

Guillaume Connan

VISA POUR LA PRÉPA

MATHS ET INFORMATIQUE

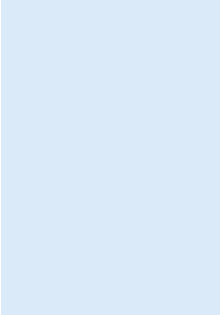
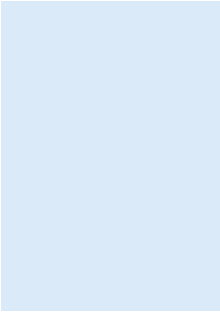
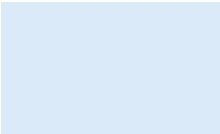
MPSI - MP2I - PCSI - PTSI
BCPST - ECG - TSI - TPC

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

© Dunod, 2025
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-088479-7

Table des matières

	Avant-propos	VII
	1. Savez-vous raisonner ?	1
	1.1 Un brin de logique	1
	1.2 Raisonnement par récurrence	6
	1.3 Ensembles	9
	1.4 Exercices	14
	Coups de pouce	19
	Solutions et commentaires	21
	2. Savez-vous calculer ?	28
	2.1 De l'importance de savoir calculer	28
	2.2 Calcul de sommes et de produits	28
	2.3 Rappels utiles - Formulaire	33
	2.4 Exercices	36
	Coups de pouce	43
	Solutions et commentaires	45
	3. Les suites	69
	3.1 Convergence d'une suite	69
	3.2 Suites récurrentes d'ordre 1	80
	3.3 Exercices	86

Coups de pouce	93
Solutions et commentaires	94

4. Savez-vous intégrer ? 107

4.1	Mise en place d'une définition	107
4.2	Quelles sont les fonctions intégrables ?	112
4.3	Propriétés de l'intégrale	113
4.4	Valeur moyenne	114
4.5	Primitive et intégrale	116
4.6	Exercices	119
	Coups de pouce	124
	Solutions et commentaires	125

5. Savez-vous prévoir ? 133

5.1	Rappels de théorie des ensembles	133
5.2	Une dose d'algèbre générale	134
5.3	Quelques résultats sur les cardinaux	136
5.4	Dénombrement	137
5.5	Triangle de PASCAL – Binôme de NEWTON	139
5.6	Probabilités ?	140
5.7	Avant la formalisation	140
5.8	Espace probabilisable – Espace probabilisé	141
5.9	Probabilités conditionnelles	144
5.10	Variables aléatoires réelles finies	147
5.11	Quelques lois discrètes classiques	152
5.12	Exercices	154
	Coups de pouce	162
	Solutions et commentaires	164

6. Savez-vous programmer ?	181
6.1 Avant de commencer	181
6.2 Premiers pas	182
6.3 Un peu de vocabulaire	183
6.4 Les types de base	187
6.5 Instructions et expressions conditionnelles	192
6.6 Elif	192
6.7 Survol des structures de données	193
6.8 Les boucles	201
6.9 Les fonctions	204
6.10 Exercices	212
Coups de pouce	225
Solutions et commentaires	227
Index	247

Avant-propos

Vous vous apprêtez à entrer en Prépa : bravo ! C'est le bon choix :)

Vous attendent des semaines remplies d'explorations scientifiques mais surtout de rude labeur. Préparez-vous à subir un choc, notamment en mathématiques depuis que la réforme du secondaire a sans cesse allégé les horaires de cette discipline et le niveau d'exigence jusqu'à enlever une heure de cours par semaine en spécialité de la classe de Première, à inciter les futurs BCPST à choisir l'option mathématiques complémentaires et à laisser l'étude des notions importantes de Terminale après l'épreuve du Bac du mois de mars.

On observe donc une certaine érosion des capacités de calcul et on voit arriver en Prépa des élèves qui n'ont pas toujours travaillé l'informatique et qui ne savent pas trop ce que signifie travailler un cours.

Heureusement, c'est pour remédier à ces lacunes que le *Visa* a été conçu ! Dès le second semestre de Terminale ou au moins durant l'été et même pendant vos premiers mois en Prépa, vous pourrez (et devrez...) travailler sur le *Visa*. Il faudra d'abord absolument travailler le cours jusqu'à sa parfaite assimilation. Ce n'est qu'ensuite que le travail sur les exercices pourra être fructueux. Une succession d'allers-retours entre cours et exercices vous permettra ensuite de peaufiner votre compréhension des notions. Ne regardez les corrigés qu'en dernier recours : l'essentiel en mathématiques est de chercher et non pas de reproduire les idées des autres. Le chemin de votre progression sera semé d'erreurs, d'impasses mais surtout de la joie de découvrir, de comprendre et de créer votre propre solution.

Il ne me reste alors plus qu'à vous souhaiter la bienvenue dans le monde merveilleux des explorations mathématiques et surtout bon courage pour ce travail sur le cours.

Joyeux été mathématique !

Guillaume Connan



Salon d'aide et d'échange :

Durant votre travail sur le *Visa*, vous pourrez faire vos remarques, poser vos questions, répondre à celles des autres et proposer vos propres solutions sur le groupe de discussion Element :

<https://element.io/get-started>

Installez l'application sur Windows, Mac, GNU-Linux, tablette ou smartphone. Créez un compte et envoyez un message via Element à @giyom:matrix.org pour finaliser votre inscription.

1.1 Un brin de logique

« Contrariwise, continued Tweedledee, if it was so, it might be; and if it were so, it would be; but as it isn't, it ain't. That's logic. »

LEWIS CARROLL – *De l'autre côté du miroir*

— Rapports de jury de concours

Voici quelques extraits de rapports de jurys qui mettent en évidence certaines lacunes que nous allons tenter de combler dans ce chapitre :

- « D'une façon générale, les candidats ont tendance à utiliser un langage de plus en plus imprécis : on entend "on fait f ", "on remplace", "on passe de l'autre côté"... »
- « On peut aussi signaler que certains candidats ne se facilitent pas les choses en appelant x un nombre entier et k un réel ! Et ceci est de plus en plus fréquent ! »
- « Les symboles "implique" et "équivalent" sont employés comme des signes de ponctuation. »
- « Certains candidats semblent parfois confondre "appliquer une méthode" et "construire un raisonnement" ; on peut par exemple rappeler que tout n'est pas un raisonnement par récurrence. »
- « Il faut être capable d'identifier une condition nécessaire ou une condition suffisante et surtout éviter de confondre ces deux notions. »
- « Les résultats du cours sont les points d'appui sur lesquels on demande aux candidats de construire leur raisonnement. Il est donc indispensable de connaître son cours et il faut s'attendre à ce que l'examineur demande de citer explicitement un théorème ou une définition. On commence à constater une certaine tendance à privilégier la résolution des exercices plutôt que la compréhension. Certains élèves savent que "on fait comme ça", ou citent "je connais un exercice qui ressemble". Les candidats doivent faire attention à ne pas confondre méthode et astuce. »
- « Comme l'an dernier, le niveau est très hétérogène et l'impression générale ressentie à la lecture des copies amène à penser que les questions les plus subtiles, qui demandent une compréhension fine de la théorie, quel que soit le domaine concerné, échappent à presque tous les candidats. La plupart d'entre eux ont acquis des techniques et des réflexes mais ne comprennent pas forcément en profondeur ce qu'ils font. »

— Contexte

On appellera **proposition** tout énoncé dont on peut décider s'il est vrai ou faux indépendamment de ses composantes.

On distinguera la logique des propositions de la logique des **prédicats**, qui introduit des variables dans les assertions pouvant les rendre donc parfois vraies et parfois fausses.

Par exemple « *Je suis actuellement en salle 3* » est une proposition susceptible d'être vraie ou fausse dans toute situation alors que la valeur de vérité de « *x est actuellement en salle 3* » dépend de *x*.

En informatique, **Vrai** et **Faux** sont appelés des **booléens**, notés `True` et `False` en **Python** :

```
>>> 2 > 3
False
>>> 2 < 3
True
>>> 2 + 2 == 4
True
>>> len("Papa") == 2 + 2
True
```

— Implication

Définition : implication

A et B étant deux propositions, on note $A \Rightarrow B$ (A implique B) la proposition qui est toujours vraie sauf quand A est vraie et B est fausse.

On comprend alors mieux cette citation de Pierre DAC (dans *Y'a du mou dans la corde à nœuds*) : « Avec le mot *SI* on peut faire tout ce qu'on ne peut pas faire. »

On peut résumer la situation dans une **table de vérité** car les propositions *A* et *B* ne peuvent prendre que deux valeurs donc il n'y a que quatre possibilités pour les valeurs du couple (*A*, *B*) :

A	B	$A \Rightarrow B$
F	F	V
F	V	V
V	V	V
V	F	F

Ainsi, le cas où *A* est fausse ne nous intéresse pas vraiment car on est sûr que l'implication sera vraie quelle que soit la valeur de vérité de *B*.

Ainsi, $A \Rightarrow B$ étant vraie, on peut dire que :

- SI *A* (est vraie) ALORS *B* (est vraie).
- *A* est vraie SEULEMENT SI *B* est vraie.
- IL SUFFIT que *A* soit vraie pour que *B* soit vraie.
- IL FAUT que *B* soit vraie pour que *A* soit vraie.
- *A* est une **condition suffisante** de *B*.
- *B* est une **condition nécessaire** de *A*.

Exemple

Soit A la proposition : x est un entier naturel. Soit B la proposition : x est positif.

Les propositions suivantes sont vraies :

- SI x est un entier naturel ALORS x est positif.
- IL SUFFIT que x soit un entier naturel pour que x soit positif.
- IL FAUT que x soit positif pour que x soit un entier naturel.
- x est un entier naturel SEULEMENT SI x est positif.
- x entier naturel est une **condition suffisante** de x positif.
- x positif est une **condition nécessaire** de x entier naturel.

On a bien « x est un entier naturel » implique que « x est positif » ($A \Rightarrow B$ est vraie).

Remarque

$B \Rightarrow A$ est la proposition **réciroque** de $A \Rightarrow B$.

Contraposée

Reprenons notre exemple : SI x n'est pas positif ALORS x ne peut pas être un entier naturel.

On note $\neg A$ la **négation** de A . L'observation précédente signifie que $\neg B \Rightarrow \neg A$. Est-ce toujours le cas? Dressons la table !

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F

Ainsi, dans tous les cas, $A \Rightarrow B$ et $\neg B \Rightarrow \neg A$ ont la même valeur de vérité.

Ainsi, dans certains cas, pour démontrer une implication, il sera parfois plus simple de démontrer la contraposée.

Remarque

Dans un théorème du cours de mathématiques sous la forme SI hypothèse ALORS conclusion, on a en fait une implication « hypothèse $\Rightarrow$ conclusion ».

- Si on a l'hypothèse vérifiée et le théorème démontré alors on peut en déduire que la conclusion est vraie. C'est le *modus ponens*.
- Si on a le contraire de la conclusion vérifié et le théorème démontré, alors on peut en déduire que le contraire de l'hypothèse est vrai. C'est le *modus tollens*.
- Par exemple, en supposant que la proposition « x est un entier naturel implique que x est positif » est un théorème, 3 étant un entier naturel, on en déduit que 3 est positif.
- On peut aussi dire que comme -3 n'est pas positif, on en déduit que -3 n'est pas un entier naturel.



— Contraire (négation) d'une implication

On voudrait savoir si la proposition « un nombre est positif implique que ce nombre est un entier naturel » (i.e. $B \Rightarrow A$) est vraie.

On « sent » bien que non. Par exemple $\sqrt{2}$ est bien positif (hypothèse vraie) mais pourtant ce n'est pas un entier naturel (conclusion fausse).

Si on formalise, on a $B \text{ ET } \neg A$. Est-ce que par hasard $B \text{ ET } \neg A$ ne serait pas la négation de $B \Rightarrow A$?

C'est quoi ET ? Pour être en accord avec le *bon sens*, on dira que $P \text{ ET } Q$ est vrai si, et seulement si, les deux propositions P et Q sont simultanément vraies. On note cet opérateur $\wedge$.

B	A	$\neg A$	$B \wedge \neg A$	$B \Rightarrow A$
F	F	V	F	V
F	V	F	F	V
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F

Bingo ! Les deux propositions sont bien contraires. Or une proposition et son contraire ne peuvent pas être vraies simultanément (c'est ce qu'on appelle le **tiers exclu**).

Puisque $B \wedge \neg A$ est vrai (dans le cas de $\sqrt{2}$), c'est que son contraire, $B \Rightarrow A$, est faux.

— Quantificateurs

Un pour tous : $\forall$

Il y a quelque chose de pas très clair cependant. On a parlé d'un certain x , ou d'un certain entier... C'est un peu flou.

Il vaudrait mieux écrire que notre théorème est en fait :

« Quel que soit le nombre x , si x est un entier naturel alors il est positif. »

Plus formellement, on a l'habitude de noter cela :

$$(\forall x)(x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \geq 0)$$

Ce symbole $\forall$ se lit « pour tout » (notation introduite par l'Allemand GENTZEN en 1933 : « pour tout » se dit *für Alle* en allemand, d'où le A à l'envers).

Un pour l'existence : $\exists$

Nous avons établi qu'il existait **au moins** un nombre positif ($\sqrt{2}$) qui n'était pas un entier naturel. Cela s'écrit formellement :

$$(\exists x)(x \geq 0 \wedge x \notin \mathbb{N})$$

Ce symbole $\exists$ se lit « il existe *au moins* » (on le doit au britannique Bertrand RUSSELL dans ce contexte).

Il existe une variante : $(\exists!)$ qui signifie « il existe un UNIQUE élément ».