

Yves Granjon

TOUT EN FICHES

EXERCICES ET MÉTHODES

AUTOMATIQUE DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS

LICENCES, IUT, ÉCOLES D'INGÉNIEURS

DUNOD

Illustration de couverture : asharkyu/Shutterstock

© Dunod, 2022

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-084532-3

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

1	Modélisation des systèmes linéaires, notion de fonction de transfert	1
	Fiche 1 Systèmes et signaux.....	1
	Fiche 2 Les systèmes linéaires.....	3
	Fiche 3 Transformation de Laplace.....	4
	Fiche 4 Transformées de Laplace de signaux usuels.....	8
	Fiche 5 Fonction de transfert.....	10
	Fiche 6 Méthode de résolution.....	11
	QCM	15
	Vrai ou faux ?.....	18
	Exercices	20
2	Modélisation fréquentielle des signaux, notion de spectre	29
	Fiche 1 Description des signaux.....	29
	Fiche 2 Cas des signaux périodiques.....	32
	Fiche 3 Signaux non périodiques à énergie finie.....	34
	QCM	39
	Vrai ou faux ?.....	42
	Exercices	44
3	Modélisation fréquentielle des systèmes linéaires	55
	Fiche 1 Définitions.....	55
	Fiche 2 Diagrammes de Bode	56
	Fiche 3 Diagramme de Nyquist.....	64
	QCM	67
	Vrai ou faux ?.....	70
	Exercices	72

4	Étude systématique des systèmes d'ordre 1 et 2	85
	Fiche 1 Méthodes	85
	Fiche 2 Étude temporelle des systèmes du premier ordre.....	86
	Fiche 3 Étude fréquentielle d'un système d'ordre 1.....	89
	Fiche 4 Étude temporelle des systèmes du second ordre.....	91
	Fiche 5 Étude fréquentielle d'un système d'ordre 2.....	94
	QCM	101
	Vrai ou faux ?.....	104
	Exercices	106
5	Mise en équation des asservissements linéaire	119
	Fiche 1 Inconvénients de la commande en boucle ouverte	119
	Fiche 2 Principe de la commande en boucle fermée	120
	Fiche 3 Modélisation d'une boucle de régulation	122
	Fiche 4 Stabilité et performances d'un système régulé	123
	QCM	125
	Vrai ou faux ?.....	128
	Exercices	130
6	Stabilité des systèmes linéaires asservis	143
	Fiche 1 Critère mathématique de stabilité	143
	Fiche 2 Critère algébrique de Routh.....	145
	Fiche 3 Critère de Nyquist	147
	Fiche 4 Critère du revers	153
	Fiche 5 Marge de stabilité.....	153
	QCM	160
	Vrai ou faux ?.....	163
	Exercices	165
7	Performances des systèmes linéaires asservis	175
	Fiche 1 Problématique générale.....	175
	Fiche 2 Précision d'un système asservi	176
	Fiche 3 Rapidité de systèmes régulés	180
	Fiche 4 Limitation du dépassement	184
	Fiche 5 Influence du gain statique en boucle ouverte sur les performances en boucle fermée	186
	Fiche 6 Étude de cas	188
	QCM	191
	Vrai ou faux ?.....	194
	Exercices	196

8	Correction des systèmes linéaires asservis	205
Fiche 1	Cahier des charges d'un asservissement	205
Fiche 2	Principe général de la correction d'un système.....	206
Fiche 3	Actions correctives élémentaires	207
Fiche 4	Action proportionnelle intégrale, correcteur à retard de phase	211
Fiche 5	Action proportionnelle dérivée, correcteur à avance de phase	214
QCM		218
Vrai ou faux ?		221
Exercices		223
Annexe A		237
Annexe B		239
Annexe C		241
Index		245

Modélisation des systèmes linéaires, notion de fonction de transfert

1

MOTS-CLÉS

Signaux, entrées, sorties, systèmes linéaires, transformation de Laplace, propriétés de la transformée de Laplace, échelon, rampe, impulsion, fonction de transfert, pôles, zéros, théorème du retard, résolution de problèmes.

La mise en évidence des principes fondamentaux de l'automatique nécessite une modélisation particulière des systèmes que l'on souhaite piloter. Notre propos se limitant, dans cet ouvrage, à l'automatique des systèmes linéaires continus, nous nous limiterons à la modélisation simple et classique conduisant à la notion de fonction de transfert. Ce premier chapitre présente tout ce que le lecteur doit savoir pour manipuler ce type de modèle.

Fiche 1

Systèmes et signaux

Introduction

La plupart des systèmes physiques peuvent être décrits comme étant des opérateurs faisant correspondre des réponses R à des sollicitations S (figure 1.1). Ainsi, un système électrique pourra être étudié et caractérisé en exprimant une tension de sortie (réponse) en fonction d'une tension d'entrée (sollicitation). Ou encore, la position d'un amortisseur de véhicule (réponse) pourra être étudiée en fonction de l'excitation produite par les irrégularités de la route. Un faisceau de lumière (sollicitation) dirigé vers une face d'un matériau et qui ressort au travers d'une autre face (réponse) peut par exemple renseigner sur l'état dudit matériau.

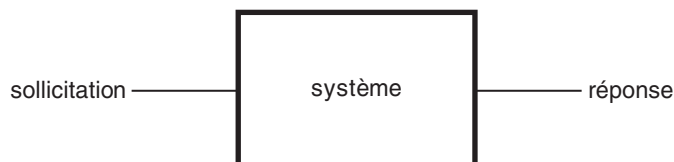


Figure 1.1

Les exemples peuvent être multipliés à l'infini, car finalement, cette modélisation peut s'appliquer à la quasi-totalité des objets physiques, et ce, que ce soit en électricité, en mécanique, en chimie, en optique, etc. Tout système peut donc s'apparenter au modèle proposé sur le schéma de la figure 1.1.

Dans la réalité, les systèmes peuvent posséder une ou plusieurs entrées, une ou plusieurs sorties, certaines sorties pouvant même éventuellement être considérées comme de nouvelles entrées ; c'est le cas des systèmes bouclés qui jouent un rôle important en automatique et nous allons nous y intéresser particulièrement.

Nous allons déjà étudier la manière dont le fonctionnement de tels systèmes peut être décrit, à partir de modèles mathématiques plus ou moins sophistiqués (en tout cas adaptés à la complexité du problème). Ceci nous permettra de répondre à différents types de question, par exemple :

- Quelle sera la réponse d'un système quelconque à telle ou telle sollicitation ? (Aspect prédictif.)
- De quoi se compose un système qui fournit telle réponse à telle sollicitation ? (Aspect caractérisation, identification, mais aussi diagnostic et détection de défauts.)
- Comment adapter ou régler un système pour qu'il fournisse une réponse donnée à une certaine sollicitation ?
- D'autres questions se poseront tout au long de cet ouvrage. Il est d'ores et déjà évident qu'une meilleure connaissance de ces systèmes conditionne non seulement leur utilisation, mais également tous les concepts physiques qui y sont associés.

Notion de signal

Nous pouvons donc avoir une première approche des systèmes en considérant le couple (sollicitation - réponse).

Imaginons un système optique réfléchissant vers lequel on dirige un faisceau de lumière. Le faisceau réfléchi constitue en quelque sorte une information, au sens où il est porteur d'une certaine signification. Nous le qualifierons de signal, tout comme le faisceau incident, puisqu'on ne saurait admettre que la réponse d'un système soit porteuse d'information si la sollicitation ne l'était pas.

D'une manière générale, toute sollicitation ou réponse d'un système sera considérée comme un signal. Les sollicitations ou excitations sont des signaux d'entrée et les réponses sont des signaux de sortie.

Pour le moment, nous ne considérerons que des systèmes mono-entrée, mono-sortie. Par convention, l'entrée sera notée e et la sortie sera notée s .

Signaux temporels

Le moyen qui *a priori* semble le plus naturel pour décrire un signal consiste à invoquer son évolution au cours du temps. Ainsi les formes $e(t)$ et $s(t)$ sont-elles des représentations temporelles des signaux e et s .

Nous verrons un peu plus tard que ce mode de représentation n'est pas toujours le plus intéressant. Toutefois, dans l'immédiat, nous nous limiterons à cette description temporelle de l'information.

Ainsi, on peut dire qu'un système quelconque est capable de prendre un signal $e(t)$ et de la transformer en un signal $s(t)$.

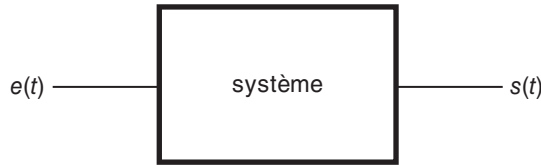


Figure 1.2

• Principe de causalité

Les signaux temporels possèdent une propriété essentielle sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir à maintes reprises : un effet ne pouvant survenir qu'après la cause qui lui a donné naissance, la réponse temporelle d'un système ne peut en aucun cas précéder la sollicitation qui en est la cause. Il s'agit du principe de causalité qui n'est pas qu'une vérité de Lapalisse comme nous aurons l'occasion de nous en rendre compte.

Signaux non temporels

La théorie des signaux ne traite pas que des signaux temporels. Si par exemple on considère une image en noir et blanc, statique sur un écran, le signal que constitue cette image peut être considéré comme une luminosité dépendant de deux variables spatiales (x, y). Dans ce cas, la variable temps n'a rien à voir avec le problème. D'autres cas pourraient être cités en exemple. Dans ces cas où t n'intervient pas, on peut s'attendre à ce que le principe de causalité ne soit pas respecté.

Il n'est pas question ici d'ébaucher une classification des différents types de signaux. Celle-ci sera abordée plus tard. Nous utiliserons dans la suite de ce chapitre, l'exemple de signaux temporels appliqués à des systèmes simples : les systèmes linéaires.

Fiche 2

Les systèmes linéaires

Considérons un système et un signal d'entrée $e(t)$ qui est une combinaison linéaire de n signaux :

$$e(t) = \lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t) + \dots + \lambda_n e_n(t)$$

On définira comme système linéaire tout système qui conserve au niveau de sa sortie la combinaison linéaire d'entrée, chaque $s_i(t)$ étant la sortie correspondant à $e_i(t)$.

$$s(t) = \lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t) + \dots + \lambda_n s_n(t)$$

La plupart du temps, ces systèmes sont régis par des équations différentielles à coefficients constants.

Soit $e(t)$ le signal d'entrée, $s(t)$ le signal de sortie. L'équation générale d'un système linéaire s'écrit de la manière suivante :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e(t)$$

Ces systèmes conservent toutes les opérations linéaires (dérivation, intégration, ...). Le plus grand des deux indices n et m est appelé ordre du système.

Lorsque le système est effectivement excité par un signal $e(t)$, cette équation différentielle possède effectivement un second membre. Si le système est libre et isolé, le second membre est nul.

Remarque

Nous ne nous intéresserons, dans cet ouvrage, qu'aux systèmes linéaires et aux signaux temporels continus ; les notions qui suivent ne s'appliquent donc qu'à de tels systèmes, dits linéaires à temps continu.

Fiche 3

Transformation de Laplace

Définition

Considérant une fonction réelle d'une variable réelle $s(t)$ telle que $s(t) = 0$ pour $t < 0$, on définit sa transformée de Laplace $L(s)$ comme la fonction S de la variable complexe p telle que :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t)e^{-pt} dt$$

La fonction $S(p)$ est une fonction complexe d'une variable complexe p (avec $p = \tau + j\omega$).

La transformée de Laplace d'une fonction $s(t)$ n'existe pas dans tous les cas : il est nécessaire que l'intégrale ci-dessus converge. On démontre que cette convergence est vérifiée si la partie réelle τ de la variable p est supérieure à une valeur donnée α appelée seuil de convergence.

D'une manière plus générale, la transformation de Laplace est une application de l'espace des fonctions du temps (nulles pour $t < 0$) vers l'espace des fonctions complexes d'une variable complexe. La fonction $s(t)$ s'appelle l'original de $S(p)$, ou encore sa transformée inverse.

Propriétés fondamentales

Les propriétés qui suivent sont fondamentales car elles permettent de calculer facilement (sans utiliser la définition de la transformation de Laplace) les transformées de Laplace de certains signaux.

Remarque

Nous verrons plus loin que la connaissance de ces quelques propriétés d'une part et d'une dizaine de transformées de Laplace usuelles, d'autre part, permet de déduire pratiquement n'importe quelle transformée de Laplace.

Linéarité

La linéarité de la transformation de Laplace résulte naturellement de la linéarité de l'intégration. Il s'agit là, malgré des apparences de simplicité, d'une des propriétés les plus importantes. Si f et g sont deux fonctions temporelles possédant chacune une transformée de Laplace, on a :

$$L[\alpha f + \beta g] = \alpha L[f] + \beta L[g]$$

En particulier : $L[f + g] = L[f] + L[g]$ et $L[\alpha f] = \alpha L[f]$

Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit $f(t)$ une fonction du temps. Soit $F(p)$ sa transformée de Laplace. On montre que la transformée de Laplace de sa dérivée première se calcule simplement en fonction de $F(p)$:

$$\frac{df}{dt} \rightarrow pF(p) - f(0)$$

De même, la transformée de Laplace de sa dérivée n -ième est :

$$\frac{d^n f}{dt^n} \rightarrow p^n F(p) - \sum_{k=n+1}^{2n} \left(p^{2n-k} \frac{d^{k-n-1} f}{dt^{k-n-1}}(0) \right)$$

Par exemple :

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \rightarrow p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$$

Une première constatation s'impose en observant ces expressions : la transformation de Laplace transforme l'opérateur *dérivation* en un opérateur arithmétique. Il faut noter que l'on retrouve dans ces expressions les conditions initiales, c'est-à-dire les valeurs en $t = 0$ des dérivées successives d'ordres inférieurs à l'ordre de dérivation considéré.

Remarque

Dans le cas où ces conditions initiales sont nulles, ce qui est *a priori* très souvent le cas, on peut retenir simplement les relations suivantes :

$$\frac{df}{dt} \rightarrow pF(p) \quad ; \quad \frac{d^n f}{dt^n} \rightarrow p^n F(p)$$

Transformée de Laplace d'une primitive

Soit $P(t)$ une primitive d'une fonction $f(t)$ et $F(p)$ la transformée de Laplace de cette fonction.

$$\text{On a : } P(t) = \int f(t) dt \rightarrow \frac{F(p)}{p} + \frac{P(0)}{p}$$

Là encore, l'opérateur *intégration* se trouve changé en un opérateur arithmétique dans l'espace des transformées de Laplace.

Remarque

Dans le cas où la condition initiale $P(0)$ est nulle, ce qui est *a priori* très souvent le cas, on peut retenir simplement la relation suivante :

$$P(t) = \int f(t) dt \rightarrow \frac{F(p)}{p}$$

Propriétés de changement d'échelle

$$f(kt) \rightarrow \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right) \quad ; \quad f\left(\frac{t}{k}\right) \rightarrow k F(p)$$

Remarque

On veillera à ne pas confondre ces deux propriétés avec la linéarité de la transformation de Laplace.

Théorème du retard

Considérons la fonction $f(t - \tau)$, autrement dit la fonction $f(t)$ à laquelle on a fait subir un changement d'origine des temps (figure 1.3), autrement dit un retard d'un temps τ .

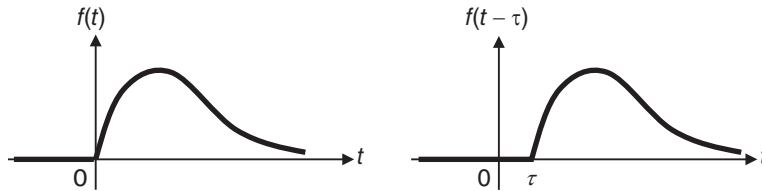


Figure 1.3

Calculons la transformée de Laplace de cette fonction.

$$\text{On a : } f(t) \rightarrow F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

Effectuons dans cette intégrale le changement de variable $u = t + \tau$:

$$F(p) = \int_{\tau}^{+\infty} f(u - \tau) e^{-p(u-\tau)} du$$

En remarquant que la fonction $f(u - \tau)$ est nulle pour $t < \tau$, on peut, sans changer la valeur de l'intégrale, lui choisir une borne d'intégration inférieure plus faible que τ :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(u - \tau) e^{-p(u-\tau)} du$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{p\tau} f(u - \tau) e^{-pu} du$$

$$F(p) = e^{p\tau} \int_0^{+\infty} f(u - \tau) e^{-pu} du$$