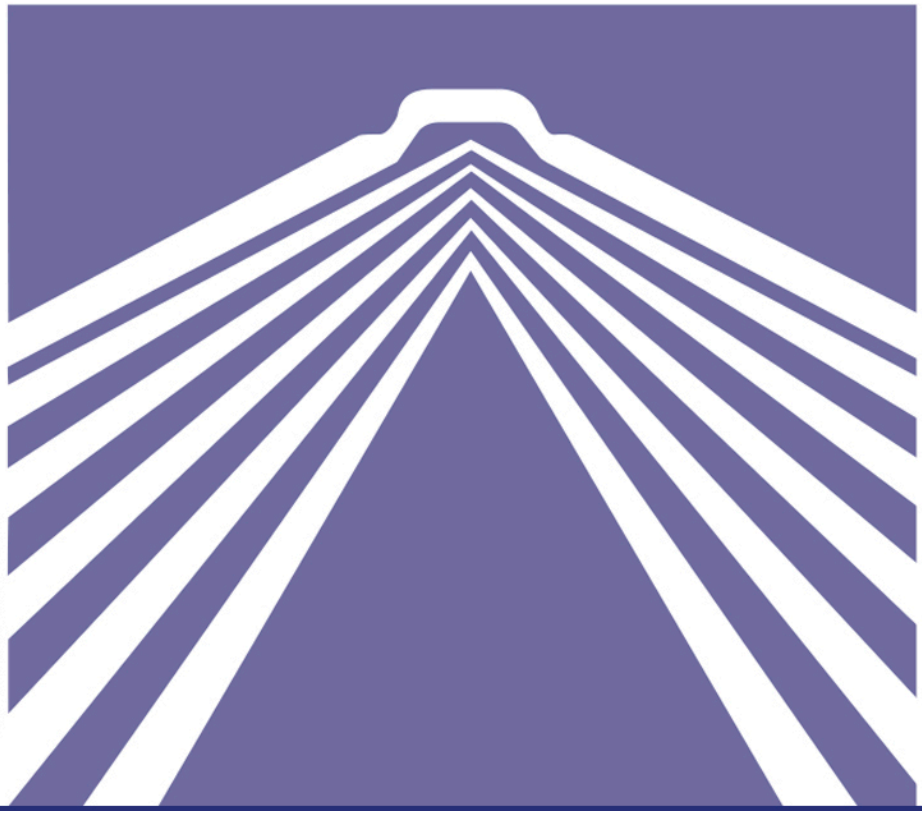
Problemas resueltos de matemática de las operaciones financieras

Juan García Boza
Alicia Déniz Tadeo
Lourdes Jordán Sales
Rosa María Cáceres Apolinario
Octavio Maroto Santana



PIRÁMIDE

Problemas resueltos de matemática de las operaciones financieras

JUAN GARCÍA BOZA
CATEDRÁTICO DE ECONOMÍA FINANCIERA Y CONTABILIDAD
DE LA UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

ALICIA DÉNIZ TADEO
PROFESORA TITULAR DE E.U. DE ECONOMÍA FINANCIERA Y CONTABILIDAD
DE LA UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

LOURDES JORDÁN SALES
ROSA MARÍA CÁCERES APOLINARIO
OCTAVIO MAROTO SANTANA
PROFESORES DE ECONOMÍA FINANCIERA Y CONTABILIDAD
DE LA UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

Problemas resueltos de matemática de las operaciones financieras

EDICIONES PIRÁMIDE

COLECCIÓN «ECONOMÍA Y EMPRESA»

Director:
Miguel Santesmases Mestre
Catedrático de la Universidad de Alcalá

Edición en versión digital

Está prohibida la reproducción total o parcial de este libro electrónico, su transmisión, su descarga, su descompilación, su tratamiento informático, su almacenamiento o introducción en cualquier sistema de repositorio y recuperación, en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, conocido o por inventar, sin el permiso expreso escrito de los titulares del copyright.

© Juan García Boza, Alicia Déniz Tadeo, Lourdes Jordán Sales, Rosa María Cáceres Apolinario y Octavio Maroto Santana, 2016
© Primera edición electrónica publicada por Ediciones Pirámide (Grupo Anaya, S. A.), 2016
Para cualquier información pueden dirigirse a piramide_legal@anaya.es
Juan Ignacio Luca de Tena, 15. 28027 Madrid
Teléfono: 91 393 89 89
www.edicionespiramide.es
ISBN digital: 978-84-368-3556-4

Índice

Prólogo 9

1. Fundamentos 11
2. Sistemas clásicos 33
3. Rentas financieras 61
4. Préstamos 83
5. Operaciones de constitución 115
6. Empréstitos 135
7. Miscelánea 167
8. Problemas propuestos 187

Bibliografía 207

© Ediciones Pirámide

Prólogo

Con el presente libro pretendemos ofrecer, a nuestros alumnos y demás personas interesadas en el análisis de las operaciones financieras desde la óptica cuantitativa, un conjunto seleccionado de problemas cuya resolución razonada les permita complementar y afianzar los conocimientos adquiridos en las enseñanzas teóricas. También les posibilitará ejercitarse en el planteamiento y resolución de distintas problemáticas financieras, las cuales les servirán de eficaz ayuda para cuando en el ejercicio profesional deban enfrentarse a situaciones reales en el ámbito financiero y tomar decisiones en el mismo.

Este trabajo está destinado a los alumnos matriculados en los estudios de Diplomatura en Ciencias Empresariales, Licenciatura en Economía, Licenciatura en Administración y Dirección de Empresas, así como a todas aquellas personas que deseen preparar oposiciones en distintos ámbitos de la Administración.

El capítulo 1 lo destinamos a resolver problemas relativos a leyes financieras, suma financiera, postulado de equivalencia, saldo financiero y magnitudes derivadas.

En el capítulo 2 abordamos un conjunto de problemas relacionados con la capitalización simple, la capitalización compuesta, los tantos equivalentes, los sistemas y operaciones de descuento. Planteamos y resolvemos problemas de cálculo del valor actual, del valor final, tantos nominales y efectivos, descuento de letras financieras, liquidación de cuentas corrientes y de crédito, etc.

En el capítulo 3 resolvemos problemas relativos a las distintas modalidades de rentas financieras, que posibilitan abordar con suficientes conocimientos prácticos los restantes capítulos en los que el dominio de la valoración de rentas se hace imprescindible. En este sentido, se resuelven problemas relativos al cálculo del valor actual y final de diversas clases de rentas.

© Ediciones Pirámide

En los problemas que resolvemos en el capítulo 4 se aborda una amplia problemática relacionada con las operaciones de amortización de préstamos: cálculo de los términos amortizativos, cuotas de amortización, saldos, cancelación anticipada, etc. Se analizan distintos sistemas de amortización (francés, de cuota de capital constante, americano, de términos variables en progresión, con tipos de interés variables, etc.). También se realizan problemas relacionados con los préstamos hipotecarios, cálculo de los tantos efectivos así como de la valoración financiera de los préstamos y su descomposición en usufructo y nuda propiedad.

Los problemas resueltos en el capítulo 5 hacen referencia a la problemática relacionada con las operaciones de constitución o de formación futura de capitales, tanto en su vertiente de imposiciones prepagables como en la relativa a las imposiciones pospagables. Analizamos en dicho capítulo el cálculo del valor constituido, la cuantificación de los términos constitutivos, la cuota de constitución, problemas relacionados con los planes de pensiones, rentabilidad financiero-fiscal, etc.

El capítulo 6 lo dedicamos a los problemas relacionados con la amortización de empréstitos, resolviendo la problemática relativa tanto a los empréstitos normales como la relacionada con aquellos emitidos con diversas características comerciales (lote, prima de amortización, pérdida del cupón, etcétera). Se estudia el cálculo del término amortizativo, del número de títulos amortizados en cada período, los tantos efectivos (activo, pasivo y de rendimiento), etc.

En el capítulo 7 analizamos un variado conjunto de problemas en los que combinamos cuestiones diversas en un mismo ejercicio.

Finalmente, en el capítulo 8 proponemos una serie de problemas diversos de los cuales sólo exponemos el resultado correspondiente, dejando para el lector el desarrollo del proceso de resolución.

© Ediciones Pirámide

1 Fundamentos

- Leyes financieras.
- Suma financiera.
- Postulado de equivalencia financiera.
- Saldo financiero.
- Factores, réditos y tantos.
- Intereses y descuentos.

1.1 ¿En qué condiciones la siguiente expresión $F(t;p) = a + k(p - t)^2$ puede considerarse como ley financiera de capitalización?

RESOLUCIÓN

Para que la expresión matemática dada pueda ser tomada como ley de capitalización es necesario que cumpla cada una de las propiedades correspondientes a las leyes financieras. Cuando no existe tiempo interno, o lo que es lo mismo $t = p$, la ley debe tomar el valor 1, por lo que se cumple:

$$F(p, p) = F(t;t) = a + k(p - p)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

Otra propiedad a verificar es que toda ley financiera ha de tomar valores positivos, o sea, $F(t;p) > 0$, por lo que tenemos:

$$1 + k(p - t)^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad k > \frac{-1}{(p - t)^2}$$

Además, las leyes financieras de capitalización siempre han de tomar un valor mayor que la unidad, verificándose:

$$1 + k(p - t)^2 > 1 \quad \Rightarrow \quad k > 0$$

Teniendo en cuenta las dos limitaciones del valor de k, para que ambas se cumplan conjuntamente, se ha de verificar que k ha de ser positivo. La si-

© Ediciones Pirámide

guiente propiedad que hay que verificar es si la función es creciente con p y decreciente con t. Para que se cumpla lo anterior es necesario que la derivada de la función con respecto a p sea positiva, y negativa con respecto a t. Por tanto, se cumple:

$$\frac{\partial F(t;p)}{\partial p} = 2k(p-t) > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F(t;p)}{\partial t} = -2k(p-t) < 0$$

ya que $k > 0$ y $t < p$.

La última propiedad es la de continuidad de la función. Esta propiedad no es preciso verificarla, puesto que al ser la función derivable también es continua. Por tanto, la expresión matemática es una ley financiera de capitalización si se cumplen las siguientes condiciones:

$$L(t;p) = 1 + k(p-t)^2 \begin{cases} 0 < t < p \\ k > 0 \end{cases}$$

1.2 Determinar las condiciones en las que la expresión $F(t;p) = a + b(t^5 - p^5) + c$ puede ser tomada como ley de descuento, siendo: $c^2 - a^4 + 2a = 1$.

RESOLUCIÓN

Hay que comprobar que la expresión de $F(t;p)$ cumple cada una de las propiedades que le permiten ser una ley de descuento. Empezaremos por demostrar que cuando $p = t$, o sea, cuando no existe tiempo interno, la ley toma el valor 1. Por tanto:

$$F(p;p) = F(t;t) = a + b(p^5 - p^5) + c = 1 \quad \Rightarrow \quad a + c = 1$$

Se tiene así el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ c^2 - a^4 + 2a = 1 \end{cases}$$

Al resolver este sistema se obtienen los siguientes valores: $a = 0$ y $c = 1$; $a = 1$ y $c = 0$; $a = -1$ y $c = 2$.

© Ediciones Pirámide

Otra propiedad a verificar es la relativa a que toda ley financiera ha de ser positiva, o sea, $F(t;p) > 0$. Vamos a demostrarlo para cada uno de los valores de a y c. Para $a = 1$ y $c = 0$, al sustituir en la expresión de $F(t;p)$, nos queda:

$$b > \frac{-1}{t^5 - p^5}$$

Si sustituimos los demás valores de a y c nos da el mismo resultado, lo que significa que la expresión será positiva siempre y cuando se verifique la inecuación precedente.

Además de las propiedades expuestas, es preciso demostrar que la ley financiera de descuento es menor que uno, o sea, $A(t;p) < 1$. Al sustituir cada uno de los valores de a y c, obtenemos que esta propiedad se verifica siempre que $b < 0$.

La siguiente propiedad a verificar es, por un lado, que la función sea creciente con p, o sea, que la derivada de la función con respecto a p sea positiva:

$$\frac{\partial F(t;p)}{\partial p} > 0$$

lo que se verifica, pues:

$$\frac{\partial F(t;p)}{\partial p} = -5p^4 b > 0, \quad \text{si } b < 0$$

Y, por otro, que la función sea decreciente con respecto a t, es decir, la derivada parcial de la función con respecto a t ha de ser negativa:

$$\frac{\partial F(t;p)}{\partial t} < 0$$

Por tanto:

$$\frac{\partial F(t;p)}{\partial t} = 5t^4 b < 0, \quad \text{si } b < 0$$

© Ediciones Pirámide

La última propiedad es la de continuidad de la función. Esta propiedad no hace falta demostrarla puesto que al ser la función derivable, como podemos apreciar por el apartado anterior, la función es continua.

Con lo expuesto queda demostrado que la expresión dada es una ley financiera de descuento con las siguientes condiciones:

$$A(t;p) = a + b(t^5 - p^5) + c \begin{cases} 0 < p < t \\ a = 1 \Rightarrow c = 0 \\ a = -1 \Rightarrow c = 2 \\ a = 0 \Rightarrow c = 1 \\ \dfrac{-1}{t^5 - p^5} < b < 0 \end{cases}$$

1.3 Sea la operación financiera integrada por los siguientes conjuntos de capitales:

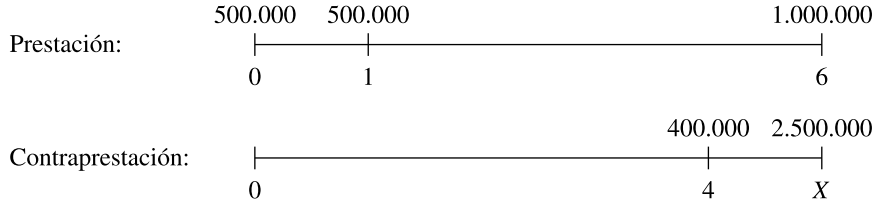
— Prestación: {(500.000, 0); (500.000, 1); (1.000.000, 6)}.
— Contraprestación: {(400.000, 4); (2.500.000, X)}.

De acuerdo con la siguiente ley financiera completa, aplicada en $p = 4$, determinar el valor X:

$$F(t;p) = \begin{cases} 1 + 0{,}20(p - t), & \text{si } t < p \\ 1 - 0{,}15(t - p), & \text{si } t > p \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

La representación gráfica del conjunto de capitales de la prestación y contraprestación es la siguiente:



© Ediciones Pirámide

Aplicando el postulado de equivalencia financiera en el punto $p = 4$:

$$500.000[1 + 0{,}20(4 - 0)] + 500.000[1 + 0{,}20(4 - 1)] +$$
$$+1.000.000[1 - 0{,}15(6 - 14)] = 400.000 + 2.500.000F(X;4)$$

Al despejar obtenemos

$$F(X;4) = 0{,}80 < 1$$

por lo que la expresión $F(X;4)$ corresponde a una ley de descuento, verificándose:

$$1 - 0{,}15(X - 4) = 0{,}80$$

de donde se obtiene como solución

$$X = 5{,}33$$

1.4 El capital $(537.000, q)$ es suma financiera de los capitales $(100.000, 8)$ y $(500.000, 14)$. Determinar el valor de q tomando $p = 10$, siendo la ley completa de valoración:

$$F(t;p) = \begin{cases} 1 + 0{,}15(p - t), & \text{para } t < p \\ 1 - 0{,}10(t - p), & \text{para } t > p \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

De acuerdo con el concepto de suma financiera, se verifica:

$$\text{Proy}_p(100.000, 8) + \text{Proy}_p(500.000, 4) = \text{Proy}_p(537.000, q)$$
$$100.000[1 + 0{,}15(10 - 8)] + 500.000[1 - 0{,}10(14 - 10) = 537.500F(q;10)$$

De donde se obtiene:

$$F(q;10) = 0{,}80$$

© Ediciones Pirámide

que al ser inferior a la unidad corresponde a una ley financiera de descuento, verificándose:

$$0{,}80 = 1 - 0{,}10(q - 10)$$

Se obtiene como solución

$$q = 12$$

1.5 Determinar la cuantía X del capital financiero $(X, t + 5)$ a fin de que el mismo sea suma financiera de $(500.000, t + 2)$ y $(700.000, t + 6)$, de acuerdo con la ley $L(t;p) = 1 + a(p - t)$, con $p = t + 7$. Se sabe, además, que los capitales $(300.000, t + 1)$ y $(400.000, t + 4)$ son equivalentes de acuerdo con la ley dada.

RESOLUCIÓN

Al ser equivalentes los capitales $(300.000, t + 1)$ y $(400.000, t + 4)$, sus proyecciones en el punto p serán iguales, por lo que se cumple:

$$300.000[1 + a(t + 7 - t - 1)] = 400.000[1 + a(t + 7 - t - 4)]$$

De donde se obtiene el valor de $a = 1/6$. Aplicando el concepto de suma financiera:

$$\text{Proy}_p(X, t + 5) = \text{Proy}_p(500.000, t + 2) + \text{Proy}_p(700.000, t + 6)$$

se obtiene una ecuación en X de solución

$$X = 1.300.000$$

1.6 Sea la operación financiera integrada por los conjuntos de capitales siguientes:

— Prestación: $\{(30, 0); (40, 1); (Y, 7)\}$.
— Contraprestación: $\{(60, 6); (180, X)\}$.

© Ediciones Pirámide

La ley financiera completa de valoración es la siguiente:

$$F(t;p)=\begin{cases}1+0{,}12(p-t), & \text{si } t<p=5\\ 1-0{,}10(t-p), & \text{si } t>p=5\end{cases}$$

Con dicha ley se sabe que los capitales (140, 10) y $(9+Y, X)$ son equivalentes. Hallar los valores X e Y.

RESOLUCIÓN

De acuerdo con el postulado de equivalencia financiera, para la operación dada se verifica que la suma financiera de los capitales que componen la prestación ha de ser igual a la suma financiera de los capitales que componen la contraprestación. Por tanto:

$$\begin{aligned}30[1+0{,}12(5-0)]+40[1+0{,}12(5-1)]+Y[1-0{,}10(7-5)]=\\ =60[1-0{,}10(6-5)]+180F(X;p)\end{aligned}$$

Al despejar se obtiene:

$$F(X;p)=\frac{53{,}2-0{,}8Y}{180}$$

Como además sabemos que los capitales (140, 10) y $(9+Y, X)$ son equivalentes, se verifica:

$$\begin{aligned}\text{Proy}_p(140,10)&=\text{Proy}_p(9+Y,X)\\ 140[1-0{,}10(10-5)]&=(9+Y)\cdot F(X;p)\end{aligned}$$

Despejando obtenemos

$$F(X;p)=\frac{70}{9+Y}$$

Tenemos así un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que al resolver nos da

$$F(X;p)=0{,}7<1$$

© Ediciones Pirámide

por lo que al ser menor que la unidad la ley que le corresponde es una de descuento, verificándose:

$$0{,}7 = 1 - 0{,}10(X - 5)$$

De donde se obtiene $X = 8$, y sustituyendo en cualquiera de las anteriores ecuaciones, tenemos que

$$Y = 91$$

1.7

Una operación financiera se acuerda valorar con la siguiente ley de descuento y con su prolongada: $A(t;p) = 1 - 0{,}15(t - p)$ para $t > p = 6$. Los capitales que componen dicha operación son:

— Prestación: $\{(40, 0); (50, 2); (X, 8)\}$.
— Contraprestación: $\{(100, 7); (80, Y)\}$.

Además, se sabe que con la ley completa de valoración aplicada, los capitales $(110, 9)$ y $(25 + X, Y)$ son equivalentes. Hallar X e Y, y las reservas o saldos financieros en 8 en función de lo obtenido en 4.

RESOLUCIÓN

De acuerdo con el concepto de ley financiera prolongada, la expresión analítica de la ley completa es única:

$$F(t; p) = 1 - 0{,}15(t - p) \quad \forall t$$

Por tanto, aplicando el postulado de equivalencia financiera obtenemos la siguiente ecuación:

$$40[1 - 0{,}15(0 - 6)] + 50[1 - 0{,}15(2 - 6)] + X[1 - 0{,}15(8 - 6)] =$$
$$= 100[1 - 0{,}15(7 - 6)] + 80[1 - 0{,}15(Y - 6)]$$

Sabemos además que los capitales $(110, 9)$ y $(25 + X, Y)$ son equivalentes, por lo que se verifica:

$$110[1 - 0{,}15(9 - 6)] = (25 + X)[1 - 0{,}15(Y - 6)]$$

© Ediciones Pirámide