

f'intègre

ECG

1^{re} & 2^e années

**NOUVEAUX
PROGRAMMES**

DANIEL FREDON • JEAN-NOËL BEURY

F O R M U L A I R E

Mathématiques appliquées Informatique

***L'ESSENTIEL
DES 2 ANNÉES
DANS VOTRE
POCHE !***

DUNOD

Cet ouvrage représente une synthèse des deux années de ECG en mathématiques et en informatique, option mathématiques appliquées, avec des repérages indiquant première année ❶ ou deuxième année ❷.

© Dunod, 2022
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-084976-5

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Mathématiques

1. Algèbre générale	1
1.1 Éléments de logique ❶	1
1.2 Calculs algébriques ❶	5
1.3 Vocabulaire des ensembles ❶	7
1.4 Vocabulaire des applications ❶	9
2. Algèbre linéaire et bilinéaire	11
2.1 Calcul matriciel ❶	11
2.2 Systèmes linéaires ❶	12
2.3 Espaces vectoriels réels de dimension finie ❷	14
2.4 Endomorphismes d'un espace vectoriel réel de dimension finie ❷	17
2.5 Réduction des matrices carrées ❷	19
3. Théorie des graphes ❶	21
4. Analyse	23
4.1 Suites réelles ❶	23
4.2 Fonctions de bases ❶	27
4.3 Limite et continuité d'une fonction en un point ❶	31
4.4 Dérivation ❶	34
4.5 Intégration sur un segment ❶	40
4.6 Équations différentielles linéaires à coefficients constants ❶ et ❷	43
4.7 Séries numériques ❶	46
4.8 Intégrales sur un intervalle quelconque ❶	49
4.9 Fonctions de deux variables ❷	53

IV Table des matières

5. Statistique descriptive	58
5.1 Statistique univariée ❶	58
5.2 Statistique bivariée ❷	61
6. Probabilités	64
6.1 Dénombrement ❶	64
6.2 Espace probabilisé ❶	66
6.3 Variables aléatoires discrètes ❶	70
6.4 Lois discrètes usuelles ❶	74
6.5 Graphes probabilistes (chaînes de Markov) ❷	77
6.6 Variables aléatoires à densité ❷	78
6.7 Lois usuelles à densité ❷	81
6.8 Convergence et approximations ❷	84
6.9 Estimation ❷	87
Annexes	92

Informatique

1. Langage Python	94
1.1 Types de base ❶	94
1.2 Structures de contrôle ❶	97
1.3 Bibliothèques ❶	99
1.4 Représentations graphiques ❶	109
2. Algorithmique des listes	113
2.1 Recherche dans une liste, Recherche par dichotomie ❶	113
2.2 Algorithme glouton ❶	115

2.3 Exemples simples d'algorithmes de tris ❶	116
3. Statistiques descriptives et analyse de données	118
3.1 Analyse de données avec la bibliothèque pandas ❶	118
3.2 Statistiques descriptives bivariées ❷	121
4. Approximation numérique	124
5. Graphes	128
6. Recherche du plus court chemin	132
7. Simulation d'expériences aléatoires	137
8. Bases de données	142
9. Équations et systèmes différentiels	148
10. Chaînes de Markov	151
11. Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance	156
Index des mathématiques	165
Index de l'informatique	167

Mathématiques

1. Algèbre générale

1.1 Éléments de logique

①

Proposition logique

C'est un assemblage de lettres et de signes qui a une syntaxe correcte (le lecteur sait le lire), une sémantique correcte (le lecteur comprend ce qu'il lit) et qui a une seule valeur de vérité : vrai (V) ou faux (F).

Deux propositions seront considérées comme égales si elles ont toujours la même valeur de vérité.

①

Connecteurs logiques

Négation $\neg p$

« non p » est vraie si, et seulement si, p est fausse.

Conjonction $p \wedge q$

« p et q » est vraie si, et seulement si, les deux propositions sont vraies.

Disjonction $p \vee q$

« p ou q » est vraie si, et seulement si, au moins une des propositions est vraie.



Le « ou » a un sens inclusif, à ne pas confondre avec le sens exclusif qui figure dans « fromage ou dessert »

Implication $p \Rightarrow q$

$p \Rightarrow q$ est définie par « (non p) ou q ».

2 [1] Mathématiques

 Cela signifie que quand p est fausse, la proposition « $p \implies q$ » est vraie. Pensez à des proverbes comme « si les poules avaient des dents alors je serais pape », « si les poules avaient des dents alors je serais en train de lire un livre de maths ». Ces phrases sont vraies, même si leur apport est faible !

Équivalence $p \iff q$

$p \iff q$ est vraie si, et seulement si, les deux propositions sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

1 Propriétés des connecteurs

$$\text{non} (\text{non } p) = p$$

$$\text{non} (p \text{ ou } q) = (\text{non } p) \text{ et } (\text{non } q)$$

$$\text{non} (p \text{ et } q) = (\text{non } p) \text{ ou } (\text{non } q)$$

$$(p \implies q) = [(\text{non } p) \text{ ou } q]$$

$$\text{non} (p \implies q) = [p \text{ et } (\text{non } q)]$$

 La négation d'une implication n'est donc pas une implication.

$$(p \implies q) = [(\text{non } q) \implies (\text{non } p)]$$

 Cette seconde implication est la **contraposée** de la première. Faites attention à l'ordre des propositions.

$$(p \iff q) = [(p \implies q) \text{ et } (q \implies p)]$$

 Pour démontrer une équivalence, on démontre souvent une implication et sa réciproque.

1 Quantificateurs

Notation

Les quantificateurs servent à indiquer la quantité d'éléments qui interviennent dans une proposition. On utilise :

le quantificateur universel $\forall$

$\forall x$ signifie : pour tout x ;

le quantificateur existentiel $\exists$

$\exists x$ signifie : il existe au moins un x .

Ordre

Si l'on utilise deux fois le même quantificateur, l'ordre n'a pas d'importance. On peut permuter les quantificateurs dans des écritures du type :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad p(x, y)$$

$$\exists x \in E \quad \exists y \in E \quad p(x, y)$$

Mais si les quantificateurs sont différents, leur ordre est important.

Dans l'écriture $\forall x \in E \quad \exists y \in E \quad p(x, y)$ y dépend de x .

Dans l'écriture $\exists y \in E \quad \forall x \in E \quad p(x, y)$ y est indépendant de x .

Négation

La négation de « $\forall x \in E$ x vérifie p » est « $\exists x \in E$ tel que x ne vérifie pas p ».

La négation de « $\exists x \in E$ x vérifie p » est « $\forall x \in E$ x ne vérifie pas p ».

1

Quelques méthodes de démonstration

Déduction

Si p est vraie et si l'on démontre $p \implies q$, alors on peut conclure que q est vraie.



Si la démonstration d'une implication vous résiste, pensez à examiner la contraposée. Elle a le même sens, mais il est possible que sa démonstration soit plus facile.

Examinons une ancienne publicité ; « Si vous n'êtes pas moderne, vous n'êtes pas client de la Société Générale ».

Elle se formalise par l'implication : non moderne $\implies$ non client. On passe à la forme affirmative en prenant la contraposé : client $\implies$ moderne.

Quel est l'intérêt de cette formulation pour un publicitaire ?

Tout d'abord des lecteurs vont se tromper et penser moderne $\implies$ client, ce qui serait injurieux pour les clients des autres banques, mais ça n'a pas été dit.

D'autre part, la transcription d'une forme négative à une forme affirmative augmente l'adhésion au message.

Raisonnement par analyse-synthèse

Quand on a démontré $p \implies q$, on peut dire qu'on a fait l'analyse du problème. On dit que p est une **condition suffisante** pour que q soit vraie.

Quand on a démontré $q \implies p$, on peut dire qu'on a fait la synthèse du problème. On dit que p est une **condition nécessaire** pour que q soit vraie.

Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer que p est vraie, on peut supposer que p est fausse et en déduire une contradiction. On rejette alors p et on conclut que p est vraie.

 Comme vous partez de non p , ne vous trompez pas dans la négation, en particulier en ce qui concerne les quantificateurs.

Il y a 3000 ans, les Grecs ont démontré que $\sqrt{2}$ était irrationnel. C'est la première victoire de la raison sur l'intuition dans l'histoire de l'humanité. En effet, pour eux, tous les nombres étaient des fractions et pourtant ils connaissaient la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1.

Aujourd'hui, la démonstration est un raisonnement par l'absurde.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel, c'est-à-dire qu'on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous forme réduite. Cela entraîne que $2a^2 = b^2$. b^2 est donc pair et cela entraîne que b est pair, soit $b = 2b'$. On a donc $2a^2 = 4b'^2$, soit $a^2 = 2b'^2$. On en déduit que a est pair ainsi que a .

Or a et b ne peuvent pas être tous les deux pairs sinon la fraction ne serait pas sous forme réduite.

On aboutit ainsi à une contradiction, ce qui conduit à rejeter l'hypothèse initiale formulée et donc à conclure que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.