(M)$.
3) Déterminer une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle u est représenté par la matrice N définie par :

$$N = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 ⋆

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que u^{-1} admet un polynôme annulateur (non nul) si, et seulement si, u admet un polynôme annulateur (non nul).

Exercice 10 ⋆

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel, E un espace vectoriel réel de dimension n et f un endomorphisme de E.

1) On suppose dans cette partie que $\text{Ker } f = \text{Im } f$.
   a) Montrer que n est pair.
   b) Déterminer le rang de f en fonction de n.
   c) Montrer que f^2 est l'endomorphisme nul.
2) On suppose dans cette partie que f^2 est l'endomorphisme nul et que $n = 2\,\text{rg}(f) = 2p$.
   a) Montrer que $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$.

b) En déduire que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

c) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_p & 0_p \\ I_p & 0_p \end{pmatrix}$ où I_p est la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et 0_p la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes sont nulles.

Exercice 11 ⋆

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et (f, g) un couple d'endomorphismes de E.

1) Montrer que si $f \circ g = g \circ f$, alors $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont stables par g.
2) Montrer que si $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$, alors :
   a) $E = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(g)$
   b) $\operatorname{Ker}(f \circ g) = \operatorname{Ker}(g)$ et $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker}(f)$
   c) $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(g)$ puis $\operatorname{rg}(f \circ g) = \operatorname{rg}(g \circ f)$

Exercice 12 ⋆

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n non nulle et f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
Le but de cet exercice est de montrer que la trace de l'endomorphisme f est nulle.

1) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathcal{B} = \left(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\right)$ soit une base de E.
2) Déterminer la matrice de f sur la base $\mathcal{B}$ puis conclure.

Exercice 13 ⋆⋆

Soient n et k deux entiers naturels non nuls et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice vérifiant $A^k = I_n$.
On pose $B = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$ puis on définit les endomorphismes u et v de $\mathbb{K}^n$ de matrices respectives A et B dans la base canonique.

1) Montrer que :
   a) $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \operatorname{Im}(v)$.
   b) $\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}(v)$.
   c) $\operatorname{Ker}(v) \oplus \operatorname{Im}(v) = \mathbb{K}^n$.
2) En déduire que $\operatorname{Tr}(B) = k \cdot \operatorname{rg}(B)$.

Exercice 14 ⋆⋆

Montrer que, pour tout entier non nul n, les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle sont semblables à des matrices de diagonale nulle.

Exercice 15 ⋆⋆⋆

Soient $(A, B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2$ et $C = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det C \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 16 ⋆⋆⋆

Soient $E = \mathbb{R}^3$ et u un endomorphisme de E tel que : $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$.

1) Soient $e_3 \in E$ tel que $u^2(e_3) \neq 0$, $e_2 = u(e_3)$ et $e_1 = u^2(e_3)$.
   Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.
2) Donner la matrice M de u sur la base $\mathcal{B}$ puis déterminer $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$.
3) Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de E stables par u.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 17 ⋆⋆⋆ *Déterminant de Vandermonde*

Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de n scalaires.
On définit le déterminant de Vandermonde d'ordre n, noté $V_n(x_1, x_2, ..., x_n)$, par :

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Montrer que l'on peut trouver un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que l'on ait :

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_n(x_n) \times V_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

et en déduire une expression de $V_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

1) On trouve :

$$E_{-8} = \mathrm{Vect}\big((1,0,1,1)\big), \quad E_{-5} = \mathrm{Vect}\big((0,2,0,1),(-1,1,1,0)\big) \text{ et } E_{17} = \mathrm{Vect}\big((1,1,0,1)\big).$$

2) Le calcul suivant :

$$\det(e_1', e_2', e'3, e'4) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

nous permet de conclure que $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$ est une famille libre à quatre éléments dans un espace E de dimension 4, donc que B' est une base de E, ce qui implique alors que $E = E_{-8} \oplus E_{-5} \oplus E_{17}$.

Exercice 2

On notera $a_1 = e_1 + e_2 - e_3$, $a_2 = e_2 + e_3 + 2e_4$, $a_3 = e_1 + e_3$ et $a_4 = e_1 + e_2 + e_4$.

1) Les égalités $f(a_1) = a_2$ et $f(a_2) = -a_1$ donnent F stable par f.
De même, $f(a_3) = -2a_4$ et $f(a_4) = a_3$ donnent G stable par f.

2) La famille $\mathcal{B}' = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ est une base de E car $\det_{\mathcal{B}}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 1 \neq 0$, ce qui implique que les sous-espaces vectoriels $F = \text{Vect}(a_1, a_2)$ et $G = \text{Vect}(a_3, a_4)$ sont supplémentaires dans E.
Comme de plus, ils sont stables par f, on obtient :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = B = \begin{pmatrix} M & 0_2 \\ 0_2 & N \end{pmatrix},$$

ce qui nous permet de conclure que A et B sont deux matrices semblables.

Exercice 3

1) La famille $\mathcal{B}$ est une famille libre de E car elle est formée de cinq polynômes de degrés deux à deux distincts et c'est donc une base puisque $\dim(E) = 5$.
Notons alors (a, b, c, d, e) les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire que l'on a :

$$P = a + b(X+2) + c(X+2)X + d(X+2)X(X-1) + e(X+2)X(X-1)(X-5).$$

On obtient alors successivement :

- $P(-2) = 3$ nous donne directement $a = 3$,
- $P(0) = -1$ nous donne $a + 2b = -1$, donc $b = -2$,
- $P(1) = 6$ nous donne $a + 3b + 3c = 6$, donc $c = 3$,
- $P(5) = 24$ nous donne $a + 7b + 35c + 140d = 24$, donc $d = -\frac{1}{2}$,
- $P(6) = 7$ nous donne $a + 8b + 48c + 240d + 240e = 7$, donc $e = -\frac{1}{60}$.

2) Supposons qu'il existe $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ tel que $aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4 + eP_5 = 0$.
Il suffit alors d'évaluer le polynôme $aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4 + eP_5$ successivement en -2, 0, 1, 5 et 6 pour obtenir $a = b = c = d = e = 0$, ce qui implique que la famille $\mathcal{B}'$ est libre, donc une base de E puisque son cardinal est égal à la dimension de E.
De même, si on a $P = aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4 + eP_5$, alors en évaluant P en -2, 0, 1, 5 et 6 on obtient immédiatement :

$$a = \frac{P(-2)}{336} = \frac{1}{112}, \quad b = \frac{P(0)}{-60} = \frac{1}{60}, \quad c = \frac{P(1)}{60} = \frac{1}{10},$$
$$d = \frac{P(5)}{140} = -\frac{6}{35} \quad \text{et} \quad e = \frac{P(6)}{240} = \frac{7}{240}.$$

Remarque

On trouve de deux manières différentes le polynôme d'interpolation de Lagrange dont la forme générale correspond à la question 2 :

$$P = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i \frac{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (X - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)} \right).$$

Si on développe le résultat de la première (ou deuxième) question on obtient l'expression du polynôme sur la base canonique (qui n'est vraiment pas adaptée dans ce cas car il faudrait résoudre un système de 5 équations à 5 inconnues), à savoir :

$$P(x) = -\frac{1}{60}x^4 - \frac{13}{30}x^3 + \frac{157}{60}x^2 + \frac{29}{6}x - 1.$$

Exercice 4

1) Comme $F = \mathrm{Ker}(f)$, alors on a :

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_2e_3 \in F \text{ donc } \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases},$$

ce qui implique que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_1')$ pour $e_1' = e_1 + e_3$.

2) Si on note B la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$, alors on trouve :

$$B = A^2 - 2A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice B est clairement de rang 1, donc $\dim\big(\mathrm{Ker}(g)\big) = 2$, et comme les colonnes de B sont toutes identiques, on obtient immédiatement que $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}(e_2', e_3')$ pour $e_2' = e_1 - e_2$ et $e_3' = e_1 - e_3$.

3) • Si $x \in F = \mathrm{Ker}(f)$, alors $f(x) = 0$ et comme f est linéaire, on a $f\big(f(x)\big) = f(0) = 0$, donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$, donc F est bien stable par f.

• Si $x \in G = \mathrm{Ker}(g)$, alors $f^2(x) - 2f(x) + 2x = 0$ ce qui implique, encore par linéarité de f :

$$0 = f^3(x) - 2f^2(x) + 2f(x) = f^2\big(f(x)\big) - 2f\big(f(x)\big) + 2f(x),$$

qui s'écrit aussi $g\big(f(x)\big) = 0$, donc $f(x) \in G$, donc G est bien stable par f.

4) Les trois vecteurs e_1', e_2' et e_3' forment une base de E car :

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1', e_2', e_3') = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

ce qui implique que $E = F \oplus G$.

5) $f(e_1') = 0$ car $e_1' \in \mathrm{Ker}(f)$ et comme G est stable par f on a :

$$\exists(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4,\ A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Remarque : Avec notre choix de e_2' et de e_3', $f(e_2') = 2e_2' - e_3'$ et $f(e_3') = 2e_2'$, ce qui nous donne $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

1) • Méthode 1 : par le calcul.

Si on pose $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors on est ramené à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} a + 2(a+d) = -1 \\ b + 4(a+d) = 5 \\ c + 7(a+d) = 6 \\ d + (a+d) = 1 \end{cases}$$

dont l'unique solution est $(a,b,c,d) = (-1,5,6,1)$, ce qui permet de conclure que l'unique solution de l'équation est :

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Méthode 2 : en utilisant les propriétés de la trace.

La trace étant une application linéaire, on a :

$$\mathrm{Tr}\left(X + \mathrm{Tr}\,(X) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\,(X) + \mathrm{Tr}\,(X) \cdot \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Tr}\,(X)(1+3).$$

Or, comme $\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = 0$, alors on a $4\,\mathrm{Tr}\,(X) = 0$, ce qui implique que $\mathrm{Tr}\,(X) = 0$.

On en déduit immédiatement que $X = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ est l'unique solution de l'équation.

2) Il suffit de remarquer d'une part que l'on a :

$$\mathrm{Tr}\,(AX - XA) = \mathrm{Tr}\,(AX) - \mathrm{Tr}\,(XA) = 0$$

par linéarité et cyclicité de la trace, puis d'autre part que :

$$\mathrm{Tr}\,(I_n) = n \neq 0,$$

pour conclure que cette équation n'admet aucune solution.

Exercice 6

En développant suivant la dernière ligne, on obtient :

$$\Delta_n(x) = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k+1} a_k D_k + (a_{n-1} - x)(-x)^{n-1},$$

où D_k est le déterminant par blocs suivant :

$$D_k = \left|\begin{array}{cc|cc} -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -x \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right| \left|\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{array}\right| \left|\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 \end{array}\right| = (-1)^k x^k.$$

Conclusion :

$$\forall n \geqslant 2,\ \Delta_n(x) = (-1)^n \left(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right).$$

Exercice 7

La trace d'un endomorphisme étant indépendante de la base choisie, on va bien évidemment utiliser la base canonique de E composée des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$ définies par $\left(E_{i,j}\right)_{k,\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}$, pour $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$.
Si on pose $A = (A_{i,j})_{i,j}$ et $B = (B_{i,j})_{i,j}$, alors on obtient :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad u(E_{i,j}) = AE_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} A_{k,\ell} E_{k,\ell} \right) E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{k,i} E_{k,j},$$

donc l'élément courant de la diagonale de la matrice représentant u sur la base canonique, qui se trouve en position $\big((i,j),(i,j)\big)$, est $A_{i,i}$.
On obtient alors : $\operatorname{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{i,i} = n \cdot \operatorname{Tr}(A)$.
De manière symétrique pour v, on obtient :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad v(E_{i,j}) = E_{i,j}B = E_{i,j} \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} B_{k,\ell} E_{k,\ell} \right) = \sum_{\ell=1}^{n} B_{j,\ell} E_{i,\ell},$$

donc l'élément courant de la diagonale de la matrice représentant v sur la base canonique, qui se trouve toujours en position $\big((i,j),(i,j)\big)$, est $B_{j,j}$.

On obtient ainsi : $\mathrm{Tr}\,(v) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{j,j} = n \cdot \mathrm{Tr}\,(B)$.
Pour l'endomorphisme w, on calcule :
$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$w(E_{i,j}) = AE_{i,j}B = \left(\sum_{k=1}^{n} A_{k,i}E_{k,j}\right)\left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} B_{r,s}E_{r,s}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} A_{k,i}B_{j,s}E_{k,s},$$

donc l'élément courant de la diagonale de la matrice représentant w sur la base canonique, qui se trouve encore en position $\big((i,j),(i,j)\big)$, est $A_{i,i}B_{j,j}$.
On obtient ainsi : $\mathrm{Tr}\,(w) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,i}B_{j,j} = \mathrm{Tr}\,(A) \cdot \mathrm{Tr}\,(B)$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 8

1) Il suffit de remarquer que l'on a $M^2 = nM$ pour conclure par une récurrence immédiate que, pour tout entier naturel non nul p, on a $M^p = n^{p-1}M$.

2) Si $\mathrm{rg}(M) = 1$, alors $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}(e_1')$ pour $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.
Or $\mathrm{Ker}(M)$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ de $\mathbb{R}^n$ qui admet pour équation : $x_1 + \cdots + x_n = 0$.
Comme e_1' ne vérifie pas cette équation on obtient : $\mathrm{Im}(M) \cap \mathrm{Ker}(M) = \{0\}$.
Il suffit alors d'utiliser la relation $\dim\big(\mathrm{Ker}(M)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(M)\big) = (n-1)+1 = n$ pour conclure que : $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(M) \oplus \mathrm{Ker}(M)$.

3) Soit la base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ obtenue en complétant la base (e_1') de $\mathrm{Im}(M)$ par une famille libre $(e_2', \ldots, e_n')$ formée de $n-1$ vecteurs de $\mathrm{Ker}(M)$.
On a alors $u(e_1') = ne_1'$ et $u(e_i') = 0$ pour $i \in [\![2,n]\!]$.
On obtient ainsi :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(u) = N = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9

Soient $N \in \mathbb{N}$ et $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \in \mathbb{K}_N[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à N.

CORRECTIONS

On a alors : $P(u) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k u^k = 0$

$\Leftrightarrow u^{-N} \sum_{k=0}^{N} a_k u^k = 0$ (car u inversible)

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k (u^{-1})^{N-k} = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N} a_{N-k} (u^{-1})^k = 0.$ (par changement d'indice)

Ainsi, en notant pour tout $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \in \mathbb{K}_N[X]$, $\tilde{P} = \sum_{k=0}^{N} a_{N-k} X^k$, on a montré que P annule u si, et seulement si, $\tilde{P}$ annule u^{-1}.

Exercice 10

1) a) Le théorème du rang donne : $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = n$, donc $n = 2\dim(\operatorname{Im} f)$, donc n est pair.

b) Si on note r le rang de f, alors on a : $r = \dim(\operatorname{Im} f) = \frac{n}{2}$.

c) Pour tout $x \in E$, on a :

$$f(x) \in \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f) \text{ donc } f\big(f(x)\big) = 0,$$

ce qui implique que f^2 est l'endomorphisme nul.

2) a) Si $y \in \operatorname{Im}(f)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, ce qui implique $f(y) = f^2(x) = 0$, donc $y \in \operatorname{Ker}(f)$, et nous donne alors $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

b) $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = n$ et $n = 2\,\mathrm{rg}(f)$, donc $\dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(\operatorname{Im} f) = \frac{n}{2} = p$. On en déduit que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ car le seul sous-espace vectoriel de $\operatorname{Ker} f$ de même dimension que $\operatorname{Ker} f$ est lui-même.

c) On choisit une famille libre $(e_1, \dots, e_p)$ d'un supplémentaire G de $\operatorname{Ker}(f)$ dans E.
On définit alors $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ par : pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $e_{p+i} = f(e_i)$.
On remarque que $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une famille de $\operatorname{Ker} f$ car $f(e_{p+i}) = f^2(e_i) = 0$ et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une famille libre car, s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_{p+i} = 0$, alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(e_i) = 0$, donc par linéarité de f on obtient $f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i\right) = 0$, ce qui implique que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \in \operatorname{Ker}(f) \cap G = \{0\}$, puis que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$ puisque $(e_1, \dots, e_p)$ est libre.
Alors, comme $\dim(\operatorname{Ker} f) = \frac{n}{2} = p$, la famille $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.
On a ainsi obtenu que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de E car G est un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(f)$ et on a :
$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$ où I_p est la matrice identité de dimension $p = \frac{n}{2}$.

Exercice 11

1) • Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Alors $f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big) = g(0)$ car $x \in \text{Ker}(f)$ et comme g est linéaire on obtient : $f\big(g(x)\big) = g(0) = 0$. Donc $g(x) \in \text{Ker}(f)$, donc $\text{Ker}(f)$ est stable par g.
• Soit $y \in \text{Im}(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et donc :

$$g(y) = g\big(f(x)\big) = f\big(g(x)\big) \in \text{Im}(f).$$

On a ainsi bien montré que $\text{Im}(f)$ est stable par g.

2) a) • Soit $x \in E$. On peut écrire $x = \big(f \circ g(x)\big) + \big(x - f \circ g(x)\big)$.
Or $f \circ g(x) \in \text{Im}(f)$ et $g\big(x - f \circ g(x)\big) = g(x) - g \circ f \circ g(x) = 0$, ce qui implique que $x - f \circ g(x) \in \text{Ker}(g)$, donc que $E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(g)$.
• Soit $x \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g)$: il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$ et $g(x) = 0$. Alors : $x = f(a) = f \circ g \circ f(a) = f \circ g(x) = f(0) = 0$, donc $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g) = \{0\}$.
Conclusion : $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(g)$.

b) • Pour tout $x \in \text{Ker}(g)$, on a $g(x) = 0$, ce qui implique que $f\big(g(x)\big) = f(0) = 0$ (puisque f est linéaire), donc que $x \in \text{Ker}(f \circ g)$.
On a ainsi montré que $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f \circ g)$.
• Réciproquement, si $x \in \text{Ker}(f \circ g)$, alors $f \circ g(x) = 0$, donc $g \circ f \circ g(x) = g(0) = 0$ (puisque g est linéaire), donc $g(x) = 0$, ce qui nous donne $x \in \text{Ker}(g)$. On obtient alors $\text{Ker}(f \circ g) \subset \text{Ker}(g)$.
On a les deux inclusions, donc $\text{Ker}(f \circ g) = \text{Ker}(g)$.
On montre de la même façon que $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$.

c) Le (2a.) et le théorème du rang impliquent imédiatement $\text{rg}(f) = \text{rg}(g)$ et cela implique, avec le (2b.), que $\text{rg}(f \circ g) = \text{rg}(g \circ f)$.

Exercice 12

1) Comme $f^{n-1} \neq 0$, alors il existe $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.
La famille $\mathcal{B} = \big(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\big)$ ayant n éléments, c'est une base si, et seulement si, elle est libre.
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une famille de réels telle que $\lambda_1 x + \lambda_2 f(x) + \cdots + \lambda_n f^{n-1}(x) = 0$.
En appliquant par f, qui est linéaire, nous obtenons : $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) + \cdots + \lambda_n f^n(x) = 0$ et donc, puisque $f^n = 0$, on obtient $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0$.
On recommence alors $n - 2$ fois jusqu'à obtenir $\lambda_1 f^{n-1}(x) = 0$, ce qui implique $\lambda_1 = 0$ puisque l'on a choisi x tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.
En remontant toutes les équations obtenues, on trouve : $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, ce qui implique que $\mathcal{B}$ est une famille libre et donc une base de E.

2) En calculant les vecteurs $f(e_i)$, on trouve :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui implique immédiatement $\mathrm{Tr}\,(f) = 0$.

Exercice 13

1) a) Procédons par double inclusion.

- Si $y \in \mathrm{Im}(v)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = v(x)$.
  On a donc :

$$\begin{aligned}(u - \mathrm{Id})(y) &= u(y) - y = u(v(x)) - v(x)\\ &= u\left(x + u(x) + \cdots + u^{k-1}(x)\right) - \left(x + u(x) + \cdots + u^{k-1}(x)\right)\\ &= \left(u(x) + u^2(x) + \cdots + u^k(x)\right) - \left(x + u(x) + \cdots + u^{k-1}(x)\right)\\ &= u^k(x) - x = 0\end{aligned}$$

  car $u^k = \mathrm{Id}$. On a donc $y \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$, ce qui implique que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.
- Si $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$, alors $u(x) - x = 0$, ce qui équivaut à $u(x) = x$, et qui nous donne alors, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $u^j(x) = x$.
  On obtient ainsi, puisque k est un entier naturel non nul et par définition de v :

$$x = \frac{1}{k} \cdot \left(x + u(x) + \cdots + u^{k-1}(x)\right) = \frac{1}{k} \cdot v(x) = v\left(\frac{1}{k} \cdot x\right) \in \mathrm{Im}(v),$$

  ce qui implique alors que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Im}(v)$.

On a donc bien $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(v)$.

b) Nous allons montrer une inclusion et l'égalité des dimensions :

- Si $y \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x) - x$, ce qui implique que $v(y) = v\big(u(x)\big) - v(x)$ car v est linéaire, puis :

$$\begin{aligned}v(y) &= \left(\mathrm{Id} + u + \cdots + u^{k-1}\right)\left(u(x)\right) - \left(\mathrm{Id} + u + \cdots + u^{k-1}\right)(x)\\ &= u(x) + \cdots + u^k(x) - \left(x + u(x) + \cdots + u^{k-1}(x)\right)\\ &= u(x) + \cdots + u^{k-1}(x) + x - \left(x + u(x) + \cdots + u^{k-1}(x)\right) \qquad \text{car } u^k(x) = x\\ &= 0\end{aligned}$$

  donc $y \in \mathrm{Ker}(v)$, ce qui implique que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(v)$.
- Le théorème du rang appliqué aux endomorphismes $u - \mathrm{Id}$ et v donne :

$$\dim\left(\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})\right) + \dim\left(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})\right) = n,$$

  et :

$$\dim\left(\mathrm{Im}(v)\right) + \dim\left(\mathrm{Ker}(v)\right) = n.$$

  Or, nous avons démontré à la question précédente que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(v)$, donc nous en concluons que $\dim\left(\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}(v)\right)$.
  Or $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et le seul sous-espace vectoriel de $\mathrm{Ker}(v)$ qui soit de la même dimension que lui-même est $\mathrm{Ker}(v)$, donc $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(v)$.

c) Pour montrer que $\mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(v) = \mathbb{K}^n$, il suffit de montrer que l'on a $\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(v) = \{0\}$ car nous savons que $\dim\big(\mathrm{Im}(v)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(v)\big) = \dim(\mathbb{K}^n)$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$, d'après la question 1.a.
Donc $v(x) = 0$ et $u(x) = x$, ce qui donne, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $u^j(x) = x$. On obtient ainsi :

$$\begin{cases} v(x) = 0 \\ v(x) = x + u(x) + \cdots + u^{k-1}(x) = kx \end{cases}$$

ce qui implique $kx = 0$, donc $x = 0$ puisque $k \neq 0$.
Nous avons donc bien $\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(v) = \{0\}$ et donc $\mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(v) = \mathbb{K}^n$.

2) Comme la restriction de l'endomorphisme v à $\mathrm{Im}(v)$ reste linéaire et que, par définition de $\mathrm{Im}(v)$, son image reste dans $\mathrm{Im}(v)$, alors on peut considérer l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(v)$ induit par v, que nous noterons $v_{\mathrm{Im}(v)}$.
Si on choisit une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(v)$ nous aurons $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0_{p,p} & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & C \end{pmatrix}$ avec $p = \dim\big(\mathrm{Ker}(v)\big)$, $q = \dim\big(\mathrm{Im}(v)\big) = \mathrm{rg}(B)$ et C la matrice de l'endomorphisme de $v_{\mathrm{Im}(v)}$.
Nous obtenons donc : $\mathrm{Tr}\,(B) = \mathrm{Tr}\,(C) = \mathrm{Tr}\,\big(v_{\mathrm{Im}\,v}\big)$.
Or $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ implique que :

$$\forall x \in \mathrm{Im}(v),\ u(x) = x,$$

ce qui implique que l'on peut également considérer l'endomorphisme $u_{\mathrm{Im}\,v} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\,v}$ induit par u sur $\mathrm{Im}(v)$.
On obtient ainsi :

$$\mathrm{Tr}\,\big(u_{\mathrm{Im}\,v}\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(v)\big) = \mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}(B).$$

En remarquant que, pour tout entier j, $u_{\mathrm{Im}\,v} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\,v}$ donne $(u^j)_{\mathrm{Im}\,v} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\,v}$ nous avons également :

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \mathrm{Tr}\,\big((u^j)_{\mathrm{Im}\,v}\big) = \mathrm{rg}(v).$$

Or la trace est une application linéaire, donc :

$$\mathrm{Tr}\,(B) = \mathrm{Tr}\,\big(v_{\mathrm{Im}(v)}\big) = \mathrm{Tr}\,\big(\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}(v)}\big) + \mathrm{Tr}\,\big(u_{\mathrm{Im}(v)}\big) + \cdots + \mathrm{Tr}\,\big((u^{k-1})_{\mathrm{Im}(v)}\big) = k \cdot \mathrm{rg}(v).$$

Exercice 14

Nous allons montrer cette propriété par récurrence sur le format n de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ supposée de trace nulle.

- Initialisation : Pour $n = 1$, une matrice A est de trace nulle si, et seulement si, elle est nulle, donc le résultat est trivial.
- Hérédité : Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle sont semblables à des matrices de diagonale nulle, et considérons $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ une matrice de trace nulle.
  Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1})$ canoniquement associée à A.
  Si u est une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $A = \lambda I_{n+1}$, donc $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$ implique

CORRECTIONS

$\lambda = 0$, donc A est nulle et elle est bien semblable à une matrice à coefficients nuls : elle-même.
Si u n'est pas une homothétie, alors il existe $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ non nul tel que la famille $\big(x, u(x)\big)$ soit libre. On la complète en une base $\mathcal{B}' = \big(x, u(x), e_3, \dots, e_{n+1}\big)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.
On obtient alors une matrice par blocs $M_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & M' \end{pmatrix}$ où $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Comme $\operatorname{Tr}(M') = \operatorname{Tr}(u) = \operatorname{Tr}(A) = 0$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à M', donc il existe $P' \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $N' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux nuls tels que :

$$M' = P'N'P'^{-1}.$$

On effectue alors les produits par blocs suivants :

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}'}(u) &= \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & P'N'(P')^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & P' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & LP' \\ (P')^{-1}C & N' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & (P')^{-1} \end{pmatrix} \\ &= PNP^{-1}, \end{aligned}$$

en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & P' \end{pmatrix}$ $\big($inversible car $\det(P) = \det(P') \neq 0\big)$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & LP' \\ (P')^{-1}C & N' \end{pmatrix}$ qui est une matrice à coefficients diagonaux tous nuls.
Comme A est semblable à N, cela prouve le résultat au rang $n+1$, puis la propriété par récurrence.

Exercice 15

En remplaçant les colonnes $C_1, \dots, C_n$ par respectivement $C_1 + iC_{n+1}, \dots, C_n + iC_{2n}$, on obtient :

$$\det C = \begin{vmatrix} A + iB & B \\ -B + iA & A \end{vmatrix},$$

puis en remplaçant les lignes $L_{n+1}, \dots, L_{2n}$ de la nouvelle matrice par respectivement les lignes $L_{n+1} - iL_1, \dots, L_{2n} - iL_n$, on obtient :

$$\det C = \begin{vmatrix} A + iB & B \\ 0 & A - iB \end{vmatrix} = \det(A + iB) \times \det(A - iB).$$

Les matrices A et B étant à coefficients réels, les deux nombres complexes $\det(A + iB)$ et $\det(A - iB)$ sont conjugués et on obtient alors :

$$\det C = \big|\det(A + iB)\big|^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Exercice 16

1) Commençons par montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.
S'il existe trois scalaires λ_1, λ_2 et λ_3 tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$, alors on obtient $\lambda_1 u(e_1) + \lambda_2 u(e_2) + \lambda_3 u(e_3) = u(0) = 0$ car u est linéaire et donc, en utilisant la définition de e_1 et de e_2, on obtient :

$$\lambda_1 u^3(e_3) + \lambda_2 u^2(e_3) + \lambda_3 u(e_3) = 0 \text{ donc } \lambda_2 e_1 + \lambda_3 e_2 = 0.$$

En appliquant u aux deux membres de l'égalité précédente on obtient :

$$\lambda_2 u(e_1) + \lambda_3 u(e_2) = 0 \text{ et donc } \lambda_3 e_1 = 0.$$

Or, par hypothèse $e_1 \neq 0$, donc $\lambda_3 = 0$.
La relation $\lambda_2 e_1 + \lambda_3 e_2 = 0$ nous donne alors $\lambda_2 = 0$ et donc $\lambda_1 = 0$.
On a ainsi montré que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une famille libre de E, et comme son nombre d'éléments est la dimension de E, $\mathcal{B}$ est une base de E.

2) Si M est la matrice de u sur la base $\mathcal{B}$, on trouve immédiatement :

$$M = \begin{array}{c} \begin{matrix} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \quad \text{car } u(e_1) = 0, u(e_2) = e_1 \text{ et } u(e_3) = e_2.$$

On obtient aussi $\text{Im}(u) = \text{Vect}(e_1, e_2)$.
Le théorème du rang nous donne alors $\dim\big(\text{Ker}(u)\big) = 1$ et comme $e_1 \in \text{Ker}(u)$, alors on a $\text{Ker}(u) = \text{Vect}(e_1)$.

3) Nous allons étudier les sous-espaces stables en fonction de leur dimension.
- $\{0\}$ et E étant stables par tous les endomorphismes de E, il reste uniquement à déterminer les espaces stables de dimensions 1 et 2.
- Les sous-espaces vectoriels F de E de dimension 1, stables par u, sont les droites vectorielles engendrées par un vecteur non nul x de E tel que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ u(x) = \lambda \cdot x.$$

Or, comme u est un endomorphisme nilpotent d'ordre 3, alors il existe $k \leqslant 3$ tel que $u^k(x) = 0$ et $u^{k-1}(x) \neq 0$.
On obtient ainsi :

$$0 = u^k(x) = \lambda u^{k-1}(x) \text{ donc } \lambda = 0.$$

On en déduit que $F = \text{Ker}(u)$, ce qui est bien compatible avec la question (2.) où l'on a obtenu $\dim\big(\text{Ker}(u)\big) = 1$.
- Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2, stable par u, alors il admet dans la base $\mathcal{B}$ une équation du type : $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$.
On considère alors $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in F$.
Comme F est stable par u, les vecteurs $u(x) = x_2 e_1 + x_3 e_2$ et $u^2(x) = x_3 e_1$ sont dans F, donc $u(x)$ et $u^2(x)$ vérifient l'équation de F, ce qui donne : $a_1 x_2 + a_2 x_3 = 0$ et $a_1 x_3 = 0$.

CORRECTIONS

Si $a_1 \neq 0$, alors $x_3 = 0$ et donc $x_2 = x_1 = 0$ d'après les équations précédentes, ce qui implique $F = \{0\}$, ce qui est faux puisque sa dimension est ici supposée égale à 2.
On a donc $a_1 = 0$ et de la même manière on montre que $a_2 = 0$.
L'équation de F est donc $x_3 = 0$, c'est-à-dire que $F = \mathrm{Im}(u)$.

Conclusion : Les sous-espaces vectoriels de E, stables par u, sont $\{0\}$, $\mathrm{Ker}(u)$, $\mathrm{Im}(u)$ et E.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 17

Supposons qu'il existe un tel polynôme P_n, défini par $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

On sait que l'on ne change pas la valeur d'un déterminant si, à une colonne, on ajoute une combinaisons linéaire des autres. Donc $V_n(x_1, \dots, x_n)$ sera inchangé si l'on ajoute à la colonne C_n la somme $\sum_{k=0}^{n-2} a_k C_{k+1}$. On obtient ainsi :

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \cdots x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 \cdots x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \cdots x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \cdots x_1^{n-2} & x_1^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k x_1^k \\ 1 & x_2 & x_2^2 \cdots x_2^{n-2} & x_2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k x_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \cdots x_n^{n-2} & x_n^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k x_n^k \end{vmatrix}$$

ce qui s'écrit également, si on impose à P_n d'être unitaire (donc si on pose $a_{n-1} = 1$) :

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \cdots x_1^{n-2} & P_n(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 \cdots x_2^{n-2} & P_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \cdots x_n^{n-2} & P_n(x_n) \end{vmatrix}.$$

Il suffit alors d'avoir $P_n(x_1) = P_n(x_2) = \cdots = P_n(x_{n-1}) = 0$, pour obtenir :

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \cdots x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \cdots x_2^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \cdots x_n^{n-2} & P_n(x_n) \end{vmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à développer cette dernière forme du déterminant de Vandermonde par rapport à sa dernière colonne pour obtenir : $V_n(x_1, \dots, x_n) = P_n(x_n)V_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$.
Pour obtenir un polynôme unitaire de degré $n-1$ qui admet pour racines $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, il suffit alors de choisir $P_n = \prod_{j=1}^{n-1}(X - x_j)$.
On obtient ainsi, en réitérant le processus :

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=3}^{n} P_i(x_i)V_2(x_1, x_2).$$

Or, comme $V_2(x_1, x_2) = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 2}(x_i - x_j)$, et comme :

$$\forall i \in [\![3, n]\!],\ P_i(x_i) = \prod_{j=1}^{i-1}(x_i - x_j),$$

on obtient finalement :

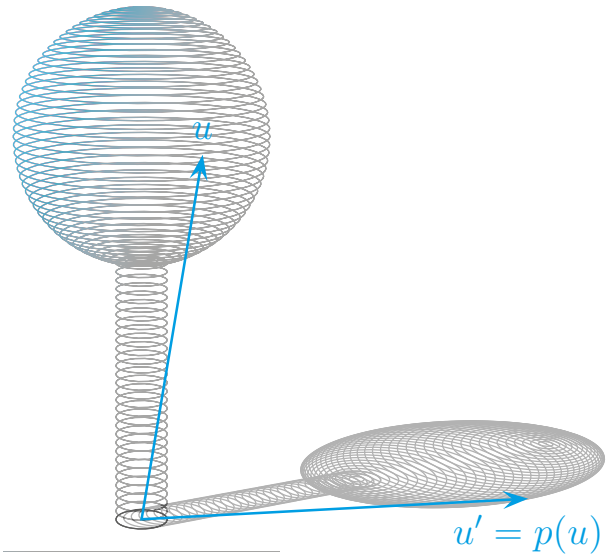
$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n}(x_i - x_j).$$

CORRECTIONS

« *Le rang ne peut que diminuer par composition.* »

Réduction des endomorphismes

2



Parmi les endomorphismes les plus importants, figurent les projecteurs, comme le projecteur sur le plan horizontal, parallèlement aux rayons du soleil. Les projecteurs sont diagonalisables. Ce sont même *les* endomorphismes diagonalisables ayant 0 et 1 comme valeurs propres.

Énoncés des exercices

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 ⋆

Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{C}^3$ représenté sur la base canonique $\mathcal{B}$ de E par la matrice A de $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(3)$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
2) Donner une base de E dans laquelle f est représenté par une matrice diagonale que l'on précisera.

Exercice 2 ⋆

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ces matrices.
2) Diagonaliser, quand c'est possible, ces matrices.

Exercice 3 ⋆

1) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par $f(P) = P - \alpha P'$, où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
2) Déterminer le spectre de $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par $f(P) = XP$.
3) Déterminer le polynôme caractéristique de $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ défini par $f(P) = P - XP'$.

Exercice 4 ⋆

Soient a, b, c et d quatre nombres réels et l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

1) On suppose dans cette question que a, b, c et d sont deux à deux distincts.
Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.
2) On suppose maintenant que a, b et d sont deux à deux distincts et que $c = b$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et d pour que f soit diagonalisable.

Exercice 5 ⋆

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice sur la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer les valeurs de a telles que -1 soit une valeur propre de f.
2) On suppose dans cette question que $a = 0$.
   a) Déterminer la dimension du sous-espace propre E_{-1}.
   b) En déduire le polynôme caractéristique χ_f de f sans calculer $\det(A - \lambda I_3)$.
   c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? inversible ?

Exercice 6 ⋆

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ représenté par la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

1) Justifier, sans calcul, que 2 est valeur propre de f.
2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que f soit diagonalisable.
3) Montrer que si $\alpha = 2$, alors $A - 2I_3$ est nilpotente.

Exercice 7 ⋆

Montrer que, quel que soit l'entier naturel non nul n, la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1 est diagonalisable.

Exercice 8 ⋆⋆

Obtenir, de deux façons différentes, une condition nécessaire et suffisante sur le sextuplet $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 9 ⋆⋆

Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{C}^3$ représentés respectivement, dans la base canonique, par les matrices A et B de $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(3)$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}, \text{ où } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3.$$

1) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. Que peut-on en conclure ?
2) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de A^2.
3) Écrire B comme combinaison linéaire de I, A et A^2 et en déduire, sans calculer son polynôme caractéristique, les valeurs propres de B.

Exercice 10 ⋆⋆

Soient n un entier naturel non nul et $E = \mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et de degré inférieur ou égal à n. On définit l'application u sur E qui à tout polynôme P de E lui associe $u(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$.

1) Justifier que u est un endomorphisme de E.
2) Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 11 ⋆

On considère un nombre réel α et la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} 3-\alpha & -5+\alpha & \alpha \\ -\alpha & \alpha-2 & \alpha \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

1) Montrer qu'il existe une unique valeur de α pour laquelle la matrice A_α est diagonalisable.
2) Déterminer, pour cette valeur de α, la matrice $(A_\alpha)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 12 ⋆

Calculer, pour tout entier naturel n, A^n pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 13 ⋆

Trouver une matrice carrée M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ telle que :

$$M^2 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14 ⋆⋆

Une population se compose de trois parties dont les nombres d'individus à l'année n sont respectivement u_n, v_n et w_n.
L'évolution de cette population suit la loi suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 100 \\ v_0 = 100 \\ w_0 = 100 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} u_{n+1} = v_n + 3w_n \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \\ w_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n \end{cases}.$$

On pose, pour tout entier naturel n, $X_n = (u_n, v_n, w_n)$.
Montrer que la suite $(X_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 15 ⋆⋆

Résoudre sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}\right)x(t) - \frac{1}{2}y(t) + \frac{1}{2}z(t) - \frac{1}{2}u(t) \\ y'(t) = -\frac{1}{2}x(t) + \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}\right)y(t) + \frac{1}{2}z(t) - \frac{1}{2}u(t) \\ z'(t) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}y(t) + \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}\right)z(t) + \frac{1}{2}u(t) \\ u'(t) = -\frac{1}{2}x(t) - \frac{1}{2}y(t) + \frac{1}{2}z(t) + \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}\right)u(t) \end{cases}$$

Exercice 16 ⋆⋆

Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 ⋆

On considère, sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, les matrices A, D et U par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et $F = \{M \in E \mid AM = MD\}$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E admettant pour base (U, A).
2) Montrer que l'application f définie de E dans E par : $\forall M \in E, f(M) = AM - MD$ est linéaire sur E.
3) Déterminer les solutions sur E de $f(M) = M$ puis de $f(M) = -M$.
4) Montrer que f est un endomorphisme diagonalisable de E et en donner son spectre.

Exercice 18 ⋆⋆

Déterminer une matrice triangulaire supérieure semblable à la matrice A dans les cas suivants :

1) $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 7 & -3 & -3 \\ 5 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -2 \\ -7 & 14 & 6 & -8 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ -10 & 19 & 9 & -10 \end{pmatrix}$.

Exercice 19 ⋆⋆

On notera $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis $A = E_{1,1} + E_{2,2}$ et $B = E_{1,2} + E_{2,1}$.

On considère l'application f qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, lui associe la matrice $f(M) = \frac{a+d}{2}A + \frac{b+c}{2}B$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2) Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
3) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
4) Montrer que : $M \in \mathrm{Vect}(A, B) \Rightarrow f(M) = M$.
5) On note $\mathrm{Inv}(f) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M = f(M)\}$. Montrer que $\mathrm{Inv}(f) = \mathrm{Im}(f)$.
6) Montrer que $\{0, 1\} \subset \mathrm{Sp}(f)$.
7) Montrer que $\mathcal{B}' = (E_{1,1} - E_4, E_{1,2} - E_{2,1}, A, B)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
8) En déduire, sans calculer de déterminant, le spectre de f.
9) Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 20 ⋆

Soient E un espace vectoriel de dimension n non nul et u un endomorphisme de E tel que $u^2 = \mathrm{Id}_E$. On note $p = \dim\big(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)\big)$ et $q = \dim\big(\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)\big)$.
Montrer que :

1) a) $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = \{0\}$.
   b) $\mathrm{Im}(u + \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$.
   c) $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$.
2) a) $p + q = n$
   b) u est diagonalisable.

Exercice 21 ⋆

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n finie. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.
On définit alors $g = \mathrm{Id}_E + if$ et $h = \mathrm{Id}_E - if$, puis $G = g(E)$ et $H = h(E)$.

1) Montrer que $E = G \oplus H$.
2) En déduire que f est diagonalisable, les valeurs propres étant toutes égales à i ou à $-i$.

Exercice 22 ⋆⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$.
On considère g et u deux endomorphismes de E tels que $g \circ u - u \circ g = 2u$.

1) Soit x un vecteur propre de g associé à une valeur propre α.
Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N},\ g\big(u^p(x)\big) = (\alpha + 2p) \cdot u^p(x)$.
2) Montrer que si g est diagonalisable, alors u est nilpotent.

Exercice 23 ⋆⋆

Soient E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$.
Soit u un endomorphisme nilpotent de E de polynôme caractéristique χ_u.

1) Montrer que $\chi_u(\lambda) = \lambda^n$.
2) Soit v un automorphisme qui commute avec u et soit $f = u + v$.
Montrer que f et v ont les mêmes valeurs propres.
3) Montrer que $w = v^{-1} \circ u$ est nilpotent.
4) En déduire que $\det(f) = \det(v)$.

Exercice 24 ⋆⋆

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ et un endomorphisme f de E qui admet pour valeur propre $\lambda = \dfrac{e^{2i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}}$.

1) Déterminer le polynôme caractéristique de f.
2) Justifier que $f \circ f + \frac{1}{\sqrt{2}} f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E = 0$.
3) Soit a un vecteur non nul de E.
   a) Montrer que $\mathcal{B} = \big(a, f(a)\big)$ est une base de E.
   b) Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
   c) Calculer, pour tout entier n, la valeur de A^n.
4) Montrer que, pour tout $x \in E$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f^n(x) = 0$.

Exercice 25 ⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension n non nul sur $\mathbb{K}$. On considère u et v deux endomorphismes de E où u possède n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$.
Montrer que u et v commutent ($u \circ v = v \circ u$) si, et seulement si, tout vecteur propre de u est vecteur propre de v.

Exercice 26 ⋆

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
On considère $(f, g) \in \big(\mathcal{L}(E)\big)^2$ avec $\text{rg}(f) = n$ et $\text{rg}(g) = 1$.
Montrer que $f + g$ est un automorphisme de E si, et seulement si, $\text{Tr}\left(g \circ f^{-1}\right) \neq -1$.

Exercice 27 ⋆⋆ *Théorème de Cayley-Hamilton*

Soient n un entier naturel non nul supérieur ou égal à 2, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et f un endomorphisme de E.
Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de *Cayley-Hamilton* :

$$\text{si } \chi_f \text{ est le polynôme caractéristique de } f, \text{ alors } \chi_f(f) = 0.$$

1) Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$.
On considère le polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.
On définit la matrice compagnon $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de P par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Déterminer le polynôme caractéristique de M en fonction de P.

2) On considère un vecteur non nul x de E.
Justifier qu'il existe un entier naturel p strictement inférieur à n tel que :
- la famille $\big(x, f(x), \dots, f^p(x)\big)$ soit libre
- la famille $\big(x, f(x), \dots, f^{p+1}(x)\big)$ soit liée

3) On note alors $G = \text{Vect}\big(x, f(x), \dots, f^p(x)\big)$ et g la restriction de f à G.
Justifier que $g \in \mathcal{L}(G)$ et donner sa matrice dans la base $\big(x, f(x), \dots, f^p(x)\big)$ de G ainsi que son polynôme caractéristique χ_g.

4) En déduire que $\chi_f(f) = 0$.

Exercice 28 ⋆⋆⋆

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.
On définit la matrice $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ par :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs propres de la matrice B, ainsi que leurs multiplicités, en fonction de celles de A.

Exercice 29 ⋆⋆

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.
Déterminer le polynôme caractéristique de M en fonction de celui de A.

Exercice 30 ⋆⋆

Soient n un entier naturel non nul et a un nombre réel. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et de degrés inférieurs ou égaux à $2n$, puis on définit une application f de E sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall P \in E, \quad f(P) = X(X+1)P' - aXP$$

où P' représente le polynôme dérivé de P.

1) Déterminer toutes les valeurs de a dans $\mathbb{R}$ pour que f soit un endomorphisme de E.
2) Montrer que, si f est un endomorphisme de E, alors il est diagonalisable.

Exercice 31 ⋆⋆

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire dans E stable par f.

Exercice 32 ⋆⋆

On considère $E = \mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à une indéterminée X et à coefficients réels.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n le sous-espace vectoriel de E des polynômes de degré inférieur ou égal à n et $\mathcal{B}_n$ la base canonique $(X^0, X, X^2, \dots, X^n)$.

1) On considère $n \in \mathbb{N}$ et l'application $u_n : \left| \begin{array}{ccc} E_n & \to & E \\ P & \mapsto & u_n(P) = P'' - 2XP' \end{array} \right.$.
   a) Montrer que u_n est un endomorphisme de E_n.
   b) Donner la matrice de u_n dans la base $\mathcal{B}_n$.
   c) Déterminer le spectre de u_n et justifier que u_n est diagonalisable.
2) On considère l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = e^{-x^2} \end{array} \right.$.
   a) Montrer que la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la fonction f est de la forme $f^{(n)} = f \times H_n$ où $H_n \in E_n$ et vérifie $H_{n+1} = H_n' - 2XH_n$, puis que $\mathcal{B}_n' = (H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base de E_n.
   b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $H_{n+1} = -2XH_n - 2nH_{n-1}$.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a $H_n' = -2nH_{n-1}$.
   d) Montrer que, pour tout couple d'entiers (k, n) tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, H_k est un vecteur propre de u_n et donner la valeur propre correspondante.
   e) Donner la matrice de u_n dans la base $\mathcal{B}_n'$.

Exercice 33 ⋆⋆⋆

Soient un entier naturel $n \geqslant 2$, une famille $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et un polynôme $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ défini par :

$$Q = a_1 + a_2 X + \cdots + a_n X^{n-1}.$$

On considère ensuite les matrices A et M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_3 & & \ddots & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et déterminer son spectre.
2) En déduire que $\det(M) = \prod_{k=0}^{n-1} Q\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 34 ⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Déterminer les matrices M carrées d'ordre n, à coefficients réels, telles que :

$$M^5 = M^2 \quad \text{et} \quad \operatorname{Tr}(M) = n.$$

2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^3 + M = 2I_n$.
   a) Que peut-on dire de M ?
   b) On suppose de plus que $\operatorname{Sp}(M) \subset \mathbb{R}$. Que dire de M ?

Exercice 35 ⋆⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension n non nulle.
On considère un endomorphisme u de E tel que u^2 soit diagonalisable.

1) L'endomorphisme u est-il toujours diagonalisable ?
2) Montrer que, si u diagonalisable, alors $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u^2)$.

Exercice 36 ⋆⋆

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie.
Existe-t-il toujours une droite ou un plan de E stable par f ?

Exercice 37 ⋆⋆

On considère un entier $n \geqslant 2$ et le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
Soient trois nombres réels non nuls a, b et c et l'endomorphisme f de E représenté sur la base $\mathcal{B}$ par la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & c \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b et c pour que l'endomorphisme f soit diagonalisable.

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

1) On commence par déterminer le polynôme caractéristique :

$$\chi_A = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

$$= \begin{vmatrix} X & 0 & -X \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}$$

$$= X \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}$$

$C_3 \leftarrow C_3 + C_1$

$$= X \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & X & -2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}$$

$$= X \begin{vmatrix} X & -2 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X(X^2 - 1) = X\left(X - \sqrt{2}\right)\left(X + \sqrt{2}\right)$$

On en déduit que le spectre de A est : $\mathrm{Sp}(A) = \left\{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$.
Sous-espaces propres :

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_0 \Leftrightarrow \begin{cases} -b = 0 \\ -a - c = 0 \\ -b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -c \end{cases}$$

De même, on a :

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_{\pm\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \pm\sqrt{2}a - b = 0 \\ -a + \pm\sqrt{2}b - c = 0 \\ -b + \pm\sqrt{2}c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \pm\sqrt{2}a \\ b = \pm\sqrt{2}c \end{cases}$$

On trouve ainsi :

$$E_0 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E_{\sqrt{2}} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_{-\sqrt{2}} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) On en déduit immédiatement que :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

1) • On commence par déterminer le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-2 & 2 & -1 \\ -2 & X+3 & -2 \\ 1 & -2 & X \end{vmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_3$

$$= \begin{vmatrix} X-1 & 2 & X-1 \\ -2 & X+3 & -2 \\ 1 & -2 & X \end{vmatrix}$$

$$= (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & X+3 & -2 \\ 1 & -2 & X \end{vmatrix}$$

$C_3 \leftarrow C_3 - C_1$

$$= (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & X+3 & 0 \\ 1 & -2 & X-1 \end{vmatrix}$$

$$= (X-1)^2(X+3)$$

On en déduit que le spectre de A est : $\text{Sp}(A) = \{-3, 1\}$.
Sous-espaces propres de A :

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b - c = 0 \\ -2a + 4b - 2c = 0 \\ a - 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2b - c.$$

De même, on a :

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_{-3} \Leftrightarrow \begin{cases} -5a + 2b - c = 0 \\ -2a - 2c = 0 \\ a - 2b - 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a \\ b = 2a \end{cases}$$

ce qui nous donne :

$$E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right), \quad E_{-3} = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

- On trouve pour B :

$$\begin{aligned}\chi_B = \det(XI_3 - B) &= \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ -1 & X-2 & 1 \\ 1 & -1 & X-2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 1-X \\ -1 & X-2 & 1 \\ 1 & -1 & X-2 \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ &= (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & X-2 & 1 \\ 1 & -1 & X-2 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & X-2 & 0 \\ 1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} \quad C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \\ &= (X-1)^2(X-2)\end{aligned}$$

On en déduit que le spectre de B est : $\text{Sp}(B) = \{1, 2\}$.
Sous-espaces propres de B :

$$X = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} a-b-c=0 \\ -a-b+c=0 \\ a-b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=c \end{cases},$$

puis :

$$X = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b-c=0 \\ -a+c=0 \\ a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c,$$

ce qui nous donne :

$$E_1 = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad E_2 = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

2) On en déduit que A est diagonalisable :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-3\end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad P = \begin{pmatrix}2&-1&1\\1&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix},$$

et que B n'est pas diagonalisable puisque la valeur propre double ($\lambda = 1$) a un sous-espace propre de dimension égale à 1 (au lieu de 2).

Exercice 3

1) Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $f(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - \alpha \sum_{k=0}^{n} k a_k X^{k-1} = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - \alpha a_{k+1}) X^k$.
On a alors, pour $P \neq 0$:

$$f(P) = \lambda P \Leftrightarrow x^n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - \alpha a_{k+1}) X^k = \lambda X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda a_k X^k,$$

ce qui implique, puisque $\alpha \neq 0$ et que deux polynômes sont égaux si, et seulement si, leurs coefficients sont égaux, que l'on a :

$$\lambda = 1 \text{ et } \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ a_{k+1} = 0.$$

On en déduit ainsi que la seule valeur propre est $\lambda = 1$ et que $E_1 = \text{Vect}\left(X^0\right)$.

2) Si $\lambda \in \text{Sp}(f)$, alors il existe un polynôme P non nul tel que $f(P) = XP = \lambda P$, ce qui est impossible puisque l'on aboutit à une égalité entre deux polynômes de degrés différents. On a donc ici $\text{Sp}(f) = \emptyset$.

3) Si on note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, alors on a :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ donc } \chi_f = X(X-1)(X+1).$$

Exercice 4

1) Déterminons le polynôme caractéristique :

$$\chi_f = (-1)^4 \begin{vmatrix} a-X & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b-X & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c-X & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d-X \end{vmatrix} = (c-X) \begin{vmatrix} a-X & 3 & 5 \\ 0 & b-X & 2 \\ 0 & 0 & d-X \end{vmatrix}$$

$$= (a-X)(b-X)(c-X)(d-X).$$

Donc f admet quatre racines simples distinctes, donc il est diagonalisable.

2) Comme $b = c$ est la seule valeur propre multiple et que son ordre de multiplicité est égal à 2, f sera diagonalisable si, et seulement si, le sous-espace propre E_b est de dimension 2. Comme la dimension de E est 4, le théorème du rang donne : $\dim(E_b) = 4 - \text{rg}(A - bI_4)$. Ainsi, f diagonalisable si, et seulement si, $\text{rg}(A - bI_4) = 2$.

Or $A - bI_4 = \begin{pmatrix} a-b & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d-b \end{pmatrix}$, donc $\text{rg}(A - bI_4) = 2$ si, et seulement si, $a - b = \frac{3}{2}$ car $d - b \neq 0$ implique que la colonne C_4 est non colinéaire aux colonnes C_1 et C_2.

Exercice 5

1) La matrice $A + I_3 = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 0 \\ 1 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang $p < 3$ pour tout a réel, donc -1 est valeur propre de l'endomorphisme f, quel que soit $a \in \mathbb{R}$.

2) a) La matrice $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1, donc $\dim(E_{-1}) = 3 - 1 = 2$, d'après le théorème du rang.

b) Comme -1 est au moins valeur propre double d'après la question précédente, alors on a $\mathrm{Tr}\,(A) = -1 = (-1 - 1 + \lambda)$, avec λ valeur propre de f (éventuellement égale à -1), ce qui donne $\lambda = 1$.
On obtient alors $\chi_f = (X+1)^2(X-1)$.

c) Le sous-espace propre associé à la valeur propre double est bien de dimension 2, donc f est diagonalisable, et comme 0 n'est pas valeur propre, f est également inversible.

Exercice 6

1) La matrice $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha - 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible (puisque ses deux premières colonnes sont égales), donc 2 est bien valeur propre de f.

2) Cherchons les valeurs propres de A :

$$\chi_A = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ -1 & X-3 & 1 \\ -1 & -1 & X-\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} X-2 & X-2 & 0 \\ -1 & X-3 & 1 \\ -1 & -1 & X-\alpha \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$= (X-2)\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & X-3 & 1 \\ -1 & -1 & X-\alpha \end{vmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 - C_1$$

$$= (X-X)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & X-2 & 1 \\ -1 & 0 & X-\alpha \end{vmatrix}$$

On développe alors par rapport à la deuxième colonne et on trouve :

$$\chi_A = (X-2)^2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & X-\alpha \end{vmatrix} = (X-2)^2(X-\alpha).$$

CORRECTIONS

On en conclut que si $\alpha = 2$, alors A admet $\lambda = 2$ pour unique valeur propre (de multiplicité 3) et que si $\alpha \neq 2$, alors il y a deux valeurs propres : 2 (de multiplicité 2) et α (valeur propre simple).

- Supposons $\alpha \neq 2$.
  On a donc ici : f diagonalisable si, et seulement si, $\dim(E_2) = 2$.
  Or on a :

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a - b + c = 0 \\ a + b - c = 0 \\ a + b + (\alpha - 2)c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = a + b \\ a + b + (\alpha - 2)(a + b) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = a + b \\ (\alpha - 1)(a + b) = 0 \end{cases}$$

  Donc, si $\alpha \neq 1$, $\dim(E_2) = 1$ (donc f non diagonalisable), et si $\alpha = 1$, $\dim(E_2) = 2$ (donc f est diagonalisable).
- Supposons $\alpha = 2$.
  On a cette fois-ci : f diagonalisable si, et seulement si, $\dim(E_2) = 3$.
  Or on a :

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -a - b + c = 0 \\ a + b - c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

  Donc $\dim(E_2) = 1$, donc f n'est pas diagonalisable.
  Conclusion :

$$f \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

3) Un calcul rapide nous donne $(A - 2I_3)^3 = 0$ (ce que l'on obtenait directement en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton) et $(A - 2I_3)^2 \neq 0$, donc A est nilpotente d'ordre 3.

Exercice 7

Commençons par remarquer que, si $n = 1$, alors la matrice M est diagonale.
Supposons maintenant que $n \geqslant 1$ et notons χ_M le polynôme caractéristique de M.
On obtient alors :

$$\chi_M = \det(X \cdot I_n - M)$$

$$= \begin{vmatrix} X-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & X-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} X-n & X-n & \cdots & X-n \\ -1 & X-1 & \ddots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & X-1 \end{vmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$

$$= (X-n)\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ -1 & X-1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ -1 & \cdots & -1 & X-1 \end{vmatrix} \qquad L_i \leftarrow L_i - L_1, \text{ pour } i \in [\![2, n]\!]$$

$$= (X-n)\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & X & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & X \end{vmatrix}$$

$$= (X-n)X^n.$$

On a donc une valeur propre simple ($\lambda = n \neq 1$) et une valeur propre de multiplicité $n-1$ ($\lambda = 0$).

Or $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_0 = \text{Ker}(M) \Leftrightarrow x_1 + \cdots + x_n = 0$, donc E_0 est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, c'est donc un espace vectoriel de dimension $(n-1)$. Donc M est diagonalisable puisque l'autre valeur propre est simple.

Exercice 8

La matrice M étant triangulaire, on obtient immédiatement que ses valeurs propres sont 1 et 2, et que leur ordre de multiplicité est 2.

- Méthode 1 : il faut et il suffit que les sous-espaces propres E_1 et E_2 soient de dimension égale à la multiplicité des valeurs propres, donc à 2.

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} ay+bz+ct=0\\ dz+et=0\\ z+ft=0\\ t=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=t=0\\ ay=0\end{cases}. \text{ Donc } \dim(E_1)=2 \Leftrightarrow a=0.$$

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+ay+bz+ct=0\\ -y+dz+et=0\\ ft=0\end{cases}. \text{ Donc } \dim(E_2)=2 \Leftrightarrow f=0.$$

Conclusion : M diagonalisable $\Leftrightarrow a=f=0$.

- Méthode 2 : il faut et il suffit que l'endomorphisme u tel que $M=\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ (pour $\mathcal{B}$ base canonique de $\mathbb{R}^4$) annule un polynôme scindé à racines simples.
Comme le polynôme caractéristique $\chi_M=(X-1)^2(X-2)^2$ vérifie $\chi_M(u)=0$, la condition nécessaire et suffisante recherchée est donc $(u-\mathrm{Id})\circ(u-2\mathrm{Id})=0$, ce qui se traduit matriciellement par :

$$(M-I_4)(M-2I_4)=\begin{pmatrix}0&-a&ad&ac+bf\\0&0&0&df\\0&0&0&f\\0&0&0&0\end{pmatrix}=0_4,$$

donc on obtient immédiatement :

$$M \text{ diagonalisable } \Leftrightarrow a=f=0.$$

Exercice 9

1) Commençons par déterminer les valeurs propres de A :

$$\det(A-\lambda I_3)=1-\lambda^3=(1-\lambda)(j-\lambda)(j^2-\lambda),$$

où $j=e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et $j^2=\bar{j}=e^{-2i\frac{\pi}{3}}$.
On obtient alors $\mathrm{Sp}(A)=\left\{1,j,j^2\right\}$, puis :

$$\begin{cases} E_1 &= \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big) &= \mathrm{Vect}\,(a_1)\\ E_j &= \mathrm{Vect}\big((1,j^2,j)\big) &= \mathrm{Vect}\,(a_2)\\ E_{j^2} &= \mathrm{Vect}\big((1,j,j^2)\big) &= \mathrm{Vect}\,(a_3)\end{cases}.$$

Les valeurs propres étant toutes simples, on obtient :

$$\mathbb{C}^3=\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} E_\lambda$$

ce qui implique que A est diagonalisable.

2) • Remarquons tout d'abord que :

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=A^T \Rightarrow \mathrm{Sp}\left(A^2\right)=\mathrm{Sp}(A).$$

- D'autre part, on a :

$$\begin{cases} A^2(a_1) = A(a_1) = a_1 \\ A^2(a_2) = A(ja_2) = j^2 a_2 \\ A^2(a_3) = A\left(j^2 a_3\right) = j a_3 \end{cases},$$

donc, si on note les sous-espace propres de A^2 avec des E', alors on obtient :

$$E'_1 = \text{Vect}(a_1), \quad E'_{j^2} = \text{Vect}(a_2), \quad E'_j = \text{Vect}(a_3).$$

3) On remarque que $B = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$, ce qui implique :

$$\begin{cases} B(a_1) = \alpha a_1 + \beta a_1 + \gamma a_1 = (\alpha + \beta + \gamma) a_1 \\ B(a_2) = \alpha a_2 + \beta j^2 a_2 + \gamma j a_2 = (\alpha + \beta j^2 + \gamma j) a_2 \\ B(a_3) = \alpha a_3 + \beta j a_3 + \gamma j^2 a_3 = (\alpha + \beta j + \gamma j^2) a_3 \end{cases}.$$

On obtient alors :

$$\text{Sp}(B) = \left\{\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta j^2 + \gamma j, \alpha + \beta j + \gamma j^2\right\}.$$

Exercice 10

1) • L'application u est bien linéaire puisque l'opérateur de dérivation l'est également.
• Montrons alors que $P \in E \Rightarrow u(P) \in E$. Soit d le degré d'un polynôme P, alors on a : $\deg(P') = d-1$ et $\deg(P'') = d-2$, donc $\deg\left((X^2-1)P''\right) = d$ et $\deg\left((2X+1)P'\right) = d$, donc $\deg\left(u(P)\right) \leqslant d$, ce qui implique que : $P \in E \Rightarrow u(P) \in E$.

Conclusion : $u(P) \in E$ et u linéaire, donc u est bien un endomorphisme de E.

2) Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de E.
$u(1) = 0, u(X) = 2X + 1$ et, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a :

$$\begin{aligned} u(X^k) &= k(k-1)(X^2-1)X^{k-2} + k(2X+1)X^{k-1} \\ &= -k(k-1)X^{k-2} + kX^{k-1} + (k(k-1)+2k)X^k \\ &= k(1-k)X^{k-2} + kX^{k-1} + k(k+1)X^k, \end{aligned}$$

donc :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -6 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 6 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & n(1-n) \\ & & & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n(n+1) & \end{pmatrix}.$$

Cette matrice étant triangulaire, on en conclut immédiatement que l'on a :

$$\text{Sp}(u) = \left\{0, 2, 6, \ldots, n(n+1)\right\}$$

et donc que u admet $n+1$ valeurs propres distinctes.
Or $\dim(E) = n+1$, donc u est diagonalisable.

Exercice 11

1) Déterminons le polynôme caractéristique :

$$\chi_{A_\alpha} = (-1)^3 \det(A_\alpha - XI_3) = -\begin{vmatrix} 3-\alpha-X & -5+\alpha & \alpha \\ -\alpha & \alpha-2-X & \alpha \\ 5 & -5 & -2-X \end{vmatrix} = (X+2)^2(X-3).$$

Le polynôme caractéristique est donc indédendant de α et les valeurs propres sont 3 (valeur propre simple) et -2 (valeur propre double).
La matrice A_α est donc diagonalisable si, et seulement si, le sous-espace propre E_{-2} est de dimension 2.
Or, si $X = (x, y, z) \in E_{-2}$, alors :

$$\begin{cases} (5-\alpha)x + (-5+\alpha)y + \alpha z = 0 \\ -\alpha x + \alpha y + \alpha z = 0 \\ 5x - 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5-\alpha)x - (5-\alpha)y + \alpha z = 0 \\ \alpha(-x+y+z) = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

Donc E_{-2} est de dimension 2 si, et seulement si, $\alpha = 0$.

2) Si $\alpha = 0$, on obtient alors $E_{-2} = \text{Vect}(e_1, e_2)$, pour $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On trouve de même $E_3 = \text{Vect}(e_3)$, pour $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cela donne alors :

$$P^{-1}A_0P = D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ pour } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve ainsi :

$$(A_0)^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 3^n & (-2)^n - 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ -(-2)^n + 3^n & (-2)^n - 3^n & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 12

On trouve $\chi_A(X) = (X-1)(X^2+X+1)$, et comme le polynôme X^2+X+1 n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, mais $\chi_A(X) = (X-1)(X-\jmath)(X-\bar{\jmath})$ étant scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
On en déduit alors qu'il existe une matrice inversible P telle que :

$$P^{-1} \times D \times P = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \jmath & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\jmath} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \jmath & 0 \\ 0 & 0 & \jmath^2 \end{pmatrix},$$

pour $j = e^{2i\pi/3}$ qui vérifie $j^2 = e^{4i\pi/3} = e^{-2i\pi/3} = \bar{j}$, et $j^3 = e^{2i\pi} = 1$.

On a alors $A = P \times D \times P^{-1}$, ce qui nous donne $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$ où $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j^n & 0 \\ 0 & 0 & j^{2n} \end{pmatrix}$.

On vérifie alors facilement que :

- $n = 3p \Rightarrow D^n = D^{3p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$;
- $n = 3p + 1 \Rightarrow D^n = D^{3p} \times D = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$;
- $n = 3p + 1 \Rightarrow D^n = D^{3p} \times D = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$.

Conclusion :

- si $n = 3p$, $A^{3p} = P \times D^{3p} \times P^{-1} = P \times I_3 \times P^{-1} = \mathrm{I}_3$;
- si $n = 3p + 1$, $A^{3p+1} = P \times D^{3p+1} \times P^{-1} = P \times D \times P^{-1} = A$;
- si $n = 3p + 2$, $A^{3p+2} = A^{3p+1} \times A^1 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque

On n'a pas eu ici besoin de déterminer P et P^{-1}.
La matrice A étant à coefficients réels, A^n l'est également, bien que l'on ait utilisé une diagonalisation dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Exercice 13

Polynôme caractéristique :

$$\chi_A = (-1)^3 \det(A - XI_4) = (X + 1)^3(X - 3).$$

Sous-espaces propres :

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in E_{-1} \Rightarrow a + b + c + d = 0,$$

donc E_{-1} est de dimension 3, ce qui implique déjà que A est diagonalisable puisque l'autre valeur propre est simple.
On détermine ensuite E_3 :

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in E_3 \Rightarrow \begin{cases} -3a + b + c + d = 0 \\ a - 3b + c + d = 0 \\ a + b - 3c + d = 0 \\ a + b + c - 3d = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = d.$$