MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Problemas resueltos

José María de Miguel Seco
Adrián de Miguel Solano

Editorial
Tébar Flores



© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial.

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial.

Matemáticas financieras

Problemas resueltos

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial.

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial.

Matemáticas financieras

Problemas resueltos

José María de Miguel Seco
Adrián de Miguel Solano

Editorial
Tébar Flores

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial.

Datos de catalogación bibliográfica:

MATEMÁTICAS FINANCIERAS: PROBLEMAS RESUELTOS
José María de Miguel Seco y Adrián de Miguel Solano

EDITORIAL TÉBAR FLORES, S.L., Madrid, año 2020
ISBN digital: 978-84-7360-750-6
Materias: PB. Matemáticas
Formato: 200 × 280 mm
Páginas: 236

www.tebarflores.com

Todos los derechos reservados. Queda prohibida, salvo excepción prevista en la Ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con la autorización expresa de Editorial Tébar Flores. La infracción de estos derechos puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (arts. 270 y siguientes del Código Penal).

MATEMÁTICAS FINANCIERAS: PROBLEMAS RESUELTOS
José María de Miguel Seco y Adrián de Miguel Solano

© 2020 Editorial Tébar Flores, S.L.
C/ Matilde Hernández, 34
28019 Madrid
Tel.: 91 550 02 60
ventas@tebarflores.com
www.tebarflores.com

ISBN digital: 978-84-7360-750-6

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial.

A Teresa

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial.

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial.

Índice

INTRODUCCIÓN **XI**

TEMA 1. CONCEPTOS GENERALES PREVIOS **1**

1.1. Introducción 3
1.2. Sistema de reserva fraccionaria y creación del dinero bancario 3
1.3. Rentabilidad: rédito y tipo de interés 7
1.4. Diferencia entre interés real y nominal 8

TEMA 2. PRINCIPIOS DE MATEMÁTICAS FINANCIERAS **11**

2.1. Introducción 13
2.2. Resumen de fórmulas básicas 13
2.3. Operaciones en régimen simple 15
2.4. Operaciones en régimen compuesto 34

TEMA 3. FINANCIACIÓN A CORTO PLAZO **59**

3.1. Introducción 61
3.2. Resumen teórico 61
3.3. Descuento por pronto pago 64
3.4. Descuento de letras comerciales 66
3.5. Factoring 75
3.6. Letras del Tesoro 76
3.7. Pagarés de empresa 84
3.8. Operación repo 87

TEMA 4. RENTAS FINANCIERAS **89**

4.1. Introducción 91
4.2. Rentas a interés simple 91

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial.

4.3. Rentas a interés compuesto 93
4.3.1. Resumen de fórmulas básicas 93
4.3.2. Rentas constantes 96
4.3.3. Rentas variables 121

TEMA 5. FINANCIACIÓN A LARGO PLAZO: PRÉSTAMOS 141

5.1. Introducción 143
5.2. Resumen de fórmulas básicas 143
5.3. Método francés 146
5.4. Método de cuotas de amortización constantes 154
5.5. Método americano 157
5.6. Comparación de distintos métodos de amortización 161
5.7. Préstamos con periodos de carencia 171
5.8. Cálculo de la TAE en préstamos 179

TEMA 6. FINANCIACIÓN A LARGO PLAZO: EMPRÉSTITOS 185

6.1. Empréstitos normales o puros 187
6.1.1. Introducción 187
6.1.2. Resumen de fórmulas básicas 187
6.1.3. Empréstitos Tipo I 190
6.1.4. Empréstitos Tipo II 196
6.2. Empréstitos con características comerciales 199
6.2.1. Introducción 199
6.2.2. Normalización de empréstitos 199
6.2.3. Cálculo de términos amortizativos, cuadro de amortización y tantos efectivos 201

ANEXO 1. IMPUESTO QUE GRAVA LAS LETRAS DE CAMBIO 215

ANEXO 2. FUNCIONAMIENTO DE LA HERRAMIENTA "BUSCAR OBJETIVO" Y DEL COMPLEMENTO "SOLVER" DE EXCEL 217

ÍNDICE DE CUADROS 221

BIBLIOGRAFÍA 223

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial.

Introducción

El libro tiene la finalidad de ayudar a sus lectores a comprender las cuestiones prácticas de las Operaciones Financieras basándose en problemas resueltos que se pueden dar en el mundo teórico y real.

El texto puede ser de utilidad para los alumnos de los grados de Administración y Dirección de Empresas (ADE) y para cualquier lector interesado en la comprensión de cuestiones matemático-financieras básicas, aplicables a la gestión de sus propios activos.

El contenido del texto es fruto de la combinación de la experiencia docente y práctica de sus autores.

Se ha buscado que el libro contenga toda la información teórica que es necesaria para poder enfocar y resolver los ejercicios planteados. Cada capítulo ofrece un resumen de las fórmulas aplicables a la situación del ejercicio y presenta otros problemas similares en el contexto concreto aportando, donde ha sido necesario, un recordatorio de la teoría que se aplica al caso.

Por todo ello, el material que se va a encontrar a continuación es autosuficiente para la comprensión de las finanzas, en un enfoque básico.

El contenido del libro se ha apoyado en tres pilares principales:

1) La resolución detallada de los problemas

2) La búsqueda de métodos alternativos de resolución de los problemas

3) El análisis de resultados en problemas comparables

El libro se estructura en seis capítulos. Se inicia con la solución de problemas sobre conceptos generales de cultura financiera, para continuar con el estudio de las bases de la matemática financiera. En el siguiente capítulo, se estudia la práctica de los activos financieros a corto plazo (descuento por pronto pago, letras, factoring, pagares, repos). Seguidamente se resuelven problemas sobre rentas financieras, tema básico en sí mismo y fundamental para el desarrollo práctico de los dos capítulos siguientes, dedicados a los activos financieros a largo plazo (Préstamos y Empréstitos).

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial.

Se aconseja una lectura secuencial de la materia ya que la complejidad es creciente y, además, la resolución de los problemas es más detallada y explicativa en los primeros capítulos, que se da por supuesta por parte del lector en los capítulos más avanzados.

Por último, en cuanto al proceso de edición del libro, señalar que los autores agradecen a Paloma su dedicación, eficiencia y paciencia en la trascripción de un manuscrito que, demasiadas veces, era difícilmente legible; y a la editorial por sus sugerencias y por dar visibilidad a este trabajo. También muestran su agradecimiento a las sucesivas promociones de alumnos que, con sus preguntas y comentarios de clase, han ido señalando los aspectos en los que convenía centrarse para un mejor entendimiento de los temas en los que se ha estructurado el libro.

Madrid, enero de 2020

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial.

CAPÍTULO

1

Conceptos generales

CONTENIDOS

1.1. INTRODUCCIÓN

1.2. SISTEMA DE RESERVA FRACCIONARIA Y CREACIÓN DEL DINERO BANCARIO

1.3. RENTABILIDAD: RÉDITO Y TIPO DE INTERÉS

1.4. DIFERENCIA ENTRE INTERÉS REAL Y NOMINAL

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial.

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial.

1.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan ciertos conceptos generales previos al estudio de las operaciones matemáticas financieras clásicas, que se desarrollarán en detalle en temas posteriores. Se profundiza sobre la creación del dinero bancario, así como sobre el sistema de reserva fraccionaria y sobre el concepto de rentabilidad, diferenciando entre rédito y tipo de interés. Por último se estudiará la diferencia entre interés real y nominal.

1.2. SISTEMA DE RESERVA FRACCIONARIA Y CREACIÓN DEL DINERO BANCARIO

Problema 1

En el contexto del sistema bancario de reserva fraccionaria, el BCE ha fijado el coeficiente de reserva en el 1%. Si suponemos que se depositan 1.000 € en metálico en un banco, se pide: calcular el valor del multiplicador monetario y el incremento que se produce en la oferta monetaria, en los siguientes casos:

a) *El banco presta el exceso de sus reservas y los agentes que intervienen, desde que se realiza el depósito, mantienen su dinero en el banco sin sacar efectivo, es decir, el coeficiente de efectivo es cero.*

b) *El coeficiente de efectivo aumenta al 10%.*

Teoría básica

La reserva fraccionaria es un mecanismo por el que los bancos comerciales deben mantener un porcentaje de los depósitos de sus clientes en efectivo, y el resto lo pueden prestar a otros clientes. Este porcentaje llamado "coeficiente de caja, coeficiente de reserva o encaje" lo fijan los bancos centrales, en el caso europeo el Banco Central Europeo (BCE).

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial.

Definiciones

Base monetaria $B = E + R$ Oferta monetaria $M = E + D$ Coeficiente de reserva $c = \frac{R}{D}$ Coeficiente de efectivo $e = \frac{E}{D}$ Multiplicador monetario $m = \frac{M}{B}$	E = Efectivo en manos del público (personas y empresas) R = Efectivo en manos del sistema crediticio (bancos) D = Depósitos a la vista – El efectivo (monedas y billetes) o dinero legal es emitido por los bancos centrales – El depósito bancario es el dinero bancario, o deuda que tienen los bancos con sus clientes, que es normalmente aceptado como medio de pago

Creación del dinero bancario

Supongamos que se deposita una cantidad de dinero (D) en un banco comercial. Éste, reservaría una parte $(c \cdot D)$ aplicando el coeficiente de reserva (c) y prestaría el resto $(1-c)D$.

Si no se sacara efectivo del sistema, el dinero del préstamo $(1-c)D$ se despositaría en este u otro banco. El banco dejaría una parte del depósito como reserva fraccionaria $c[(1-c)D]$ y prestaría el resto $(1-c)[(1-c)D] = (1-c)^2 D$, y así sucesivamente, hasta que la suma de todas las reservas fuese igual al depósito inicial. Gráficamente:

Banco comercial 1,2,3		
Activo	**Pasivo**	
Reserva: $c \cdot D$ Préstamo: $(1-c)D$	Depósito: D	Banco 1
Reserva: $c[(1-c)D]$ Préstamo: $(1-c)[(1-c)D] = (1-c)^2 D$	Depósito: $(1-c)D$	Banco 2
Reserva: $c[(1-c)^2 D]$ Préstamo: $(1-c)[(1-c)^2 D] = (1-c)^3 D$	Depósito: $(1-c)^2 D$	Banco 3

El total de los depósitos será:

$$D + (1-c)D + (1-c)^2 D + \ \ldots \ = D\left[1 + (1-c) + (1-c)^2 + \ldots\right] = D\frac{1}{c}$$

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial.

Es decir, los depósitos se han incrementado $\Delta D = D\frac{1}{c}$

El total de las reservas será:

$$c \cdot D + c \cdot D\,(1-c) + c \cdot D\,(1-c)^2 + ... = c \cdot D\,[1 + (1-c) + (1-c)^2 + ...] = D$$

es decir, las reservas se han incrementado en el valor del depósito inicial, $\Delta R = D$

Observar que en ambos casos se trata de una progresión geométrica $[1 + (1-c) + (1-c)^2 + ...]$ decreciente de razón $r = (1-c) < 1$ y su suma es:

$$S = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r}; \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{c}$$

El incremento de los préstamos será:

$$\Delta P = D\,[(1-c) + (1-c)^2 + (1-c)^3 + ...] = D\frac{1-c}{c}$$

también, teniendo en cuenta la igualdad contable:

$$\Delta R + \Delta P = \Delta D \Rightarrow \Delta P = \Delta D + \Delta R = D\frac{1}{c} - D = D\left(\frac{1}{c} - 1\right) = D\frac{1-c}{c}$$

El multiplicador monetario (*m*) se obtendría como:

$$m = \frac{\Delta D}{\Delta R} = \frac{D\frac{1}{c}}{D} = \frac{1}{c}$$

Luego, en el caso de que no se saque efectivo del sistema, el multiplicador monetario es el inverso al coeficiente de reserva.

Si ***c*** aumentara, ***m*** disminuiría y se crearía menos dinero bancario, habría una menor oferta monetaria (política monetaria contractiva).

Si ***c*** disminuyera, ***m*** aumentaría y se crearía más dinero bancario, habría una mayor oferta monetaria (política monetaria expansiva).

Si ***c*** = 1, entonces ***m*** = 1 y no se crearía dinero bancario, pero como contrapartida, no se concederían préstamos.

También se puede obtener una ecuación más general que relacione *m* con *e* y *c* a partir de la definición dada del multiplicador monetario.

$$m = \frac{M}{B} = \frac{E+D}{E+R} = \frac{\frac{E}{D} + \frac{D}{D}}{\frac{E}{D} + \frac{R}{D}} = \frac{e+1}{e+c}$$

En el caso de $e = o \Rightarrow m = \frac{1}{c}$

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial.

Solución

a) Calculamos el multiplicador monetario (m) y el incremento de la oferta monetaria (ΔM). Si se depositaran 1.000€ $(D = 1.000\,€)$, sabiendo que el efectivo en manos del público es cero $(\Delta E = 0 \Rightarrow e = 0)$ y el coeficiente de reserva $c = 1\%$

$$\Delta M = \Delta E + \Delta D \Rightarrow \Delta M = 0 + \Delta D = 0 + D\frac{1}{c} = \frac{1.000}{0,01} = \mathbf{100.000\,€}$$

Siendo el multiplicador monetario $m = \frac{1}{c} = \frac{1}{0,01} = 100$

Es decir, para un incremento de la base monetaria de:

$$\Delta B = \Delta E + \Delta R \Rightarrow \Delta B = 0 + D = D = \mathbf{1.000\,€}$$

El incremento de la oferta monetaria será de:

$$m = \frac{\Delta M}{\Delta B} \Rightarrow \Delta M = m \cdot \Delta B = \frac{1}{0,01} \cdot 1.000 = \mathbf{100.000\,€}$$

Para un incremento de la base monetaria de 1.000 €, la oferta monetaria se ha multiplicado por 100 ($m = 100$). Por cada euro en el sistema bancario de renta fraccionaria se han generado 99 euros como dinero bancario, es decir, se han generado 99 euros como anotaciones contables que aparecen en el pasivo de los bancos comerciales pero que no están físicamente.

También podríamos haber calculado el multiplicador monetario directamente de la fórmula:

$$m = \frac{e+1}{e+c} \text{ como } \quad e = 0 \quad \Rightarrow m = \frac{1}{c} = \frac{1}{0,01} = 100$$

b) Calcular los mismos valores $(m, \Delta M)$ si el coeficiente de efectivo (relación efectivo-depósitos) es de $e = 10\%$

Es decir, si de cada 110 € se mantienen en efectivo 10 € y en depósito 100 €

$$e = \frac{E}{D} = \frac{10}{100} = 0,1$$

El multiplicador monetario será:

$$m = \frac{e+1}{e+c} = \frac{0,1+1}{0,1+0,01} = 10$$

Como vemos, el valor del multiplicador monetario, es menor que en el caso anterior, en el que $e = 0$, por lo que el efecto en el incremento de la oferta monetaria también será menor:

$$\Delta M = \Delta B \cdot m = 1.000 \cdot 10 = \mathbf{10.000\,€}$$

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial.

Es decir, para un incremento de la base monetaria de 1.000 €, en el caso de que el coeficiente de efectivo sea del 10%, la oferta monetaria se ha multiplicado por 10.

Podemos concluir que, como ocurría con el coeficiente de caja (c), el coeficiente de efectivo (m) tiene una relación inversa con el multiplicador monetario.

$$\text{Si } e \uparrow \Rightarrow m \downarrow$$
$$\text{Si } e \downarrow \Rightarrow m \uparrow$$

1.3. RENTABILIDAD: RÉDITO Y TIPO DE INTERÉS

Problema 2

Un accionista ha comprado acciones por 10.000 €. A los 2 años, los vende por 12.000 €; en ese período ha recibido 100 € en concepto de dividendos. Si por la compra y por la venta posterior, su intermediario financiero le ha cobrado unas comisiones de 20 € por cada operación. ¿Cuál ha sido la rentabilidad simple obtenida por el inversor?

Solución

Para obtener la rentabilidad de forma intuitiva, dividimos el beneficio obtenido entre lo invertido, y si el beneficio es la diferencia entre el ingreso y el coste, tendremos que:

$$r = \frac{P_v - P_c}{P_c}$$

siendo:

r = rentabilidad

P_v = precio de venta

P_c = precio de compra

En este caso, al existir dividendos y comisiones:

$$r = \frac{P_v + D - G - P_c}{P_c}$$

siendo:

D = Rendimientos obtenidos no contenidos en el precio de venta. Dividendos

G = Gastos no contenidos en el precio de compra, ni en el de venta. Comisiones

$$r = \frac{12.000 + 100 - 40 - 10.000}{10.000} = \frac{2.060}{10.000} = 0,206 = 20,6\%$$

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial.

Vemos que esta rentabilidad o rédito es independiente del tiempo en que se han generado los rendimientos.

Si tenemos en cuenta el tiempo, el rédito (r) por unidad de tiempo (t) es el tanto o tipo de interés (i).

$$i = \frac{r}{t} = \frac{0,206}{2} = 0,103 = 10,3\% \ anual$$

Observar que el rédito y el tipo coincidirían cuando el intervalo de tiempo sea un año.

1.4. DIFERENCIA ENTRE INTERÉS REAL Y NOMINAL

Problema 3

Un banco nos ofrece un tipo de interés nominal del 2% en un depósito a un año. Si la inflación anual ha sido del 1,5%.

a) *¿Cuál ha sido el interés real que hemos obtenido?*

b) *¿Cuál ha sido el interés real si tenemos en cuenta que el impuesto sobre las rentas del capital o tipo de gravamen del ahorro, es del 19%?*

c) *¿Cuál tendría que ser el tipo de interés nominal que le deberíamos solicitar al banco para no perder capacidad adquisitiva?*

Teoría básica

La ecuación de Fisher relaciona los tipos de interés reales y los tipos de interés nominales con la inflación.

$$(1 + i_r) = \frac{(1 + i_n)}{(1 + \pi)}$$

siendo:

i_r = tipo de interés real

i_n = tipo de interés nominal

π = inflación

El tipo de interés nominal es el tipo de interés del mercado, el que se cobra (o se paga) en el mercado.

El tipo de interés real simboliza la ganancia del poder adquisitivo que proporcionan los intereses y representa un ajuste del interés nominal según la tasa de inflación.

La ecuación de Fisher se puede simplificar como:

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial.

$$i_r = i_n - \pi$$

es decir, el interés real se calcula como la diferencia entre el tipo de interés nominal y la inflación.

Solución

a) Tipo de interés real

Aplicando la ecuación de Fisher:

$$(1 + i_r) = \frac{(1 + i_n)}{(1 + \pi)} \Rightarrow i_r = \frac{1 + i_n}{1 + \pi} - 1 = \frac{1{,}02}{1{,}015} - 1 = 0{,}4926\%$$

Aplicando la ecuación de Fisher simplificada:

$$i_r = i_n - \pi = 2\% - 1{,}5\% = 0{,}5\%$$

b) Tipo de interés real teniendo en cuenta el impuesto t = 19%

Aplicando Fisher:

$$(1 + i_r) = \frac{1 + i_n(1-t)}{1 + \pi} \Rightarrow i_r = \frac{1 + i_n(1-t)}{1 + \pi} - 1 = \frac{1 + [0{,}02(1 - 0{,}19)]}{1 + 0{,}015} - 1 = 0{,}118\%$$

Aplicando la ecuación de Fisher simplificada:

$$i_r = i_n(1-t) - \pi = 0{,}02(1 - 0{,}19) - 0{,}015 = 0{,}12\%$$

c) Tipo de interés nominal para cubrir la inflación

$$i_n(1-t) \geq \pi$$

$$i_n(1 - 0{,}19) \geq 0{,}015 \Rightarrow i_n \geq \frac{0{,}015}{0{,}91} = 1{,}85\%$$

Comprobamos que:

$$i_n(1-t) - \pi = 1{,}85(1 - 0{,}19) - 1{,}5 = 1{,}4985 - 1{,}5 \simeq 0$$

Por ejemplo, si depositáramos 10.000 € en un depósito a un año al 1,85% de interés nominal.

Intereses recibidos = $10.000 \cdot 1{,}85\% = 185\,€$

IRPF: $19\% \cdot 185 = 35{,}15\,€$

Intereses netos $185 - 35{,}15 = 149{,}85 \simeq 150\,€$

Los intereses netos $150\,€$ cubren la inflación $1{,}5\% \cdot 10.000 = 150\,€$

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial.

Uno de los primeros objetivos de un inversor es conservar el valor adquisitivo de su dinero, es decir que la rentabilidad neta obtenida por su inversión cubra la inflación. Por tanto, si el dinero no se invirtiera, se incurriría en un coste de oportunidad por no haber rentabilizado el capital a través de una inversión y, además, se perdería el poder adquisitivo por el efecto de la inflación.

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial.

CAPÍTULO

2

Principios de Matemáticas Financieras

CONTENIDOS

2.1. INTRODUCCIÓN

2.2. RESUMEN DE FÓRMULAS BÁSICAS

2.3. OPERACIONES EN RÉGIMEN SIMPLE

2.4. OPERACIONES EN RÉGIMEN COMPUESTO

© Editorial Tébar Flores. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial.