

mini Manuel

de

Mathématiques pour la physique

Cours + Exercices corrigés

François Reynaud

Professeur de physique à la faculté des sciences de Limoges

Daniel Fredon

Maître de conférences en mathématiques appliquées

Michel Bridier

Maître de conférences en physique

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2012
ISBN 978-2-10-058609-7

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Comment utiliser le Mini-Manuel ?

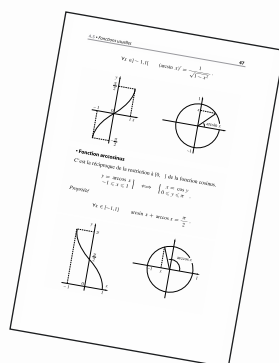
La page d'entrée de chapitre



Elle donne le plan du cours, ainsi qu'un rappel des objectifs pédagogiques du chapitre.

Le cours

Le cours, concis et structuré, expose les notions importantes du programme.



Les rubriques



Une erreur à éviter



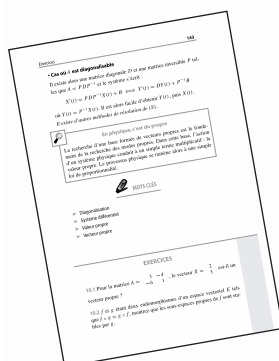
Un peu de méthode



Un exemple pour comprendre



Les points clés à retenir



Les exercices

Ils sont proposés en fin de chapitre, avec leur solution, pour se tester tout au long de l'année.

Table des matières

1	Grandeurs et mesures	1
1.1	Grandeurs physiques	1
	Définition	1
	Étalons	1
	Système International d'unités (SI)	2
	Préfixes	2
	Constantes fondamentales	2
1.2	Analyse dimensionnelle	3
	Dimension d'une grandeur physique	3
	Équation aux dimensions	3
1.3	Mesure des grandeurs	3
	Mesurage	3
	Présentation d'un résultat	4
	Utilisation d'un grand nombre de mesures	4
	<i>Mots clés</i>	5
	<i>Exercices</i>	6
	<i>Solutions</i>	6
2	Les nombres	8
2.1	Nombres réels	8
	Généralités	8
	Sommes et produits	9
	Approximations décimales	9
2.2	Nombres complexes	10
	Forme algébrique	10
	Forme trigonométrique	11
	Exponentielle complexe	12
2.3	Systèmes linéaires	13
	Généralités	13

Systèmes triangulaires	13
Méthode du pivot de Gauss	14
<i>Mots clés</i>	15
<i>Exercices</i>	15
<i>Solutions</i>	17
3 Calcul vectoriel	23
3.1 Barycentre de points pondérés	23
Définition	23
Propriétés	24
Applications	24
3.2 Produit scalaire	24
Définition	24
Propriétés	26
Orthogonalité	26
Applications	27
3.3 Produit vectoriel	27
Définitions	27
Propriétés	28
Applications	28
3.4 Produit mixte	28
Définition	28
Propriétés	28
Applications	28
<i>Mots clés</i>	29
<i>Exercices</i>	29
<i>Solutions</i>	31
4 Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$	36
4.1 Généralités	36
Sens de variation	36
Parité, périodicité	37
4.2 Limites	37
Définitions	37
Propriétés des limites	38
Fonctions équivalentes	39
4.3 Continuité	40
Définitions	40

Continuité et opérations	40
Image d'un intervalle par une fonction continue	40
4.4 Dérivabilité	41
Définitions	41
Interprétations	41
Propriétés	42
4.5 Fonctions usuelles	44
Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances	44
Fonctions circulaires réciproques	46
<i>Mots clés</i>	49
<i>Exercices</i>	50
<i>Solutions</i>	51
5 Compléments sur les fonctions dérivables	58
5.1 Étude globale des fonctions dérivables	58
Extrémum	58
Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	59
Inégalité de Taylor-Lagrange	59
5.2 Étude locale des fonctions dérivables	60
Formule de Taylor-Young	60
Développements limités	60
Opérations sur les développements limités	62
Applications des développements limités	63
5.3 Convexité	63
Définitions	63
Fonctions convexes dérivables	65
<i>Mots clés</i>	65
<i>Exercices</i>	65
<i>Solutions</i>	67
6 Calcul intégral	74
6.1 Intégration sur un segment	74
Approche théorique	74
Propriétés	76
Exemples en physique	77
6.2 Calcul des primitives	78
Linéarité	78
Intégration par parties	78
Intégration par changement de variable	79

6.3	Intégrales généralisées	79
	Définitions	79
	Propriétés	80
	Situations de référence	80
	Fonctions sommables	82
	<i>Mots clés</i>	82
	<i>Exercices</i>	83
	<i>Solutions</i>	84
7	Équations différentielles	90
7.1	Définitions générales	90
	Équations différentielles	90
	Problème de Cauchy	91
7.2	Équations différentielles du premier ordre	91
	Exemple	91
	Équations à variables séparables (ou séparées)	92
7.3	Équations linéaires du premier ordre	92
	Définition	92
	Théorème du à la linéarité	92
	Résolution de l'équation homogène associée	93
	Recherche d'une solution particulière	93
7.4	Équations différentielles linéaires	
	du second ordre à coefficients constants	93
	Définition	93
	Théorèmes dus à la linéarité	93
	Résolution de l'équation homogène associée	94
	Résolution de l'équation complète dans quelques cas	95
	<i>Mots clés</i>	96
	<i>Exercices</i>	96
	<i>Solutions</i>	99
8	Suites numériques	109
8.1	Généralités	109
	Définition	109
	Suite monotone	109
	Suite bornée	110
8.2	Limite d'une suite	110
	Suite convergente	110

Limites infinies	110
Opérations sur les suites convergentes	111
Relation d'ordre	111
8.3 Existence de limites	112
Convergence des suites monotones	112
Suites adjacentes	112
Suites extraites	112
8.4 Suites récurrentes	113
Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$	113
Suites récurrentes linéaires du second ordre	113
<i>Mots clés</i>	115
<i>Exercices</i>	115
<i>Solutions</i>	116
9 Fondements du calcul matriciel	120
9.1 Espaces vectoriels	120
Généralités	120
Sous-espaces vectoriels	121
Bases d'un espace vectoriel, dimension	121
Applications linéaires	122
9.2 Matrices	122
Généralités	122
Écritures matricielles	123
Opérations	124
Changement de bases	125
9.3 Déterminants	126
Généralités	126
Opérations sur les lignes ou les colonnes	127
Autres propriétés	127
<i>Mots clés</i>	129
<i>Exercices</i>	130
<i>Solutions</i>	132
10 Réduction des matrices	140
10.1 Valeurs propres et vecteurs propres	140
Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme	140
Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée	141
Polynôme caractéristique	141

10.2 Diagonalisation	141
Définitions	141
Conditions	142
10.3 Applications	142
Calcul de A^m	142
Systèmes différentiels à coefficients constants	142
<i>Mots clés</i>	143
<i>Exercices</i>	143
<i>Solutions</i>	146
11 Fonctions de plusieurs variables	160
11.1 Espace $\mathbb{R}^n$	160
Norme sur un espace vectoriel	160
Parties remarquables de $\mathbb{R}^n$	161
11.2 Fonctions de plusieurs variables	162
Définitions	162
Limite et continuité	163
Composition des fonctions continues	163
11.3 Dérivées partielles ; différentielle	164
Dérivation d'ordre 1	164
Dérivées partielles d'ordre supérieur	165
Différentielle	166
11.4 Optimisation d'une fonction de 2 variables	168
Définitions	168
Existence d'un minimum et d'un maximum globaux	168
Condition nécessaire d'extrémum local	168
Condition suffisante d'extrémum local	168
<i>Mots clés</i>	169
<i>Exercices</i>	170
<i>Solutions</i>	172
12 Champs scalaires, champs vectoriels	181
12.1 Coordonnées non cartésiennes dans le plan et dans l'espace	181
Coordonnées polaires (dans le plan)	181
Coordonnées cylindriques (dans l'espace)	183
Coordonnées sphériques (dans l'espace)	184
12.2 Champs de vecteurs du plan ou de l'espace	185
Définition	185

Divergence d'un champ de vecteurs du plan ou de l'espace	186
Rotationnel d'un champ de vecteurs de l'espace	186
Expression de la divergence et du rotationnel en coordonnées non cartésiennes	187
Propriétés des opérateurs classiques	187
Théorème de Poincaré	188
12.3 Formes différentielles	188
Définitions	188
Propriétés	189
<i>Mots clés</i>	190
<i>Exercices</i>	190
<i>Solutions</i>	192
13 Intégrales multiples	198
13.1 Intégrales doubles	198
Intégrale d'une fonction continue sur un rectangle	198
Extension à une partie fermée bornée du plan	200
Changement de variables	201
13.2 Intégrales triples	201
Approche et calcul	201
Changement de variables	202
13.3 Applications	202
Interprétations d'une intégrale double ou triple	202
Moments et centres d'inertie	203
<i>Mots clés</i>	205
<i>Exercices</i>	205
<i>Solutions</i>	207
14 Intégrales curvilignes	214
14.1 Arc de courbe paramétré	214
Définition	214
Droite tangente et plan normal	215
Arc orienté	215
Longueur d'un arc de courbe paramétré	215
14.2 Intégrale curviligne	216
Intégrale curviligne d'une fonction	216
Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe orientée	216

Intégrale d'une forme différentielle le long d'une courbe orientée	217
Propriétés de l'intégrale curviligne	217
Circulation d'un champ de gradients	218
Formule de Green - Riemann	219
<i>Mots clés</i>	219
<i>Exercices</i>	220
<i>Solutions</i>	222
15 Intégrales de surface	227
15.1 Surface paramétrée	227
Définition	227
Plan tangent et droite normale	227
Aire d'une surface	228
15.2 Intégrale de surface	229
Intégrale de surface d'une fonction	229
Flux d'un champ de vecteurs	229
Formule de Stokes	230
Autre énoncé	230
Formule d'Ostrogradski	230
<i>Mots clés</i>	231
<i>Exercices</i>	231
<i>Solutions</i>	233
Index	241