UNED

Elasticidad y resistencia de materiales II

Mariano Rodríguez-Avial Llardent



Elasticicidad y resistencia de materiales II

MARIANO RODRÍGUEZ-AVIAL LLARDENT

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES II

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del Copyright, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamos públicos.

© *Universidad Nacional de Educación a Distancia Madrid 2013*

www.uned.es/publicaciones

© *Mariano Rodríguez-Avial Llardent*

Todas nuestras publicaciones han sido sometidas a un sistema de evaluación antes de ser editadas.

ISBN electrónico: 978-84-362-6632-0

Edición ditital: abril de 2013

A Carmen, mi mujer
y a nuestros hijos Pilar,
Pablo y Javier

ÍNDICE

Prólogo

Notaciones y símbolos

I
TEORÍA DE LA ELASTICIDAD

Tema 1. **Métodos energéticos de cálculo**

1.1. Introducción
1.2. Trabajo de las fuerzas exteriores
1.3. Trabajo interno de deformación
1.4. Teorema de Castigliano
1.5. Sistemas hiperestáticos. Teorema del trabajo mínimo
1.5.1. Sistemas exteriormente hiperestáticos
1.5.2. Sistemas interiormente hiperestáticos
1.6. Teorema de reciprocidad
1.7. Observaciones sobre los teoremas energéticos
1.8 . Principio de los trabajos virtuales
1.8 .1. Sistemas ideales
1.8 .2. Sistemas reales
1.8.3. Consideraciones sobre el principio de los trabajos virtuales

Ejercicios de autocomprobación

Soluciones de los ejercicios de autocomprobación

Tema 2. **El problema elástico: planteamiento y solución**

2.1. Introducción

2.2. Planteamiento general del problema elástico
2.3. Planteamiento del problema elástico en tensiones: Ecuaciones de Michell y Beltrami
2.4. Planteamiento del problema elástico en desplazamientos: Ecuaciones de Navier
2.5. Vector de Galerkin
2.6. El potencial de deformación de Lamé y su relación con el vector de Galerkin
2.7. Tensiones termoelásticas
2.8 . Unicidad de la solución
Ejercicios de autocomprobación
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación

Tema 3. **Elasticidad plana en coordenadas cartesianas**
3.1. Generalidades
3.2. Estado plano de tensión
3.3. Estado plano de deformación
3.4. Estudio del estado tensional en el entorno de un punto
3.5. Los círculos de Mohr en elasticidad plana
3.6. Planteamiento del problema elástico en los sistemas planos
3.7. Función de tensiones o función de Airy
3.8 . Soluciones polinómicas de la función de Airy
3.9. Curvas representativas de los estados elásticos planos
Ejercicios de autocomprobación
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación

Tema 4. **Elasticidad en coordenadas cilíndricas**
4.1. Generalidades
4.2. Análisis de tensiones
4.3. Análisis de deformaciones
4.4. Estados de tensión axisimétricos

4.5. Función de tensiones o función de Love
Ejercicios de autocomprobación
Soluciones de los ejercicios de autocomprobacion

Tema 5 . **ELASTICIDAD PLANA EN COORDENADAS POLARES**
5.1. Introducción
5.2. Planeamiento de los problemas elásticos planos en coordenadas polares
5.3. Distribución de tensiones simétricas respecto a un eje
5.4. Tubos de pared gruesa
5.5. Influencia de un orificio circular en una placa o laja sometida a esfuerzo longitudinal o cortante
5.6. Cuña plana cargada en la punta
5.7. Placa semiindefinida con carga concentrada
Ejercicios de autocomprobación
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación

Tema 6. **TEORÍA GENERAL DE LA TORSIÓN**
6.1. Introducción
6.2. Torsión de barras prismáticas de sección cualquiera
6.2.1. Planteamiento general del problema
6.2.2. Analogía de la membrana
6.3. Torsión de perfiles delgados
6.3.1. Perfiles delgados abiertos
6.3.2. Perfiles delgados cerrados
6.4. Flexión y torsión de perfiles delgados
6.4.1. Efecto de torsión en la flexión simple de perfiles delgados
6.4.2. Características sectoriales
6.4.3. Torsión no uniforme o restringida de perfiles delgados

6.4.4. Caso general de carga
6.5. Torsión de barras de sección circular variable
Ejercicios de autocomprobación
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación

II
RESISTENCIA DE MATERIALES

Tema 7. **Sistemas planos reticulados de nudos articulados**
7.1. Generalidades
7.2. Sistemas planos
7.3. Sistemas planos reticulados de nudos articulados
7.4. Método de Cremona
7.5. Método de Ritter
7.6. Cálculo de los desplazamientos de los nudos
7.7. Observaciones sobre los sistemas planos triangulados
Ejercicios de autocomprobación
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación

Tema 8. **Barras curvas**
8 .1. Generalidades
8 .2. Relaciones entre las acciones M, N y C
8 .3. Barras de pequeña curvatura. Arcos
8 .4. Deformación del eje geométrico en los arcos
8 .5. Curva de presiones
8 .6. Arco de tres articulaciones
8 .7. Arco de dos articulaciones
8 .8 . Arco empotrado
8 .9. Barras de fuerte curvatura inicial
8 .9.1. Flexión pura
8 .9.2. Esfuerzo normal
8 .9.3. Deformaciones

8 .9.4. Observaciones
8 .10. Cálculo aproximado de anillos y eslabones de cadena
Ejercicios de autocomprobación
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación

Tema 9. **SÓLIDOS LAMINARES**

9.1. Características fundamentales de los sólidos laminares
9.2. Estudio general de la flexión de placas
9.2.1. Condiciones de contorno
9.3. Flexión de placas circulares simétricamene cargadas
9.4. Flexión de placas rectangulares
9.5. Bóvedas simétricas de pequeño espesor, sometidas a presión interna
9.6. Depósitos de pared delgada
9.7. Observaciones sobre la teoría de la membrana
9.8. Inestabilidad de tubos y anillos sometidos a presión externa
Ejercicios de autocomprobación
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación

Tema 10. **CARGAS MÓVILES**

10.1. Introducción
10.2. Líneas de influencia
10.3. Determinación de las líneas de influencia
10.3.1. Método directo
10.3.2. Aplicación del principio de los trabajos virtuales
10.3.3. Utilización del teorema de reciprocidad
10.3.4. Cargas indirectas
10.4. Diagramas de efectos máximos
10.4.1. Viga apoyada, sometida a carga móvil uniformemente repartida, de mayor longitud que su luz

10.4.2. Viga apoyada, sometida a una carga móvil concentrada, P
10.4.3. Determinación del momento flector máximo absoluto en una viga apoyada en sus extremos, recorrida por un tren de cargas

Ejercicios de autocomprobación

Soluciones de los ejercicios de autocomprobación

Tema 11. **Cargas alternativas. Teoría de la fatiga**

11.1. Generalidades
11.2. Estudio de la resistencia a la fatiga
11.3. Roturas por fatiga
11.4. Límite de resistencia a la fatiga
11.5. Ciclos asimétricos de carga
11.6. Influencia de diversos factores en la resistencia a la fatiga
11.6.1. Concentración de tensiones
11.6.2. Factores de escala y de sensibilidad superficial
11.6.3. Otros factores
11.7. Grado de seguridad a la fatiga
11.8 . Fatiga en materiales pétreos
11.9. Estudio de la resistencia a la fatiga según el Código Técnico de la Edificación
11.9.1. Campo de aplicación
11.9.2. Símbolos
11.9.3. Método del daño acumulado
11.9.4. Cálculo de las carreras de tensiones
11.9.5. Resistencia a la fatiga
11.9.6. Combinación de tensiones normales y tangenciales

Ejercicios de autocomprobación

Soluciones de los ejercicios de autocomprobación

Tema 12. **ACCIÓN DINÁMICA DE LAS CARGAS**

12.1. Generalidades
12.2. Teoría elemental de la tracción por choque
12.3. Flexión producida por choque
12.4. Observaciones sobre las acciones con impacto
12.5. Vibraciones en los sistemas elásticos: Consideraciones generales
12.6. Sistemas con un grado de libertad
12.6.1. Vibraciones armónicas libres
12.6.2. Vibraciones libres torsionales
12.6.3. Vibraciones armónicas libres amortiguadas
12.6.4. Vibraciones armónicas forzadas
12.6.5. Consideración de la masa del sistema elástico. Método de Rayleigh
12.7. Sistemas con varios grados de libertad
12.8 . Vibraciones en sistemas continuos

Ejercicios de autocomprobación
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación

Tema 13. **CRITERIOS DE AGOTAMIENTO. ESTUDIO DE SÓLIDOS SOMETIDOS A DEFORMACIONES PLÁSTICAS**

13.1. Introducción
13.2. Criterios de agotamiento: generalidades
13.3. Criterio de Rankine y Lamé
13.4. Criterio de Saint-Venant y Poncelet
13.5. Criterio de Tresca-Guest
13.6. Criterio de Beltrami y Haigh
13.7. Criterio de Von Mises y Hencky
13.8 . Criterios dependientes del invariante I_1
13.9. Teoría de la curva intrínseca
13.10. Aplicaciones de los métodos plásticos al cálculo de barras prismáticas cargadas en su plano

13.10.1. Piezas sometidas a esfuerzo longitudinal
13.10.2. Barras sometidas a flexión
13.10.3. Tensiones residuales
13.10.4. Observaciones
13.11. Torsión de barras prismáticas más allá del límite elástico
13.11.1. Torsión plástica de barras de sección circular
13.11.2. Torsión de barras prismáticas de sección cualquiera: Analogía del montón de arena
13.11.3. Tensiones residuales
Ejercicios de autocomprobación
Soluciones de los ejercicios de autocomprobación

Apéndice 1. **Geometría de masas aplicada a las áreas planas**

Apéndice 2. **Tablas de perfiles laminados**

Bibliografía

PRÓLOGO

Con el presente texto de Grado, se completa el objetivo, enunciado en la presentación del correspondiente a «Elasticidad y Resistencia de Materiales I», de elaborar el material didáctico correspondiente a las materias que, en el Plan de Estudios de la Carrera de Graduado en Ingeniería Mecánica, son necesarias para que el alumno adquiera los conocimientos que hagan posible, en su futura vida profesional, el diseño y la comprobación adecuados, como sólidos deformables, de los elementos resistentes de máquinas y estructuras, a partir de las características que presentan los materiales con los que son elaborados.

Se ha elaborado la presente obra, en la que se desarrolla el programa de la asignatura «Elasticidad y Resistencia de Materiales II» (3er curso, 1er cuatrimestre), en la idea de completar, en diversos temas específicos, los conocimientos adquiridos en el aprendizaje de «Elasticidad y Resistencia de Materiales I» (2.º curso, 2.º cuatrimestre).

En los seis primeros temas, tras la exposición de los teoremas energéticos de cálculo (capítulo 1) se completa el desarrollo de la Teoría de la Elasticidad, incluyendo el planteamiento y los métodos generales de resolución del problema elástico (capítulo 2), mientras que en los capítulos 3, 4 y 5 se estudian aquellos problemas planos o espaciales en los que, de acuerdo con las características de los sólidos, se utilizan los sistemas de coordenadas más adecuados; en el capítulo 6 se expone el análisis riguroso de los problemas de torsión de barras prismáticas de sección no circular.

En los temas 7 y 8 se realiza un estudio elemental de los sistemas estructurales constituidos por barras primáticas, considerando también el caso en que estas últimas sean de directriz curva.

En el primero de los temas restantes se estudian los sólidos laminares sometidos a solicitaciones de tipo estático, mientras que aquellos casos de barras prismáticas en que las cargas modifican su posición o su valor con el tiempo, por lo que puede considerarse en determinadas circunstancias que actúan en forma dinámica, se estudian en los capítulos siguientes, dedi-

cándose el último de ellos al análisis del comportamiento de los sólidos cuando pueden estar sometidos a deformaciones no elásticas.

En estos temas, el tratamiento de los distintos problemas se hace, en general desde las hipótesis simplificadoras de la Resistencia de Materiales, debiendo utilizarse el análisis más riguroso de la Teoría de la Elasticidad en el estudio de los problemas de flexión de placas (tema 9), así como en algunos apartados del capítulo 13. Salvo en este último tema, se supone comportamiento elástico de los materiales, siendo deformaciones y desplazamientos de pequeño valor.

Al final del texto se incluyen dos apéndices, dedicados a la exposición resumida de la geometría de masas aplicada a las áreas planas y a la inclusión de las características mecánicas de los perfiles laminados más utilizados en las aplicaciones prácticas. Se incluyen al final de cada tema, al igual que en «Elasticidad y Resistencia de Materiales I», varios ejercicios de autocomprobación, cuya finalidad es completar la asimilación adecuada de los contenidos teóricos expuestos; la solución de dichos ejercicios sólo debe consultarse después de haber intentado obtenerla.

En el presente texto se han recogido gran parte de los contenidos desarrollados en las Unidades Didácticas correspondientes a las asignaturas «Fundamentos de Resistencia de Materiales» y «Elasticidad y Resistencia de Materiales», impartidas en la carrera de Ingeniero Industrial (plan 2001), habiéndose corregido los errores observados en las mismas.

El autor quiere agradecer, expresamente, a D. Miguel Ángel Núñez de Arenas por la confección de los originales y, asimismo, la colaboración prestada en todo momento por la **Sección de Medios Impresos de la UNED** y, en particular, a Dª María José Bermejo y a Dª Rosario Garrido, por la labor realizada en la realización de los archivos de fórmulas y figuras (sujetos unos y otros a continuas modificaciones), cuya dedicación ha hecho posible, en gran medida, la edición final del presente texto.

Finalmente, agradezco, una vez más, al Profesor Titular D. Antonio González-Alberto, sus observaciones y comentarios que han servido para precisar y enriquecer los contenidos de la presente obra, que espero sea de interés para los estudiantes de Ingeniería, a quienes va destinada, así como a los técnicos en general.

Madrid, junio 2012.

El autor

NOTACIONES Y SÍMBOLOS

A Área de la sección recta de una barra en CTE.

a, b, c … Distancias, ángulos que forma el vector unitario con las direcciones principales.

A, B, C,… Puntos.

b Ancho de la sección recta de una barra.

c Línea media de un sólido tipo barra o prisma mecánico.

c_1, c_2, c_3 Circunferencias concéntricas a las de Mohr.

CTE Código Técnico de la Edificación.

C_1, C_2, C_3 Constantes de integración.

$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$ Circunferencias de Mohr.

C Esfuerzo cortante.

C Esfuerzo cortante en la viga conjugada.

d Diámetro; distancia.

D Diámetro.

[D] Matriz de deformación.

e Excentricidad; espesor de envolvente de pequeño espesor; paso de remachado.

$\bar{e}$ Vector deformación unitaria.

E Módulo de elasticidad. longitudinal o módulo de Young.

f Flecha.

$\bar{f}$ Vector tensión.

f_x, f_y, f_z Componentes cartesianas del vector tensión.

$\bar{F}_v$ Fuerza de masa o de volumen.

$\bar{F}_s$ Fuerza de superficie.

$\vec{F}$ Fuerza.

G Centro de gravedad de una sección recta; módulo de elasticidad transversal; coeficiente de Lamé.

H, h Altura.

H_A Componente horizontal de la reacción en el apoyo A.

i Radio de giro.

i_{min} Radio de giro mínimo.

I_M, I_P Momento de Inercia polar de la sección recta.

I_y, I_z Momentos de inercia de la sección recta respecto a sus ejes principales de inercia.

I_T Módulo de torsión.

k Coeficiente de dilatación lineal.

K Módulo de compresibilidad volumétrica.

K_1, K_2... Constantes de integración

l Longitud.

l_p Longitud de pandeo.

m Momento por unidad de longitud; momento estático.

m_y, m_z Momentos estáticos áxicos.

M_A Momento de empotramiento.

$\vec{M}$ Momento resultante; momento flector.

M Módulo del momento flector, momento aislado aplicado en una sección de una barra.

$\vec{M}_T$ Momento torsor.

M_T Módulo del momento torsor.

M_y, M_z Componentes del momento flector según las direcciones principales de inercia de la sección recta.

M_x Ley de momentos flectores en una viga.

$\mathbf{M}_x$ Ley de momentos flectores en la viga conjugada.

n Coeficiente de seguridad; grado de hiperestaticidad; revoluciones por minuto (rpm); normal exterior, dirección.

N Esfuerzo normal.

N_{crit} Carga crítica (CTE).

O Origen de coordenadas.

O' *Centro de flexión o de esfuerzos cortantes*.

p Presión; carga por unidad de longitud.

$\vec{p}$ Vector giro.

$[P]$ Matriz de giro.

P Fuerza; carga concentrada; carga de compresión.

$\boldsymbol{p}$ Carga por unidad de longitud en la viga conjugada.

P_{crit} Carga crítica.

q Carga por unidad de longitud.

r Radio.

R Radio.

$\vec{R}$ Resultante de un sistema de fuerzas.

R_A Reacción en el apoyo A.

R_x, R_y, R_z Componentes cartesianas de la resultante de un sistema de fuerzas.

$\boldsymbol{R}$ Reacción en la viga conjugada.

s Longitud de arco de línea media.

S Área de la sección transversal de una barra.

t Temperatura.

T Trabajo interno de deformación; salto térmico.

[T] Matriz de tensión.

$\vec{u}$ Vector unitario.

u, v, w Componentes cartesianas del vector desplazamiento de un punto.

V Volumen.

V_A Componente vertical de la reacción en el apoyo A.

W_T Módulo resistente a torsión.

W_y, W_z Módulo resistente a flexión.

x, y, z Coordenadas cartesianas; desplazamientos.

x_G, y_G, z_G Coordenadas del centro de gravedad.

X, Y, Z Componentes cartesianas de $\overline{f}_v$.

$\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ Componentes cartesianas de $\overline{f}_s$.

$X_1, X_2, \ldots$ Incógnitas hiperestáticas.

α Ángulo; coeficiente de dilatación lineal, coeficiente de imperfección elástica (CTE).

α, β, γ Componentes cartesianas del vector unitario.

γ Deformación angular; coeficiente de ponderación; peso específico; coeficiente para el cálculo de remaches y tornillos.

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ Deformaciones angulares en los planos xy, yz y zx.

δ Desplazamiento del punto P.

$\overrightarrow{\delta_P}$ Vector desplazamiento del punto P.

Δ Dilatación cúbica unitaria.

ε Deformación longitudinal.

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ Deformaciones longitudinales unitarias en las direcciones de los ejes coordenados.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ Deformaciones principales.

θ Ángulo; ángulo de torsión por unidad de longitud.

Θ Invariante lineal de la matriz de tensiones.

λ Coeficiente de Lamé; esbeltez.

λ_{lim} Valor límite de la esbeltez para que sea aplicable la fórmula de Euler.

$\overline{\lambda}$ Esbeltez reducida (CTE).

μ Coeficiente de Poisson.

ν Coeficiente de Poisson (CTE).

π Plano.

ρ Radio de curvatura.

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ Tensiones normales en coordenadas cartesianas.

$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ Tensiones normales en coordenadas cilíndricas.

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ Tensiones principales.

σ_{adm} Tensión admisible.

σ_{crit} Tensión crítica a pandeo.

σ_e Límite elástico.

σ_F Tensión de fluencia.

σ Tensión normal.

τ Tensión tangencial o cortante.

τ_{adm} Tensión admisible a cortadura.

$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ Tensiones tangenciales en coordenadas cartesianas.

$\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}$ Tensiones tangenciales en coordenadas cilíndricas.

ϕ Coeficiente en cálculo a pandeo (CTE).

φ Ángulo.

ψ Coeficiente de simultaneidad (CTE).

ω Coeficiente de pandeo; velocidad angular.

χ Coeficiente de reducción por pandeo (CTE).

I

TEORÍA DE LA ELASTICIDAD

Tema 1

Métodos energéticos de cálculo

1.1. Introducción

1.2. Trabajo de las fuerzas exteriores

1.3. Trabajo interno de deformación

1.4. Teorema de Castigliano

1.5. Sistemas hiperestáticos. Teorema del trabajo mínimo
- 1.5.1. Sistemas exteriormente hiperestáticos
- 1.5.2. Sistemas interiormente hiperestáticos

1.6. Teorema de reciprocidad

1.7. Observaciones sobre los teoremas energéticos

1.8. Principio de los trabajos virtuales
- 1.8.1. Sistemas ideales
- 1.8.2. Sistemas reales
- 1.8.3. Consideraciones sobre el principio de los trabajos virtuales

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

1.1. INTRODUCCIÓN

La resolución de gran número de problemas elásticos se ve facilitada cuando se utilizan métodos de cálculo basados en consideraciones energéticas. En particular, los métodos energéticos de cálculo son de gran utilidad en el cálculo de deformaciones y en la determinación de las reacciones en los vínculos de barras o sistemas de barras hiperestáticos, cuando se encuentran sometidos a distintos tipos de carga.

Estudiaremos, en primer lugar, los métodos basados en la consideración del trabajo interno de deformación para, posteriormente, exponer el principio de los trabajos virtuales, cuya aplicación es de mayor generalidad que la de aquéllos y, además, no está sometida a ninguna restricción.

1.2. TRABAJO DE LAS FUERZAS EXTERIORES

Consideraremos (figura 1.1) un sólido elástico de forma cualquiera sometido a una solicitación exterior que, para mayor sencillez, supondremos que consiste en la actuación de un sistema de cargas mecánicas.

Supondremos que las cargas se aplican estáticamente, de forma que van creciendo lentamente desde su valor inicial, nulo, hasta su valor final, por lo que no se producen aceleraciones sensibles, no originándose, por tanto, energía cinética alguna.

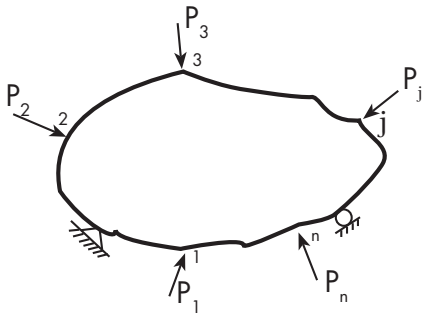


Figura 1.1

Igualmente, supondremos que los rozamientos en los vínculos o apoyos son despreciables por lo que, en los mismos, no se desprende energía en forma de calor.

En estas condiciones, el trabajo realizado por las fuerzas exteriores, T_e, se utiliza, exclusivamente, en la deformación del sólido, venciendo sus resistencias mecánicas internas, por lo que se transforma en energía interna de deformación, T_i, por lo que podemos escribir:

$$T_e = T_i \qquad [1.1]$$

Al ser el trabajo de las fuerzas exteriores una magnitud conservativa, que depende exclusivamente de sus estados inicial y final y no del orden en que se aplican las cargas, cabe decir, en virtud de [1.1], que la energía interna de deformación es, asimismo una magnitud conservativa.

Consideraremos, adicionalmente, que el material constitutivo del sólido cumple la ley de Hooke y que las deformaciones originadas por las cargas no inciden en la forma de actuar éstas, por lo que la solicitación exterior origina un régimen elástico de pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos, siendo de aplicación el principio de superposición de efectos(*); de acuerdo con estas suposiciones, la energía interna de deformación recibe el nombre de energía potencial elástica o potencial interno de deformación.

Deduciremos la expresión del trabajo de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sólido de la figura 1.1, considerando que sus puntos de aplicación experimentan, en su propia dirección, unos desplazamientos δ_1, δ_2.....δ_n (figura 1.2).

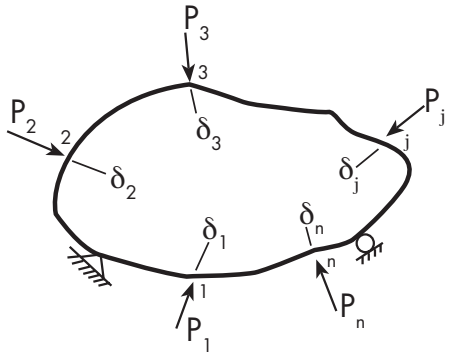


Figura 1.2

Como el trabajo T_e es una magnitud conservativa supondremos que, todas las fuerzas crecen simultáneamente, alcanzando en un momento dado, los valores kP_1, kP_2.....kP_n.

(*) No ocurre así en los problemas de inestabilidad y pandeo.

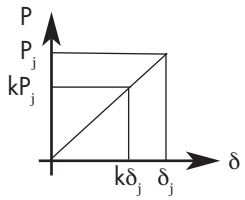


Figura 1.3

Ya que se cumple la ley de Hooke, los desplazamientos habrán alcanzado los valores $k\delta_1$, $k\delta_2$.....$k\delta_n$, siendo proporcionales a las cargas aplicadas como se representa para la carga P_j en la figura 1.3.

Cuando la carga P_j y el desplazamiento de su punto de aplicación δ_j alcanzan sus valores finales, el trabajo desarrollado es $\frac{P_j\delta_j}{2}$; considerando todas las cargas, el trabajo de las fuerzas exteriores es:

$$T_e = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} P_j\delta_j \qquad [1.2]$$

La fórmula [1.2] es la expresión del teorema de Clapeyron, que puede enunciarse como sigue:

«Cuando sobre un sólido elástico actúa un sistema de fuerzas exteriores, el trabajo desarrollado por las mismas es igual a la semisuma de los productos de sus valores por los de los desplazamientos de sus puntos de aplicación medidos en su propia dirección, siendo dicho trabajo independiente del orden en que se aplican las cargas»(*).

Al estar relacionados linealmente esfuerzos y desplazamientos, el trabajo de las fuerzas exteriores se puede escribir como función cuadrática de unos u otros.

Si los apoyos o vínculos son imperfectos, sufriendo desplazamientos elásticos, se añaden términos a la expresión [1.2], en los que el esfuerzo es la reacción en el vínculo.

Cuando alguna de las cargas exteriores sea un par, M, el término correspondiente en la ecuación [1.2] será $\frac{M\varphi}{2}$, donde φ es el ángulo girado por el punto de aplicación del par, medido en la dirección de este último.

(*) Los valores de fuerzas y desplazamientos son los valores finales.

En la determinación del trabajo de las fuerzas exteriores y de la energía potencial elástica no se tiene en cuenta la energía propia del sólido que corresponde, en su caso, al estado de tensión y deformación previa (por ejemplo, tensiones derivadas del montaje) al que éste pueda estar sometido.

1.3. TRABAJO INTERNO DE DEFORMACIÓN

Como hemos establecido en el epígrafe anterior, el trabajo desarrollado por las fuerzas exteriores se transforma en energía interna de deformación, si se supone que las cargas se aplican en forma estática y que son despreciables los rozamientos en los vínculos.

Obtendremos la expresión del trabajo interno de deformación o energía potencial elástica en primer lugar para un sólido elástico de forma cualquiera como el de la figura 1.1, escribiendo después el valor del mismo para una barra sometida a solicitación compuesta.

a) Consideraremos, como se indica en la figura 1.4, un punto P en el interior del sólido y, alrededor del mismo un paralelepípedo elemental, de aristas unitarias, representado en la figura 1.5.

La expresión del trabajo interno de deformación para ese volumen elemental para el que se supone que el estado tensional es el mismo en las caras ocultas y que éstas se mantienen fijas es:

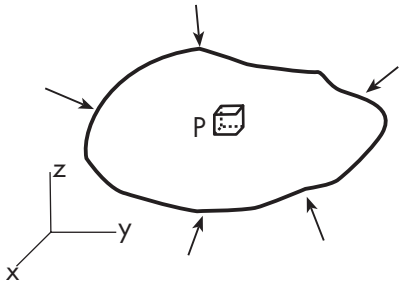


Figura 1.4

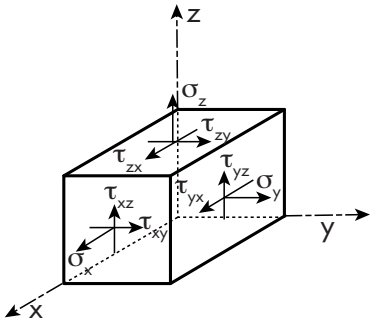


Figura 1.5

$$T_v = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right) \qquad [1.3]$$

(El factor $\frac{1}{2}$ es consecuencia de la proporcionalidad entre tensiones y deformaciones, establecida por las leyes de Hooke).

En la expresión [1.3] se ha tenido en cuenta el teorema de reciprocidad de las tensiones tangenciales, así como la definición de las distorsiones angulares unitarias γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}, establecidos en los capítulos 2 y 3 del texto, «Elasticidad y Resistencia de Materiales I».

Si las longitudes de las aristas son dx, dy, dz, el valor de la energía de deformación almacenada en el paralelepído elemental (potencial interno) es:

$$dT = T_v \cdot dx \cdot dy \cdot dz \qquad [1.4]$$

Como hemos dicho, suponemos que en las caras del elemento de la figura 1.4 no hay variación en el valor de las tensiones al considerar las infinitamente próximas. Tampoco hemos considerado la existencia, sobre el elemento, de fuerzas de volumen. Si introducimos éstas y consideramos la variación de las tensiones, obtenemos el mismo resultado, como se demuestra seguidamente.

Si llamamos u, v, w a los desplazamientos que experimentan entre sí las caras del elemento, es decir las componentes del vector desplazamiento en el punto P, los trabajos realizados al desplazarse las dos caras normales al eje x son:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_x u\right)_1 - \left(\sigma_x u\right)_2\right] dy \cdot dz \qquad [1.5]$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\tau_{xy} v\right)_1 - \left(\tau_{xy} v\right)_2\right] dy \cdot dz \qquad [1.6]$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\tau_{xz} w\right)_1 - \left(\tau_{xz} w\right)_2\right] dy \cdot dz \qquad [1.7]$$

Los subíndices 1 y 2 corresponden a las caras vista y oculta del elemento. En el límite, las expresiones [1.5], [1.6] y [1.7] se transforman en:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_x u\right)dx\cdot dy\cdot dz \qquad [1.8]$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{xy} v\right)dx\cdot dy\cdot dz \qquad [1.9]$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{xz} w\right)dx\cdot dy\cdot dz \qquad [1.10]$$

Considerando las otras caras del elemento se obtienen expresiones análogas. Sumándolas todas obtenemos:

$$dT' = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_x u+\tau_{xy} v+\tau_{xz} w\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{xy} u+\sigma_y v+\tau_{yz} w\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\tau_{xz} u+\tau_{yz} v+\sigma_z w\right)\right]dx\cdot dy\cdot dz \qquad [1.11]$$

Por otra parte, las fuerzas másicas originarán un trabajo, en el punto P:

$$dT'' = \frac{1}{2}\left(Xu+Yv+Zw\right)dx\cdot dy\cdot dz \qquad [1.12]$$

Sumando [1.11] y [1.12] obtendremos la expresión de la energía de deformación:

$$\begin{aligned} dT = dT' + dT'' = \frac{1}{2}\Bigg[&\sigma_x\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial v}{\partial y}+\sigma_z\frac{\partial w}{\partial z}+\tau_{xy}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\\ &+\tau_{xz}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\tau_{yz}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+u\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+X\right)+\\ &+v\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+Y\right)+w\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+Z\right)\Bigg]dx\cdot dy\cdot dz \end{aligned} \qquad [1.13]$$

Para obtener la expresión [1.13] hemos desarrollado previamente la ecuación [1.11] y ordenado convenientemente los términos.

Teniendo en cuenta las ecuaciones de equilibrio interno, los tres últimos paréntesis de [1.13] se anulan necesariamente y, recordando la definición

de las componentes de la deformación, obtenemos:

$$dT = \frac{1}{2}\left[\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right] dx \cdot dy \cdot dz \qquad [1.14]$$

que podría haberse deducido directamente de [1.3] y [1.4].

Podemos, pues, deducir que la expresión del potencial interno es la misma aunque el estado tensional sea no uniforme y no se consideren nulas las fuerzas de volumen.

De acuerdo con la ley de Hooke, podemos sustituir las deformaciones en función de las tensiones, con lo que la expresión [1.3] se transforma en:

$$T_v = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\mu}{E}\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z\right) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right) \qquad [1.15]$$

Si en [1.15] reemplazamos las tensiones por sus expresiones en función de las deformaciones, aplicando las ecuaciones de Lamé, obtenemos(*):

$$T_v = \frac{\lambda}{2}\Delta^2 + G\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2\right) + \frac{G}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2\right) \qquad [1.16]$$

donde $\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ es el invariante lineal de la matriz de deformación.

Si el sólido en estudio estuviese sometido a un estado tensional plano(*), la expresión del potencial interno sería la misma [1.15] haciendo $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$:

$$T_v = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2\right) - \frac{\mu}{2}\sigma_x\sigma_y + \frac{1}{2G}\tau_{xy}^2 \qquad [1.17]$$

En cualquier caso, la energía interna de deformación almacenada en el sólido será:

$$T_i = \iiint dT = \iiint T_v \, dx \cdot dy \cdot dz \qquad [1.18]$$

(*) El desarrollo, que omitimos, puede verse en la obra «Teoría de la Elasticidad», de Timoshenko y Goodier.

(*) Se define en el tema 3.

b) En el caso de una barra sometida a solicitación compuesta, el valor del trabajo interno de deformación viene dado por la expresión:

$$T_i = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2 dx}{ES} + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2 dx}{EI} + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{C^2 dx}{GS'} + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_T^2 dx}{GI_T} \qquad [1.19]$$

Los términos de la expresión [1.19] se obtuvieron en los temas 6, 8 y 11 del texto «Elasticidad y Resistencia de Materiales I».

Debe señalarse que la expresión [1.19] no se obtiene a partir del principio de superposición de efectos, ya que el trabajo interno de deformación es una función cuadrática de la solicitación exterior, no teniendo el carácter lineal en que se basa dicho principio.

Sin embargo, puede admitirse que la energía potencial elástica es la suma de las correspondientes a las distintas solicitaciones simples actuando por separado, ya que cada una de ellas no da origen a trabajo interno alguno cuado se consideran los desplazamientos debidos a las restantes.

Así, en la barra sometida a flexión compuesta representada en la figura 1.6, las tensiones σ_1 originadas por el esfuerzo normal N no realizan trabajo con los desplazamientos debidos al momento flector M (se anulan los trabajos positivos en la parte inferior de la sección indicada con los negativos correspondientes a la parte superior), ocurriendo lo mismo con los desarrollados por las tensiones σ_2, originadas por el momento M, con los desplazamientos $\varepsilon_1 dx$, debidos a N (figura 1.7). (Los desplazamientos γdx originados por esfuerzos cortantes y momentos torsores son ortogonales a las tensiones σ_1, σ_2, no desarrollándose trabajo).

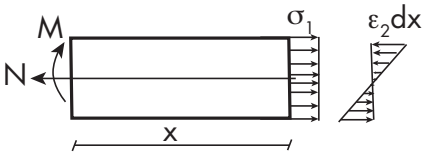


Figura 1.6

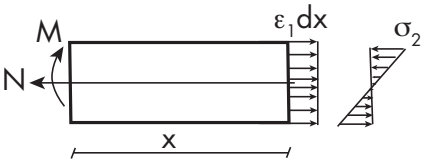


Figura 1.7

La formula [1.19], deducida para barras rectas puede también utilizarse para barras de pequeña curvatura y para sistemas constituidos por varias barras, debiendo sustituirse, tanto en un caso como en otro, dx por d*l*.

En la práctica, como comprobaremos en alguno de los ejercicios de autocomprobación, sólo tienen importancia los términos del trabajo interno de deformación o energía potencial elástica, originados por los momentos flectores y torsores.

1.4. TEOREMA DE CASTIGLIANO

A partir de las expresiones del trabajo interno de deformación se puede obtener un sencillo procedimiento para determinar los desplazamientos de los puntos de un sólido elástico cuando se encuentra sometido a cargas exteriores.

Consideremos (figura 1.8) un cuerpo elástico de forma cualquiera, sometido a la acción de un conjunto de fuerzas P_1, $P_2...P_j...P_n$, aplicadas estáticamente e independientes entre sí; este sistema de fuerzas, junto con las reacciones en los apoyos, determinan que el sólido se encuentre en equilibrio, por lo que no se encuentra sometido a aceleración alguna, estando también impedido su desplazamiento como cuerpo rígido.

El trabajo interno de deformación, igual como sabemos al trabajo desarrollado por las fuerzas exteriores es una función cuadrática de las fuerzas aplicadas:

$$T_i = f\,(P_1, P_2...P_j...P_n) \qquad [1.20]$$

Si una de las fuerzas (por ejemplo, P_j) experimenta un incremento infinitesimal, la energía interna de deformación tomará el valor:

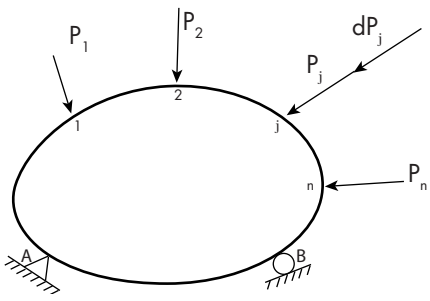


Figura 1.8

$$T_i + \frac{\partial T_i}{\partial P_j} dP_j \qquad [1.21]$$

Ya que el trabajo es una magnitud conservativa, el valor [1.21] debe ser el mismo si se aplica en primer lugar la fuerza dP_j y, después, el sistema $(P_1, P_2...P_j...P_n)$:

Las fuerzas (P_1, P_2...P_j...P_n) realizan el trabajo T_i.

La fuerza dP_j, cuyo punto de aplicación se desplaza δ_j en su dirección, por la acción del sistema de cargas realiza un trabajo $\delta_j dP_j$ (no existe el factor 1/2, pues dP_j es independiente de δ_j)(*).

El trabajo total será, por tanto:

$$T_i + \delta_j dP_j \qquad [1.22]$$

Igualando las expresiones [1.21] y [1.22]:

$$T_i + \frac{\partial T_i}{\partial P_j} dP_j = T_i + \delta_j dP_j$$

y, finalmente:

$$\delta_j = \frac{\partial T_i}{\partial P_j} \qquad [1.23]$$

que es la expresión del teorema de Castigliano, que se enuncia como sigue:

«El desplazamiento del punto de aplicación de una fuerza, medido en la dirección de la misma, es igual a la derivada parcial del trabajo interno de deformación respecto de dicha fuerza».

Cuando en vez de una fuerza P_j consideremos un par aplicado M_j, el giro o desplazamiento angular del punto en el que actúa viene dado por la expresión:

$\varphi_j = \frac{\partial T_i}{\partial M_j}$,midiéndose el ángulo φ_j en la dirección de M_j.

(*) Hemos despreciado el trabajo desarrollado por dP_j durante su aplicación, $\frac{1}{2} dP_j d\delta_j$, por ser un infinitésimo de segundo orden.

Si en la ecuación [1.15] derivamos la expresión de la energía potencial elástica por unidad de volumen T_v respecto a las componentes de la tensión obtenemos, por ejemplo:

$$\frac{\partial T_v}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] = \varepsilon_x, \text{ para } \sigma_x$$

$$\frac{\partial T_v}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \gamma_{xy}, \text{ para } \tau_{xy}$$

Por lo que podemos decir que las componentes de la deformación son iguales a las derivadas del trabajo interno de deformación por unidad de volumen respecto a las componentes de la tensión.

Cuando en el punto donde deseemos determinar la deformación (desplazamiento o giro) no existan fuerzas o pares exteriores aplicados se recurre al artificio de suponer aplicada, en el mismo, una carga ficticia Q, determinándose el desplazamiento (lineal o angular), como la derivada del trabajo interno de deformación respecto a Q, en el caso particular Q = 0.

En los ejemplos que siguen, en que determinaremos la flecha en el punto medio de dos vigas simplemente apoyadas, sólo tendremos en cuenta el trabajo interno de deformación originado por los momentos flectores.

- Ejemplo 1. Determinación de la flecha bajo el punto de aplicación de la carga P en la viga de la figura 1.9.

En las secciones comprendidas entre x = 0 y $x = \frac{l}{2}$ el momento flector es: $M = \frac{P}{2}x$, siendo simétrica la ley entre $\frac{l}{2}$ y l. Por tanto, el trabajo interno de deformación es:

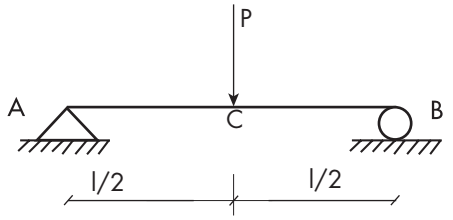


Figura 1.9

$$T_i = 2\frac{1}{2}\int_0^{l/2}\frac{M^2 dx}{EI} = \frac{1}{EI}\int_0^{l/2} M^2\, dx$$

suponiendo que el módulo de rigidez a la flexión EI es constante.

En virtud del teorema de Castigliano, será:

$$\delta_c = f = \frac{\partial T_i}{\partial P} = \frac{2}{EI}\int_0^{l/2} M\frac{\partial M}{\partial P}dx$$

Sustituyendo las expresiones de M y de su derivada respecto a P, obtenemos:

$$f = \frac{2}{EI}\int_0^{l/2}\frac{Px}{2}\frac{x}{2}dx = \frac{P}{2EI}\int_0^{l/2}x^2dx = \frac{P}{2EI}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2} = \frac{Pl^3}{48EI}$$

- Ejemplo 2. Determinar en la viga representada en la figura 1.10, el valor de la flecha en el punto medio.

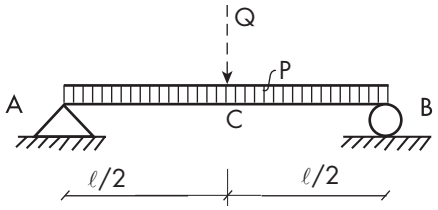


Figura 1.10

En este caso utilizaremos el método de la carga ficticia Q, aplicada en la sección central de la viga:

El momento flector originado por las cargas reales y ficticias es:

$$M = \frac{pl}{2}x - \frac{px^2}{2} + \frac{Q}{2}x\left(0 \le x \le \frac{l}{2}\right)$$

La flecha pedida es:

$$\delta_c = f = \left(\frac{\partial T_i}{\partial Q}\right)_{Q=0} = 2\frac{1}{2EI}\int_0^{l/2} 2\left[M\frac{\partial M}{\partial Q}\right]_{Q=0}dx$$

sustituyendo:

$$f = 2\frac{1}{EI}\int_0^{l/2}\left(\frac{pl}{2}x - \frac{px^2}{2}\right)\frac{x}{2}dx = \frac{2}{EI}\int_0^{l/2}\left(\frac{pl}{4}x^2 - \frac{p}{4}x^3\right)dx =$$

$$= \frac{2}{EI}\left[\frac{pl}{4}\frac{x^3}{3} - \frac{p}{4}\frac{x^4}{4}\right]_0^{l/2} = \frac{2}{EI}\left[\frac{pl}{12}\frac{l^3}{8} - \frac{p}{16}\frac{l^4}{16}\right] = \frac{pl^4}{EI}\left(\frac{1}{48} - \frac{1}{128}\right)$$

$$f = \frac{5pl^4}{384EI}$$

En ocasiones se conoce el valor del desplazamiento del punto de aplicación de una carga, bien porque se haya determinado experimentalmente o

porque sea el valor máximo de la deformación de acuerdo con las normas (por ejemplo, en una viga sometida a flexión, $f \leq \frac{l}{400}$, siendo f la flecha y l la longitud entre apoyos). En estos casos se puede determinar el valor de la fuerza que, aplicada en dicho punto y en combinación con el resto de las cargas, origina tal desplazamiento. Para ello, escribiendo la expresión del trabajo de deformación como función cuadrática de los desplazamientos δ_j, $T_i = f(\delta_1,\delta_2...\delta_j...\delta_n)$ y siguiendo el mismo razonamiento anterior, se obtiene la ecuación:

$$P_j = \frac{\partial T_i}{\partial \delta_j} \qquad [1.24]$$

Esta última fórmula es la expresión del teorema inverso de Castigliano, que puede enunciarse como sigue:

«El valor modular de una carga aplicada en un punto de la superficie de un sólido elástico es igual a la derivada parcial del trabajo interno de deformación respecto al desplazamiento de dicho punto, medido en la dirección de la carga».

Si aplicamos el teorema inverso de Castigliano a la expresión [1.16] de la energía potencial elástica por unidad de volumen, obtenemos las componentes de la tensión en función de las de la deformación. Así por ejemplo:

$$\frac{\partial T_v}{\partial \varepsilon_x} = \lambda\Delta + 2G\varepsilon_x = \sigma_x$$

$$\frac{\partial T_v}{\partial \tau_{xy}} = G\gamma_{xy} = \tau_{xy}$$

Estas últimas expresiones permiten decir que las componentes de la tensión son iguales a las derivadas del trabajo interno de deformación por unidad de volumen respecto a las componentes de la deformación.

1.5. SISTEMAS HIPERESTÁTICOS. TEOREMA DEL TRABAJO MÍNIMO

El teorema de Castigliano es también muy útil para la resolución de los problemas elásticos hiperestáticos, mediante la determinación de las incóg-

nitas en exceso respecto de las ecuaciones de la estática. Supondremos que se trata de barras o conjuntos de barras (sistemas o estructuras) y distinguiremos entre los sistemas exterior e interiormente hiperestáticos.

1.5.1. Sistemas exteriormente hiperestáticos

Consideremos (figura 1.11) una viga continua, sometida al sistema de cargas indicado. Se trata, como sabemos, de una viga hiperestática, para cuya resolución utilizamos el sistema equivalente de la figura 1.12, en que se han sustituido los enlaces en exceso por las correspondientes reacciones hiperestáticas X', X", X"', que sustituyen, a todos los efectos, a los apoyos intermedios; ya que en estos últimos no se producen desplazamientos verticales, la aplicación del teorema de Castigliano conduce a las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial T_i}{\partial X'} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T_i}{\partial X''} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T_i}{\partial X'''} = 0 \qquad [1.25]$$

Las condiciones [1.25] expresan que el trabajo interno de deformación, función tanto de las cargas aplicadas P, como de las reacciones hiperestáticas es máximo o mínimo precisamente para los valores de estas últimas; como en cualquier problema mecánico el trabajo realizado por las cargas aplicadas, compatible con la situación de equilibrio, es mínimo, lo mismo puede decirse del trabajo interno de deformación.

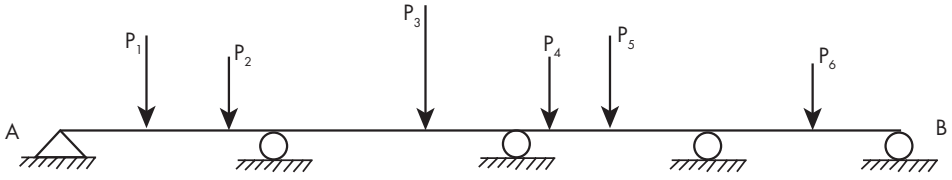


Figura 1.11

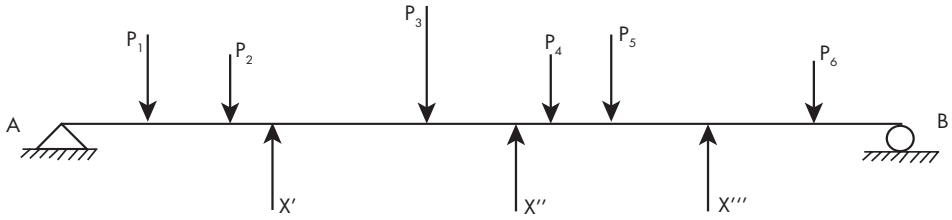


Figura 1.12

1.5.2. Sistemas interiormente hiperestáticos

Un conjunto de barras unidas entre sí, constituye un sistema o estructura, cuyo grado de hiperestaticidad, como veremos en el tema 7, es, habitualmente, muy elevado, dependiendo no sólo de las incógnitas en los vínculos o apoyos sino, también, de las correspondientes a los esfuerzos en las distintas barras. Así, en el ejemplo sencillo de la figura 1.13, correspondiente a una estructura constituida por tres barras unidas entre sí en los nudos A, B y C, constituyendo un marco cerrado y con la sustentación indicada, el grado de hiperestaticidad es 3, pues aunque las ecuaciones de la estática permiten determinar las reacciones en los apoyos, es necesario utilizar otras ecuaciones para obtener los valores del esfuerzo normal N, el esfuerzo cortante C y el momento flector M, en cualquier sección del marco(*).

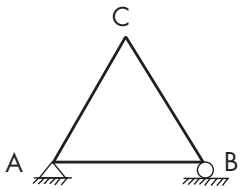


Figura 1.13

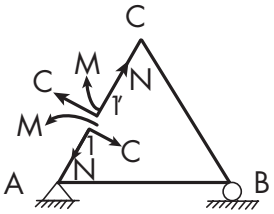


Figura 1.14

Si consideramos la estructura equivalente representada en la figura 1.14, los esfuerzos internos N, C, M, en las dos secciones 1 y 1' infinitamente próximas entre sí, deben tomar los valores que hagan nulos los desplazamientos entre 1 y 1'. Aplicando el teorema de Castigliano, obtenemos, por tanto:

$$\frac{\partial T_i}{\partial N} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T_i}{\partial C} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T_i}{\partial M} = 0 \qquad [1.26]$$

Estas expresiones corresponden igualmente a las condiciones para que el trabajo interno de deformación sea máximo o mínimo, siendo esta última situación la que se produce en los sistemas mecánicos en equilibrio.

En la sencilla estructura considerada los nudos en que se unen entre sí las distintas barras son empotramientos elásticos, que transmiten los es-

(*) Se supone que las cargas con coplanarias con el sistema de barras.

fuerzos internos de unas a otras y que pueden, en general, girar y desplazarse (es la misma situación que se produce entre dos secciones infinitamente próximas de una barra recta).

Las ecuaciones [1.25] y [1.26] son las expresiones del teorema del trabajo mínimo, también conocido como teorema de Menabrea, que puede enunciarse como sigue:

«En un sistema hiperestático, las incógnitas en exceso toman los valores que hacen que el trabajo interno de deformación sea mínimo».

1.6. TEOREMA DE RECIPROCIDAD

Estudiemos un sólido elástico de forma cualquiera, con la sustentación adecuada para impedir su desplazamiento como cuerpo rígido (figura 1.15).

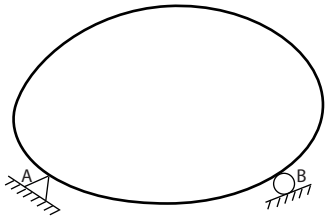


Figura 1.15

Consideraremos que sobre el sólido actúa un conjunto de fuerzas (P_1, P_2, P_3, P_4) y determinaremos el trabajo realizado por las mismas, suponiendo que, en primer lugar, se aplica el sistema constituido por las cargas (P_1, P_2), aplicándose después, sin retirarlas, el resto de las fuerzas (P_3, P_4). Al ser el trabajo una magnitud conservativa el valor que obtengamos será el mismo que el correspondiente a la aplicación simultánea de los dos sistemas, así como al que se obtenga al aplicar primero el sistema de cargas (P_3, P_4) y después las fuerzas (P_1, P_2).

En la figura 1.16 representamos el primero de los sistemas de fuerzas (P_1, P_2), así como los desplazamientos originados (δ_1, δ_2, δ_3, δ_4), tanto de sus

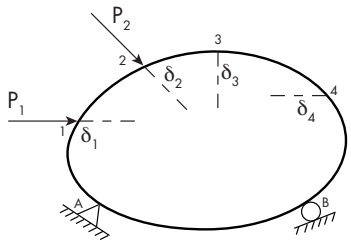


Figura 1.16

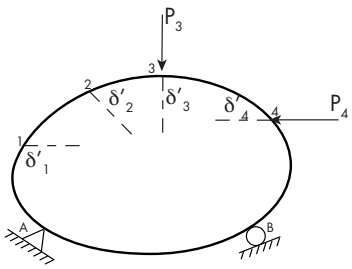


Figura 1.17

puntos de aplicación como de los de las fuerzas del segundo sistema. Análogamente, en la figura 1.17 se representa el sistema (P_3, P_4) y los desplazamientos que origina (δ'_1, δ'_2, δ'_3, δ'_4) de los puntos 1, 2, 3, 4.

[En todos los casos los desplazamientos (δ, δ') se miden en la dirección de las cargas correspondientes].

La aplicación del primer sistema de fuerzas origina el trabajo: $\frac{P_1\delta_1}{2}+\frac{P_2\delta_2}{2}$

Cuando se aplica, sin retirar el primer sistema, el resto de las cargas, se desarrolla un trabajo $\frac{P_3\delta'_3}{2}+\frac{P_4\delta'_4}{2}+P_1\delta'_1+P_2\delta'_2$.

(Los dos últimos términos no van afectados del factor 1/2, ya que las fuerzas P_1, P_2 son independientes de los desplazamientos δ'_1, δ_2' de sus puntos de aplicación). El trabajo total desarrollado tras todo el proceso de carga será:

$$\frac{P_1\delta_1}{2}+\frac{P_2\delta_2}{2}+\frac{P_3\delta'_3}{2}+\frac{P_4\delta'_4}{2}+P_1\delta'_1+P_2\delta'_2 \qquad [1.27]$$

Si procediésemos a la inversa, aplicando primero el sistema de fuerzas (P_3, P_4), añadiendo después las cargas (P_1, P_2) sin retirar aquéllas, se obtiene, análogamente:

$$T=\frac{P_3\delta'_3}{2}+\frac{P_4\delta'_4}{2}+\frac{P_1\delta_1}{2}+\frac{P_2\delta_2}{2}+P_3\delta_3+P_4\delta_4 \qquad [1.28]$$

El valor de $T=T_i=T_e$, dado por [1.27] y [1.28] ha de ser el mismo, como hemos indicado, por lo que igualando ambas expresiones, obtenemos:

$$P_1\delta'_1+P_2\delta'_2=P_3\delta_3+P_4\delta_4 \qquad [1.29]$$

La ecuación [1.29] es la expresión del teorema de reciprocidad, conocido como teorema de Betti, que puede enunciarse como sigue:

«El trabajo desarrollado por las fuerzas de un primer sistema de fuerzas con los desplazamientos de sus puntos de aplicación originados por un segundo sistema es igual al que desarrollan las fuerzas del segundo sistema con los desplazamientos producidos por el primero».

Cuando el primer sistema de cargas se reduzca a una fuerza P_1 y el segundo a otra P_2, la expresión del teorema de reciprocidad es:

$$P_1\delta'_1 = P_2\delta_2 \qquad [1.30]$$

En el caso particular $P_1 = P_2 = P$, la ecuación [1.30] permite deducir $\delta'_1 = \delta_2$, que es la expresión del teorema de Maxwell, cuyo enunciado es el siguiente: «El desplazamiento de un punto 1 de la superficie de un sólido elástico, medido en una dirección α, cuando en otro punto 2 actúa una fuerza en la dirección β, es igual al que experimenta el punto 2, en la dirección β, cuando en el punto 1, en dirección α, actúa una fuerza con el mismo valor modular» (figura 1.18).

En general, puede escribirse que el desplazamiento de cualquier punto i, cuando en otro punto j actúa una fuerza P_j es $\delta_i = P_j\delta_{ij}$, recibiendo δ_{ij} el nombre de coeficiente de influencia, desplazamiento del punto i cuando en el punto j actúa una fuerza unidad en la dirección de P_j. De la expresión [1.30] se deduce, en general:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \qquad [1.31]$$

es decir, los coeficientes de influencia recíprocos son iguales entre sí.

Como hemos indicado anteriormente los términos fuerza y desplazamiento tienen sentido genérico, por lo que pueden significar también par aplicado y giro de la sección correspondiente.

Los teoremas de Betti y Maxwell permiten obtener los valores de los desplazamientos de determinados puntos de un sólido elástico estudiando los de otros puntos cuya obtención es más sencilla; como veremos en el tema 10, son también muy utilizados para obtener las líneas de influencia en vigas hiperestáticas.

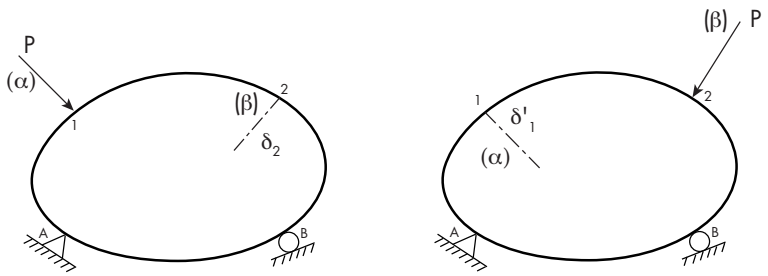


Figura 1.18

1.7. OBSERVACIONES SOBRE LOS TEOREMAS ENERGÉTICOS

La aplicación de los métodos expuestos en los epígrafes anteriores supone que se cumplen las hipótesis establecidas, por lo que sólo pueden utilizarse cuando los materiales cumplen la ley de Hooke y las deformaciones producidas por las cargas no modifican su forma de actuar (elasticidad de pequeñas deformaciones).

Por lo que se refiere a los términos de la ecuación [1.2], de la energía interna de deformación, originados por los desplazamientos de los apoyos, sólo pueden considerarse cuando se trata de desplazamientos elásticos, esto es, producidos por el sistema de cargas aplicadas; en caso contrario (desplazamientos anelásticos de los apoyos) no pueden aplicarse los teoremas expuestos.

Cuando no son de aplicación las hipótesis establecidas y en particular, cuando los movimientos de los vínculos o apoyos son de carácter anelástico (no originados por el sistema de cargas), es necesario recurrir a otros métodos de cálculo, como el basado en el teorema de los trabajos virtuales, que no está sometido a restricciones y que exponemos a continuación.

1.8. PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

Un procedimiento muy utilizado para la resolución de los problemas elásticos, basado también en consideraciones de tipo energético, es el empleo del principio de los trabajos virtuales, formulado por Jean Bernoulli(*) en 1717 y cuyo enunciado para una partícula material (figura 1.19) es el siguiente: «Si una partícula se encuentra en equilibrio, la suma de los trabajos realizados por las fuerzas activas que sobre ella actúan, es nula para cualquier desplazamiento virtual de la misma».

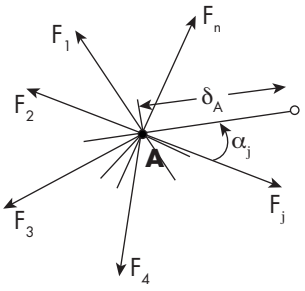


Figura 1.19

Se entiende por desplazamiento virtual cualquier desplazamiento infinitesimal arbitrario, compatible con los vínculos establecidos para dicha partícula. Denominamos como fuerzas activas a las aplicadas directamente sobre la partícula, a diferencia de las reaccio-

(*) Miembro de una extensa familia de físicos y matemáticos.

nes originadas por los vínculos, que no desarrollan trabajo, pues suponemos despreciables los rozamientos.

La expresión matemática del principio para una partícula material es:

$$\delta T = \overline{F}_{1A} \cdot \overline{\delta}_A + \overline{F}_{2A} \cdot \overline{\delta}_A + ... + \overline{F}_{nA} \cdot \overline{\delta}_A = \overline{\delta}_A \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{F}_{jA} \right) = 0 \qquad [1.32]$$

Designamos con δT el trabajo virtual para distinguirlo del trabajo real, T.

En la aplicación del principio de los trabajos virtuales a los sólidos (conjuntos de partículas) se consideran dos procedimientos distintos:

a) Para los sólidos rígidos ideales se considera, como veremos seguidamente, que las partículas que los constituyen, sometidas a un sistema real de fuerzas, experimentan un conjunto de desplazamientos virtuales.

b) Para los sólidos reales, en cambio, se supone que sus partículas están sometidas a un sistema de fuerzas virtuales, siendo los desplazamientos de las mismas muy pequeños, pero reales. Aunque el trabajo virtual desarrollado debiera recibir el nombre de trabajo virtual complementario, δT*, la práctica habitual es denominar indistintamente como trabajo virtual tanto al desarrollado por fuerzas reales con desplazamientos virtuales como al correspondiente a esfuerzos virtuales y desplazamientos reales.

En la expresión [1.32] el trabajo desarrollado por cada fuerza no va afectado del factor 1/2 ya que el desplazamiento de su punto de aplicación δ_A es independiente de la misma.

Sea cual sea el tipo de sólido considerado, el principio de los trabajos virtuales se expresa como sigue: «El trabajo virtual realizado por las fuerzas (virtuales o reales) activas y de vínculo que actúan sobre un sólido con los desplazamientos de sus puntos (reales o virtuales) ha de ser nulo, para que el sólido se encuentre en equilibrio».

1.8.1. Sistemas ideales

Un sistema de partículas materiales está constituido por un conjunto de ellas que no son completamente libres en sus movimientos relativos, exis-

tiendo, por tanto, además de los posibles vínculos externos de las distintas partículas, los vínculos internos que establecen ligazón entre las mismas. Se considera que el sólido o sistema de partículas es rígido o ideal cuando estos últimos impiden la modificación de las distancias entre partículas; en caso contrario se trata de sólidos deformables. En la figura 1.20 se indica un ejemplo de sólido rígido, sometido a su peso propio Q y a dos fuerzas horizontales y contrarias P, que se encuentra en equilibrio, por lo que el trabajo desarrollado por los esfuerzos P y Q para un desplazamiento virtual (de componentes δ_u, δ_v) es nulo, cuando se obliga al sólido a moverse exclusivamente en dirección horizontal. Los trabajos virtuales correspondientes son:

$$\delta_u \left(P - P \right) = 0$$
$$\delta_v \left(Q - N \right) = 0$$

De esta última relación deducimos Q=N

En general, la aplicación del principio de los trabajos virtuales a los sistemas ideales permite determinar, como en este caso, las reacciones en los vínculos, siempre que el problema sea isostático.

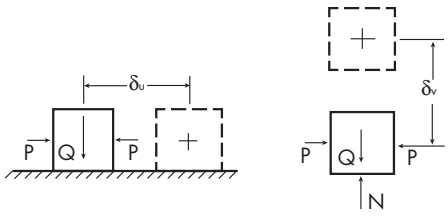


Figura 1.20

En un sistema ideal elemental, constituido por dos partículas A y B, se considera que éstas se encuentran unidas por una barra de rigidez infinita por lo que no se desarrolla trabajo alguno cuando dicho sistema sufre un desplazamiento virtual, como se deduce del esquema representado en la figura 1.21.

El trabajo desarrollado por los esfuerzos F, iguales y contrarios en los extremos A y B de dicha barra es nulo cuando el sistema experimente un desplazamiento virtual, de forma que la barra pasa a la posición A_1 B_1. En efecto, los movimientos de A y B pueden descomponerse en a) los desplazamientos AA', BB_1 iguales entre sí, por lo que la suma de los trabajos desa -

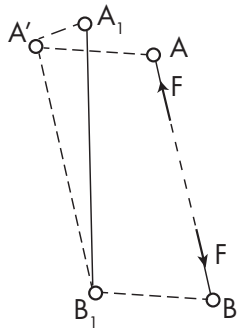


Figura 1.21

rrollados por los esfuerzos F es nula y b) el giro de la barra desde la posición A' B_1 a la posición A_1 B_1, quedando fijo el punto B_1 y desplazándose A' hasta A_1 en dirección ortogonal a A' B_1 no desarrollando tampoco trabajo alguno.

En consecuencia en los sistemas ideales, las fuerzas de vínculo (reacciones y esfuerzos internos) no desarrollan trabajo para cualquier desplazamiento virtual, compatible con los vínculos, experimentado por el conjunto de sus partículas.

Podemos reescribir la expresión [1.32] en la forma siguiente:

$$\sum \delta_A F_{jA} \cos\alpha_j + \bar{\delta}_A \cdot \bar{R}_A = 0 \qquad [1.33]$$

donde R_A es la resultante de las fuerzas de vínculo.

Como el segundo sumando de [1.33] ha de ser nulo, se ha de cumplir para, todos los puntos A, B.....N, que el trabajo desarrollado por todas las fuerzas activas aplicadas en las distintas partículas materiales que constituyen un sólido ideal, es nulo para un desplazamiento virtual del mismo.

La aplicación de [1.32] o [1.33] a todas las partículas del sólido ideal permite obtener, si el problema es isostático, las reacciones en todos los vínculos, aunque, por lo general, se determinan a partir de las condiciones de equilibrio.

1.8.2. Sistemas reales

En los sólidos reales, como el representado en la figura 1.22, varían las distancias entre sus partículas, por lo que las fuerzas de vínculo virtuales, a nivel elemental, $\sigma_v dS$ y $\tau_v dS$ realizan un trabajo con los desplazamientos reales de sus puntos de aplicación $\varepsilon_r dl$, $\gamma_r dl$. Este trabajo recibe el nombre de trabajo interno virtual y puede comprobarse que tiene siempre signo contrario al trabajo virtual desarrollado por las fuerzas exteriores; su expresión para todo el volumen del sólido es:

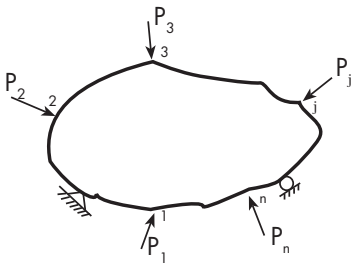


Figura 1.22

$$\delta T_i = \int_V \left(\sigma_v \varepsilon_r + \tau_v \gamma_r\right) dS dl \qquad [1.34]$$

Para el sólido deformable indicado el trabajo virtual externo realizado por el sistema virtual de cargas con los desplazamientos reales tiene la expresión:

$$\delta T_e = \sum P_v \delta_r + \sum R_v \delta'_r \qquad [1.35]$$

P_v y R_v son las fuerzas virtuales y las reacciones virtuales en los vínculos externos, mientras que δ_r son los desplazamientos de los puntos de aplicación de aquéllas y δ'_r los posibles movimientos de los apoyos.

La ecuación de los trabajos virtuales se escribe como sigue:

$$\sum P_v \delta_r + \sum R_v \delta'_r = \int_V \left(\sigma_v \varepsilon_r + \tau_v \gamma_r\right) dS dl \qquad [1.36]$$

El 2º miembro de la ecuación [1.36] se puede sustituir, cuando se trata de una barra prismática, por la suma de los términos correspondientes a las distintas solicitaciones simples. Así:

$$\sum P_v \delta_r + \sum R_v \delta'_r = \int_0^l \frac{N_v N_r}{ES}\, dl + \int_0^l \frac{M_v M_r}{EI}\, dl + \int_0^l \frac{C_v C_r}{GS'}\, dl + \int_0^l \frac{M_{Tv} M_{Tr}}{GI_T}\, dl \qquad [1.37]$$

Cuando se trata de obtener la deformación en un punto es usual considerar que el sistema virtual de cargas está constituido por una única fuerza unidad que actúa en la sección donde se desea determinar el desplazamiento real δ_r y en su misma dirección. Así por ejemplo, para calcular la flecha en la viga biapoyada de la figura 1.23 se considerará el sistema virtual indicado en la figura 1.24.

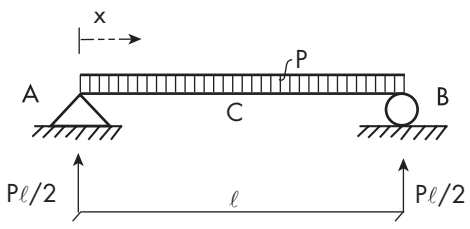


Figura 1.23

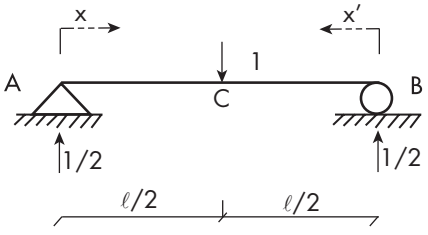


Figura 1.24

Al no existir esfuerzos normales N y momentos torsores M_T ni en el sistema virtual ni en el sistema real, la flecha se obtendrá, despreciando el término debido a los esfuerzos cortantes, como sigue:

$$1x\delta_{rC} = 1 \cdot f = \int_0^l \frac{M_v M_r}{EI}\, dl$$

(las reacciones virtuales no producen trabajo al no desplazarse los apoyos A y B).

$$M_V = \frac{1}{2}x \qquad 0 \le x \le \frac{l}{2}$$

$$M_V = \frac{1}{2}x' \qquad 0 \le x' \le \frac{l}{2}$$

$$M_r = \frac{Pl}{2}x - \frac{px^2}{2} \qquad 0 \le x \le \frac{l}{2}$$

Sustituyendo:

$$f = \frac{1}{EI} 2 \int_0^{l/2} \left(\frac{pl}{2}x - \frac{px^2}{2} \right) \frac{1}{2}\, x dx = \frac{1}{2EI} \int_0^{l/2} \left(plx^2 - px^3 \right) dx$$

$$f = \frac{p}{2EI} \left[l\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{l/2} = \frac{p}{2EI} \left(\frac{l}{3}\frac{l^3}{8} - \frac{1}{4}\frac{l^4}{16} \right)$$

$$f = \frac{pl^4}{2EI} \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{64} \right) = \frac{5pl^4}{384EI}$$, valor ya obtenido por otros métodos.

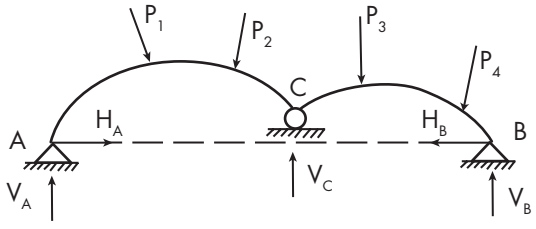


Figura 1.25

También se puede aplicar el método de los trabajos virtuales para determinar las incógnitas hiperestáticas en un sistema real como el de la figura 1.25, en el que se supone que las cargas son coplanarias con las barras AC y

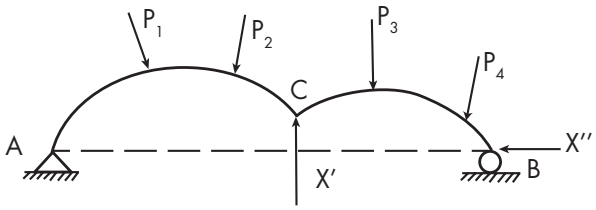


Figura 1.26

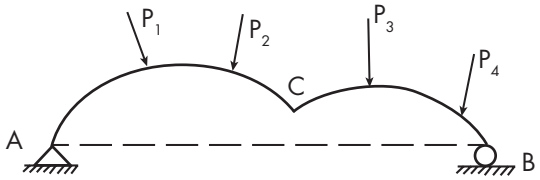


Figura 1.27

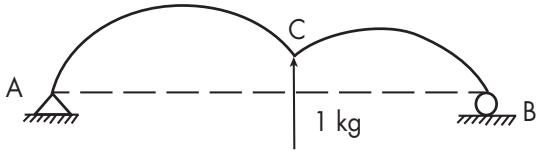


Figura 1.28

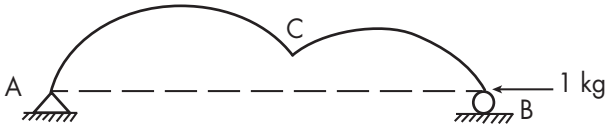


Figura 1.29

CB. Para ello se sustituye el sistema dado por su equivalente (figura 1.26), en que se han sustituido los apoyos en exceso por las incógnitas hiperestáticas X', X", considerándose los tres estados de carga indicados en las figuras 1.27, 1.28 y 1.29, sistema isostático fundamental, sistema virtual 1 y sistema virtual 2.

En virtud del principio de superposición de efectos los esfuerzos internos N,C,M, las reacciones R y las tensiones internas σ, responden a las expresiones:

$$N = N_0 + X'N' + X''N''$$
$$C = C_0 + X'C' + X''C''$$
$$M = M_0 + X'M' + X''M''$$
$$R = R_0 + X'R' + X''R''$$
$$\sigma = \sigma_0 + X'\sigma' + X''\sigma''$$

- N_0, C_0, M_0, R_0, y σ_0, corresponden al sistema isostático fundamental.
- N',C',M',R', y σ', se obtienen en el sistema virtual 1.
- N",C",M",R", y σ", se obtienen en el sistema virtual 2.

1.8.3. Consideraciones sobre el principio de los trabajos virtuales

Tanto para la determinación de los desplazamientos elásticos en sistemas isostáticos e hiperestáticos como para el cálculo de las incógnitas en exceso en estos últimos, el método de los trabajos virtuales es de aplicación absolutamente general, no estando sometido a restricción alguna.

En particular, puede utilizarse el método en el caso en que existan movimientos en los vínculos, aunque no estén originados por las cargas (asientos de los apoyos, variaciones térmicas...), así como cuando existen tensiones iniciales originadas por cualquier causa.

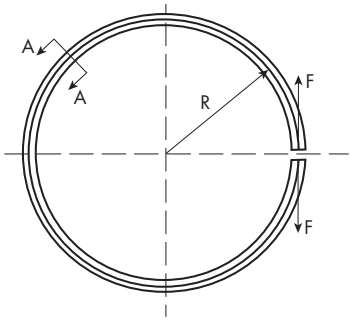
Al igual que los métodos basados en los teoremas sobre la energía interna de deformación, el principio de los trabajos virtuales no tiene aplicación práctica cuando el problema es de hiperestaticidad múltiple como es el caso de las estructuras reticulares en edificación, a las que nos referiremos en el capítulo 7.

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

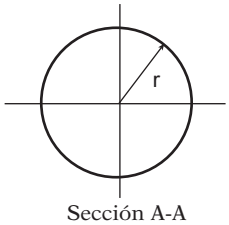
1. Un anillo metálico, de sección circular de radio r, está cortado radialmente como se indica en la figura. En ausencia de fuerzas exteriores el espesor de la abertura es muy pequeño. Si se aplican dos fuerzas iguales y opuestas F, se pide:

1º) Calcular en julios el trabajo interno de deformación del anillo, determinando los porcentajes correspondientes a cada una de las solicitaciones que se presentan en sus diversas secciones.

2º) Determinar la variación δ de la abertura.

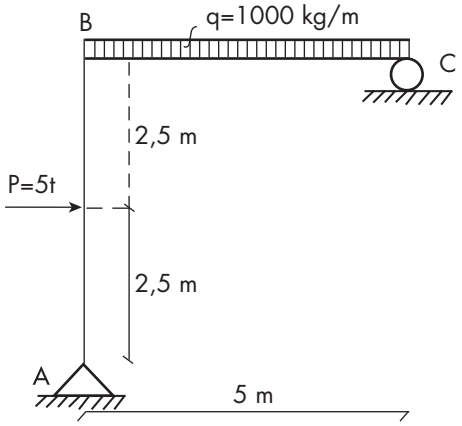


Datos R = 60 mm; r = 3 mm; F = 50 N;
$E=2{,}1\cdot10^6$ kg/cm^2; G = $8\cdot10^5$ kg/cm^2



Sección A-A

2. En el semipórtico de la figura, se pide:



1º) Diagramas de esfuerzos normales, esfuerzos cortantes y momentos flectores.

2º) Perfiles IPE necesarios en las barras AB y BC.

3º) Desplazamiento horizontal del apoyo C.

Datos: Acero A-42 con

Coeficiente de mayoración de cargas, $\gamma_c = 1{,}3$.

Coeficiente de minoración de la resistencia del acero, $\gamma_a = 1{,}1$

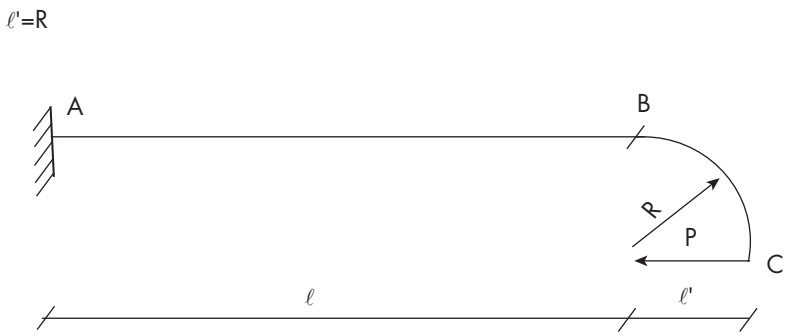
$E = 2{,}1 \cdot 10^6$ kg/cm^2.

3. Se tiene la barra de sección constante de la forma indicada en la figura, sometida a la carga horizontal P en el extremo libre C. Se pide:

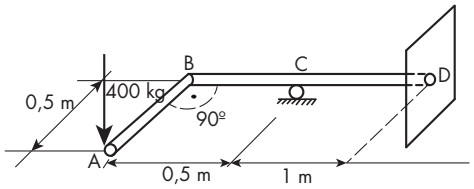
a) Diagramas de momentos flectores, esfuerzos cortantes y esfuerzos normales.

b) Desplazamientos horizontal y vertical del punto C, teniendo en cuenta sólo la acción flectora.

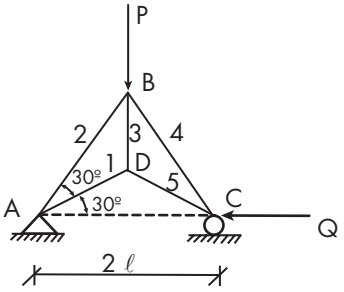
Considérense como datos E e I



4. La barra quebrada ABCD de la figura tiene una sección circular maciza. Determínese el valor mínimo de su radio para que en ningún punto se superen los valores de las tensiones admisibles del material.



C apoyo móvil.
D empotramiento.
σ_{adm} = 3200 kg/cm^2
τ_{adm} = 1800 kg/cm^2



5. En el sistema simétrico de la figura, formado por barras articuladas, todas de la misma sección, determinar el valor que debe tener la carga Q (en función de P) para que el desplazamiento horizontal del apoyo C sea nulo.

6. Dado el elemento resistente indicado en la figura, que está constituido por un prisma mecánico de acero de sección rectangular, cuya relación de lados es 2:1 y cargado uniformemente, se desea conocer:

1º) Diagramas de esfuerzos cortantes, normales, momentos flectores y momentos torsores.

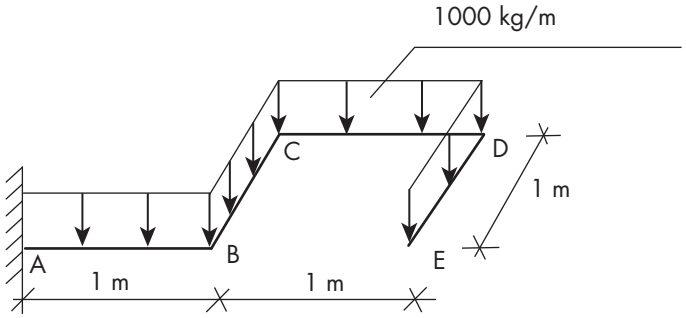
2º) Dimensionar la sección siendo τ_{adm} = 1400 kg/cm^2.

3º) Desplazamientos verticales del extremo volado debidos a cada uno de los distintos tipos de esfuerzos que actúan.

Datos: E=2,1·10^6 kg/cm^2; G=8·10^5 kg/cm^2; α = 0,246; β = 0,229

$$\tau_{max} = \frac{M_T}{\alpha a b^2}; \quad \theta = \frac{M_T}{G\beta a b^3} = \frac{M_T}{GI_T}$$

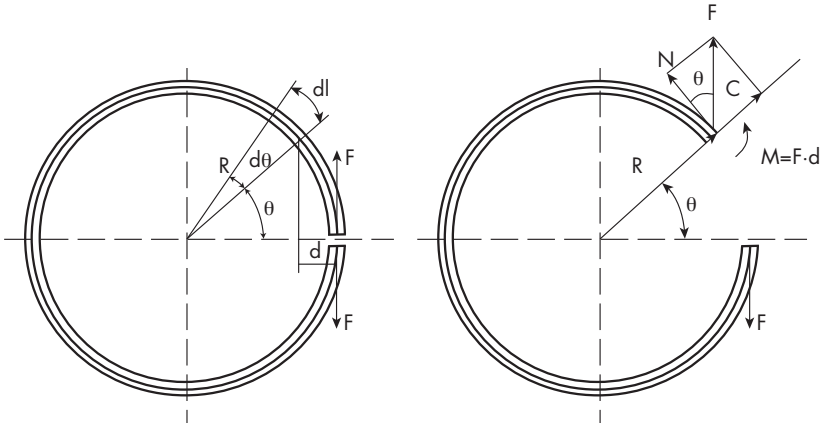
(estas expresiones se justificarán en el tema 6)



SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACIÓN

1. *1º)* Ya que el espesor del anillo es mucho más pequeño que el radio (2r/R = 0,1), podemos suponer que se trata de una pieza de pequeña curvatura, para la cual son válidas, con gran aproximación, las leyes correspondientes a las distribuciones de tensiones en piezas rectas.

Las solicitaciones a las que están sometidas las distintas secciones del anillo son un momento flector $M = f \cdot d = FR(1-\cos\theta)$, un esfuerzo cortante $C = -F\operatorname{sen}\theta$ y un esfuerzo normal, $N = -F\cos\theta$, como se deduce dando el corte radial indicado en la figura. Por tanto, se trata de un problema de flexión compuesta.



Los signos de M, C y N son los correspondientes a los criterios ya conocidos, teniendo en cuenta el sentido en que recorremos la pieza.

El trabajo interno de deformación será la suma de los correspondientes al momento flector, al esfuerzo cortante y al esfuerzo normal.

$$T_i = T_{iM} + T_{iC} + T_{iN} = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2 dl}{EI} + \frac{1}{2}\int_0^L \frac{C^2 dl}{GS'} + \frac{1}{2}\int_0^L \frac{N^2 dl}{ES}$$

Calcularemos, por separado, cada uno de los sumandos, teniendo en cuenta que dl = Rdθ y que existe simetría respecto al diámetro horizontal:

$$T_{iM} = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2 dl}{EI} = 2\frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{F^2 R^2 \left(1-\cos\theta\right)^2}{EI} Rd\theta =$$

$$= \frac{F^2 R^3}{EI}\int_0^\pi \left(1+\cos^2\theta - 2\cos\theta\right)d\theta = \frac{3\pi F^2 R^3}{2EI}$$

$$T_{iC} = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{C^2 dl}{GS'} = 2\frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{F^2 sen^2\theta}{GS'} Rd\theta == \frac{F^2 R}{GS'}\int_0^\pi sen^2\ \theta d\theta = \frac{\pi F^2 R}{2GS'}$$

$$T_{iN} = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{N^2 dl}{ES} = 2\frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{F^2\cos^2\theta}{ES} Rd\theta == \frac{F^2 R}{ES}\int_0^\pi \cos^2\ \theta d\theta = \frac{\pi F^2 R}{2ES}$$

Sustituyendo los datos numéricos y teniendo en cuenta que, para sección circular, $S' = \frac{9}{10}S$

$$T_{iM} = \frac{3\pi 50^2 \cdot 60^3}{2\cdot 210000\frac{1}{4}\pi\cdot 3^4} = 190,476 Nmm = 190,476\cdot 10^{-3}\ julios$$

$$T_{iC} = \frac{\pi 50^2 \cdot 60}{2\cdot 80000\frac{9}{10}\pi\cdot 3^2} = 0,115 Nmm = 0,115\cdot 10^{-3}\ julios$$

$$T_{iN} = \frac{\pi 50^2 \cdot 60}{2\cdot 210000\pi\cdot 3^2} = 0,039 Nmm = 0,039\cdot 10^{-3}\ julios$$

siendo los porcentajes correspondientes:

T_{iM} = 99,92 %; T_{iC} = 0,06 %; T_{iN} = 0,02 %

Como vemos, prácticamente todo el potencial interno se debe al momento flector.