100% ENTRAÎNEMENT

NOUVEAUX PROGRAMMES

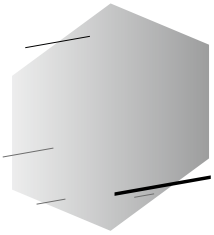
MATHS APPLIQUÉES

ECG-2

Maxime Bailleul
François-Xavier Manoury
Stéphane Préteseille

ellipses

MATHS
APPLIQUÉES
ECG-2



100% ENTRAÎNEMENT

Collection dirigée par Sylvain Rondy

MATHS APPLIQUÉES ECG-2

NOUVEAUX PROGRAMMES

Maxime Bailleul
François-Xavier Manoury
Stéphane Préteseille

ellipses

Retrouvez tous les ouvrages de la collection **100% ENTRAÎNEMENT** sur :
www.editions-ellipses.fr



Les macros de cet ouvrage ont été réalisées par Christophe Poulain en LaTeX.

ISBN 9782340-066649
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

La collection « 100% entraînement » est conçue pour les élèves des classes préparatoires scientifiques (préparant aux écoles d'ingénieur) et économiques (préparant aux écoles de commerce et de management). L'objectif de cette collection est de mettre l'accent sur l'acquisition d'expérience et d'autonomie, en proposant un grand nombre d'exercices de difficulté progressive, sans rappels de cours excepté dans les corrigés.

Cet ouvrage s'adresse aux élèves des classes préparatoires ECG Maths appliquées qui souhaitent trouver un outil différent de celui proposé par les livres d'annales : en effet, chacun des 23 chapitres correspond à une partie du cours bien ciblée et tous les exercices du chapitre portent sur cette partie, ce qui procure un entraînement systématique sur chaque chapitre et permet de s'impliquer réellement dans la maîtrise des notions abordées.

Chaque chapitre est découpé en quatre parties de la façon suivante :

- **Maîtriser le cours.** Cette partie contient « Le Vrai/Faux du début » consistant en des questions de cours ou proches du cours, ainsi que des exercices d'application directe du cours.
- **Maîtriser les méthodes fondamentales.** Cette partie propose des exercices un peu plus compliqués mais proches de méthodes fondamentales qu'il faut absolument connaître et maîtriser parfaitement.
- **Pour aller plus loin.** Cette partie contient des exercices plus élaborés, pour certains difficiles, nécessitant autonomie, faculté à prendre des décisions et esprit de synthèse. Elle se termine par « Le Vrai/Faux de la fin » qui oblige à une réelle réflexion et nécessite d'avoir un bon recul sur les notions abordées.
- **Solution des exercices.** Cette partie fournit les solutions des exercices, complètes et rédigées avec le plus grand soin, au sein desquelles sont disposées des bulles et des encadrés contenant des rappels de cours, des conseils de méthode, des astuces, ou encore des mises en garde contre les erreurs à éviter.

Les auteurs de cette collection ont compilé cet abondant vivier d'exercices afin que ce livre complète efficacement celui de première année.

Sylvain Rondy

Sommaire

Algèbre linéaire

1. Espaces vectoriels 1
2. Applications linéaires 14
3. Applications linéaires injectives, surjectives, bijectives 29
4. Changement de bases 45
5. Réduction des matrices carrées 55

Compléments d'analyse

6. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants 68
7. Comparaison de suites 86
8. Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ 98
9. Compléments sur les séries 113
10. Comparaison de fonctions et développements limités 128
11. Intégrales impropres 140

Probabilités

12. Couples de variables aléatoires 159
13. Vecteurs aléatoires 179
14. Covariance 197

Fonctions numériques de 2 variables réelles

15. Calcul différentiel : ordre 1 206
16. Calcul différentiel : ordre 2 217
17. Extrema sur un ouvert 223

Probabilités : compléments

18. Graphes probabilistes 236
19. Inégalités probabilistes 252

Variables aléatoires réelles à densité

20. Variables aléatoires réelles à densité 262
21. Lois à densité usuelles 289

Convergence en loi, estimation

22. Convergence en loi 317
23. Estimation 336

1 Espaces vectoriels

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. Vect$((2,1,0),(1,2,1))$ est un espace vectoriel de dimension 2. ☐ Vrai ☐ Faux

2. La famille $(1, x-1, x(x-2))$ est libre dans $\mathbb{R}[x]$. ☐ Vrai ☐ Faux

3. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + 2y - z = 0\}$ est un espace vectoriel. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que l'ensemble $G = \{A \in \mathbb{R}_n[x],\ \forall x \in \mathbb{R},\ A(x) - xA'(x) = 0\}$ est un espace vectoriel.

Exercice 3 –

On considère l'ensemble $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z + t = 0,\ 2x - y + 2z - t = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base et la dimension.

2. Prouver que la famille $((2,1,-2,-1),(-1,2,1,-2))$ est une base de F.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Dans cet exercice, on considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on note F l'ensemble des éléments de E de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2. Déterminer une base et la dimension de F.

Exercice 5 –
On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour tout réel λ, on note $E_\lambda(A)$ l'ensemble des vecteurs X de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ solutions de l'équation $AX = \lambda X$.

1. Justifier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base et la dimension de $E_0(A)$.
3. Déterminer une base et la dimension de $E_2(A)$.

Exercice 6 –
On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 et on considère les matrices suivantes :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de $\mathcal{S}_2$. Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_2$.
2. Le produit de deux éléments de $\mathcal{S}_2$ appartient-il encore à $\mathcal{S}_2$?

Exercice 7 –
On s'intéresse dans cet exercice à l'ensemble E suivant :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & c & a-b \\ c & a+b & c \\ a-b & c & a+b \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base et la dimension de E.

Pour aller plus loin

Exercice 8 –
Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A est un élément de E. On note :

$$E_1(A) = \{M \in E,\ AM = M\} \quad \text{et} \quad E_2(A) = \{M \in E,\ A^2M = AM\}$$

1. Montrer que $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Prouver que $E_1(A)$ est inclus dans $E_2(A)$. Que peut-on dire de $E_1(A)$ et $E_2(A)$ si A est inversible ?

Exercice 9 –

Dans cet exercice, E désigne l'ensemble $\mathbb{R}_3[x]$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3 et on note (e_0, e_1, e_2, e_3) la base canonique de E.

1. On note F l'ensemble des fonctions polynômes paires appartenant à E.
   a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   b) Déterminer une base et la dimension de F.
2. On note $G = \{P \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) - (x+1)P'(x) + \left(x^2+1\right)P''(x) = 0\}$.
   a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E.
   b) Déterminer une base et la dimension de G.

Exercice 10 –

Dans cet exercice, on note $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On considère un réel t quelconque et on note :

$$X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix}1\\t\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix}t\\1\\1\end{pmatrix}$$

1. Prouver que l'ensemble $F = \{aX_1 + bX_2 + cX_3,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Déterminer l'ensemble des réels t pour lesquels la famille (X_1, X_2, X_3) est une base de E.
3. Quelle est la dimension de F en fonction de la valeur de t ?

Exercice 11 – Le vrai/faux de la fin

1. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + z = 0\}$ est un espace vectoriel de dimension 2 ☐ Vrai ☐ Faux
2. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + z = 1\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ ☐ Vrai ☐ Faux
3. $\text{Vect}((1,0,1),(0,1,1)) = \text{Vect}((1,-1,0),(1,1,2))$ ☐ Vrai ☐ Faux
4. Si E est un espace vectoriel, l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Les deux vecteurs $(2,1,0)$ et $(1,2,1)$ ne sont pas colinéaires donc la famille est libre. ☒ Vrai ☐ Faux
2. C'est une famille de fonctions polynômes échelonnées en degrés. ☒ Vrai ☐ Faux
3. $(1,0,1)$ appartient à E mais pas $2\,(1,0,1)$. ☐ Vrai ☒ Faux

Exercice 2 –

Cours

Soit E un espace vectoriel. Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si :

- $F \subset E$,
- $F \neq \emptyset$,
- $\forall (x, y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x + y \in F$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors c'est un espace vectoriel.

1. F est inclus dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par définition. De plus la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ commute avec A, donc appartient à F, qui n'est donc pas vide.
Par ailleurs, pour tout $(M, N) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda M + N$ appartient à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on a :

$$A\left(\lambda M + N\right) = \lambda AM + AN$$

donc, comme M et N appartiennent à F :

$$\begin{aligned} A\left(\lambda M + N\right) &= \lambda MA + NA \\ &= \left(\lambda M + N\right) A \end{aligned}$$

donc $\lambda M + N$ appartient à F, ce qui nous permet de conclure que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. G est inclus dans $\mathbb{R}_n[x]$ par définition. De plus, si P est la fonction polynôme nulle, on a :

On va montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 0 \quad \text{et} \quad P'(x) = 0$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) - xP'(x) = 0$$

Ainsi P appartient à G, qui n'est donc pas vide. Soit alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in G^2$. P et Q appartiennent à $\mathbb{R}_n[x]$, qui est un espace vectoriel, donc $\lambda P + Q$ appartient à $\mathbb{R}_n[x]$. De plus on a, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ (\lambda P + Q)(x) - x\left(\lambda P + Q\right)'(x) &= (\lambda P + Q)(x) - x\left(\lambda P' + Q'\right)(x) \\ &= \lambda P(x) + Q(x) - \lambda x P'(x) - xQ'(x) \\ &= \lambda\left[P(x) - xP'(x)\right] + \left[Q(x) - xQ'(x)\right] \end{aligned}$$

donc, comme P et Q appartiennent à G :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ (\lambda P + Q)(x) - x\left(\lambda P + Q\right)'(x) &= \lambda \times 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $\lambda P + Q$ appartient à G.
G est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$, donc c'est un espace vectoriel.

Exercice 3 –

1. Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a (en procédant par substitution) :

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) \in F &\iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + 2z - t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x + 3z = 0 \\ t = 2x - y + 2z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = -x \\ t = -y \end{cases} \\ &\iff (x, y, z, t) = (x, y, -x, -y) \\ &\iff (x, y, z, t) = x\,(1, 0, -1, 0) + y\,(0, 1, 0, -1)\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$F = \{x\,(1, 0, -1, 0) + y\,(0, 1, 0, -1)\,,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1))$$

Or $(1, 0, -1, 0)$ et $(0, 1, 0, -1)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Cours

Se souvenir que, si E est un espace vectoriel et si $e_1, \dots, e_p$ sont des vecteurs de E, alors l'ensemble

$$F = \{x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p,\ (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p\} = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$$

est un sous-espace vectoriel de E.

Méthode

Quand il est demandé en même temps de prouver qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E (ou un espace vectoriel) et d'en déterminer une base, il est en général plus efficace de chercher la forme des éléments de F pour écrire F comme ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs de E : cela permet en même temps de prouver que F est un sous-espace vectoriel de E et de trouver une famille génératrice de F. Il ne reste alors qu'à étudier la liberté de la famille.

De plus la famille $((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1))$ est génératrice de F. Or cette famille est formée de deux vecteurs non colinéaires, donc elle est libre, ce qui nous permet de conclure que c'est une base de F et que F est de dimension 2.

Cours

Si E est un espace vectoriel, on dit qu'une famille $(x_1, \dots, x_p)$ de vecteurs de E est libre si, pour tous réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, on a :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i = 0$$

Dans le cas particulier d'une famille de deux vecteurs (x, y), la famille (x, y) est libre si et seulement si x et y ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire si $x \neq 0$ et $y \neq \lambda x$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. On a :

$$\begin{cases} 2 + 1 - 2 - 1 = 0 \\ 2 \times 2 - 1 + 2 \times (-2) - (-1) = 0 \end{cases}$$

On commence par vérifier que les deux vecteurs appartiennent bien à E.

et :

$$\begin{cases} -1 + 2 + 1 - 2 = 0 \\ 2 \times (-1) - 2 + 2 \times 1 - (-2) = 0 \end{cases}$$

donc $((2, 1, -2, -1), (-1, 2, 1, -2))$ est une famille de deux vecteurs de E. De plus ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc c'est une famille libre de deux vecteurs de E et, comme E est de dimension 2, c'est une base de E.

Méthode

Si l'on connaît la dimension d'un espace vectoriel E, pour montrer qu'une famille est une base de E, il suffit de prouver que ses vecteurs appartiennent tous à E, qu'elle est libre, et qu'elle comporte autant de vecteurs que la dimension de E.

Exercice 4 –

1. On peut remarquer que :

$$F = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$
$$= \text{Vect}(I, J, K)$$

Comme on nous demande ensuite une base de F, on commence par écrire les vecteurs de F comme combinaison linéaire d'éléments de E.

où l'on a noté :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or I, J et K sont des vecteurs de E, donc F est un sous-espace vectoriel de E.

2. D'après le raisonnement précédent, (I, J, K) est une famille génératrice de F.

La famille comporte au moins trois vecteurs, donc dire que les vecteurs ne sont pas colinéaires ne suffit pas à justifier la liberté.

De plus on a, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$aI + bJ + cK = 0 \iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = 0$$
$$\iff a = b = c = 0$$

Ainsi la famille (I, J, K) est libre. Comme elle est aussi génératrice de F, on en déduit que c'est une base de F et que F est de dimension 3.

Exercice 5 –

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ (A - \lambda I)X = 0\}$$

$E_\lambda(A)$ est donc l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène d'inconnue X dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Cours

Se souvenir que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène d'inconnue X dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ou x dans $\mathbb{R}^n$) est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ou de $\mathbb{R}^n$).

2. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$X \in E_0(A) \iff AX = 0$$
$$\iff \begin{cases} x - z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

d'où :

$$X \in E_0(A) \iff \begin{cases} x = z \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.1}$$

et finalement :

$$X \in E_0(A) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc :

$$E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

De plus les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc ils forment une base de $E_0(A)$, qui est de dimension 2.

Méthode

Pour choisir les deux vecteurs et être sûr d'obtenir une famille libre à partir de (1.1), on obtient un premier vecteur en prenant $(z, y) = (1, 0)$ (et en déduisant la valeur de x à l'aide des solutions du système) puis un deuxième vecteur en prenant $(z, y) = (0, 1)$.

3. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} X \in E_2(A) &\iff (A - 2I)X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = 0 \\ &\iff \begin{cases} -x - z = 0 \\ -2y = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc :

$$E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

De plus le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ n'est pas nul, donc il forme une base de $E_2(A)$, qui est ainsi de dimension 1.

Exercice 6 –

1. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix},\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \{xF + yG + zH,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \text{Vect}(F, G, H) \end{aligned}$$

Comme F, G et H appartiennent à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_2$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus la famille (F, G, H) est une famille génératrice de $\mathcal{S}_2$.

Enfin on a, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$xF + yG + zH = 0 \iff \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = 0$$
$$\iff x = y = z = 0$$

donc la famille (F, G, H) est libre ; comme elle est aussi génératrice de $\mathscr{S}_2$, elle en est donc une base et $\mathscr{S}_2$ est de dimension 3.

2. On a :

$$FG = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Plutôt que de faire le produit dans le cas général, on commence par le faire avec les éléments de la base.

Ainsi FG n'appartient pas à $\mathscr{S}_2$ donc le produit de deux éléments de $\mathscr{S}_2$ n'appartient pas toujours à $\mathscr{S}_2$.

À retenir

On pourra se souvenir que le produit de deux matrices symétriques M et N est encore une matrice symétrique si et seulement si M et N commutent. En effet, on a, si M et N sont symétriques :

$$^t(MN) = {}^tN\,{}^tM = NM$$

Exercice 7 –

1. On a :

$$E = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$
$$= \text{Vect}(A, B, C)$$

où l'on a posé :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Or A, B et C appartiennent à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. La famille (A, B, C) est génératrice de E. De plus, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$aA + bB + cC = 0 \iff \begin{pmatrix} a+b & c & a-b \\ c & a+b & c \\ a-b & c & a+b \end{pmatrix} = 0$$
$$\iff \begin{cases} a + b = 0 \\ c = 0 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

$$aA + bB + cC = 0 \iff \begin{cases} 2a = 0 \\ c = 0 \\ b = a \end{cases}$$
$$\iff a = b = c = 0$$

donc la famille (A, B, C) est libre. C'est donc une base de E, qui est de dimension 3.

Exercice 8 –

1. • $E_1(A)$ est inclus dans E par définition. De plus, si M est la matrice nulle, alors $AM = 0 = M$ et M appartient à $E_1(A)$, qui n'est donc pas vide.
Enfin, pour tout couple (M, N) d'éléments de $E_1(A)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda M + N$ appartient à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on a :

$$\begin{aligned} A\left(\lambda M + N\right) &= \lambda AM + AN \\ &= \lambda M + N \end{aligned}$$

donc $\lambda M + N$ appartient à $E_1(A)$. Finalement $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de E.

• $E_2(A)$ est inclus dans E par définition.
De plus, si M est la matrice nulle, alors $A^2M = 0 = AM$ et M appartient à $E_2(A)$, qui n'est donc pas vide.
Enfin, pour tout couple (M, N) d'éléments de $E_2(A)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda M + N$ appartient à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on a :

$$\begin{aligned} A^2\left(\lambda M + N\right) &= \lambda A^2M + A^2N \\ &= \lambda AM + AN \\ &= A\left(\lambda M + N\right) \end{aligned}$$

donc $\lambda M + N$ appartient à $E_2(A)$. Finalement $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. • Soit $M \in E_1(A)$. On a :

$$\begin{aligned} A^2M &= A(AM) \\ &= AM \end{aligned}$$

donc M appartient à $E_2(A)$. Ainsi $E_1(A)$ est inclus dans $E_2(A)$.
• Supposons que A soit inversible. On a alors, pour tout $M \in E$:

$$\begin{aligned} A^2M = AM &\iff A^{-1}A^2M = A^{-1}AM \\ &\iff AM = M \end{aligned}$$

Le fait de multiplier par une matrice inversible permet de conserver l'équivalence.

donc, si A est inversible : $E_2(A) = E_1(A)$.

Exercice 9 –

1. **a)** Soit $P \in E$. Il existe des réels a, b, c, d tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Comme on souhaite ensuite trouver une base de F, il est préférable de montrer que F est un ensemble de combinaisons linéaires de vecteurs de E.

et alors :

$$\begin{aligned} P \in F &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ P(-x) = P(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ -ax^3 + bx^2 - cx + d = ax^3 + bx^2 + cx + d \end{aligned}$$

donc, comme deux fonctions polynômes sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux :

$$\begin{aligned} P \in F &\iff \begin{cases} -a = a \\ b = b \\ -c = c \\ d = d \end{cases} \\ &\iff a = c = 0 \end{aligned}$$

On en déduit :

$e_k(x) = x^k$

$$F = \{P : x \mapsto bx^2 + d,\ (b, d) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(e_0, e_2)$$

Comme e_0 et e_2 appartiennent à E, F est ainsi un sous-espace vectoriel de E.

b) La famille (e_0, e_2) est libre (elle est extraite d'une famille libre) et génératrice de F, donc c'est une base de F et F est de dimension 2.

2. **a)** Soit $P \in E$. Il existe des réels a, b, c, d tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Alors $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ et $P''(x) = 6ax + 2b$ donc P appartient à G si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ax^3 + bx^2 + cx + d - (x + 1)\left(3ax^2 + 2bx + c\right) + \left(x^2 + 1\right)\left(6ax + 2b\right) = 0$$

donc si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 4ax^3 + \left(-3a + b\right)x^2 + \left(6a - 2b\right)x + (2b - c + d) = 0$$

d'où, un polynôme étant nul si et seulement si ses coefficients sont tous nuls :

$$\begin{aligned} P \in G &\iff \begin{cases} 4a = 0 \\ -3a + b = 0 \\ 6a - 2b = 0 \\ 2b - c + d = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = b = 0 \\ c = d \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} G &= \{cx + c,\ c \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}(e_0 + e_1) \end{aligned}$$

Comme $e_0 + e_1$ appartient à E, G est ainsi un sous-espace vectoriel de E.

b) La famille $(e_0 + e_1)$ est libre (elle contient un unique vecteur, qui n'est pas nul) et génératrice de G, donc c'est une base de G et G est de dimension 1.

Exercice 10 –

1. Comme $F = \text{Vect}(X_1, X_2, X_3)$ et comme X_1, X_2, X_3 sont des vecteurs de E, qui est un espace vectoriel, F est un sous-espace vectoriel de E.

2. La famille (X_1, X_2, X_3) contient trois vecteurs de E et E est de dimension 3, donc c'est une base de E si et seulement si elle est libre.

Or on peut déjà remarquer que, si $t = 1$, $X_1 = X_2 = X_3$ donc la famille est liée. On suppose maintenant que t est différent de 1. On a, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0 \iff \begin{cases} a + b + ct = 0 \\ a + bt + c = 0 \\ at + b + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - tL_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} a + b + ct = 0 \\ b(t-1) + c(1-t) = 0 \\ b(1-t) + c\left(1-t^2\right) = 0 \end{cases}$$

et alors, en divisant la deuxième et la troisième lignes par $1 - t$ (qui n'est pas nul) et comme $1 - t^2 = (1 - t)(1 + t)$:

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0 \iff \begin{cases} a + b + ct = 0 \\ -b + c = 0 \\ b + c(1 + t) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b + ct = 0 \\ b = c \\ c(2 + t) = 0 \end{cases}$$

Le dernier système est un système triangulaire homogène donc admet $(0, 0, 0)$ pour unique solution si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, donc si et seulement si $t \neq -2$. Finalement la famille (X_1, X_2, X_3) est une base de E si et seulement si t est différent de 1 et de -2.

3. • Si $t = 1$, alors $F = \text{Vect}(X_1)$ et X_1 n'est pas nul donc F est de dimension 1.

• Si $t = -2$, alors la famille (X_1, X_2, X_3) est liée, donc F est de dimension inférieure ou égale à 2. De plus X_1 et X_2 ne sont pas colinéaires donc F est de dimension supérieure ou égale à 2. Finalement F est de dimension 2 dans ce cas.

• Si $t \notin \{-1, 2\}$, alors $F = E$ et F est de dimension 3.

Cours

La dimension de $\text{Vect}(X_1, X_2, X_3)$ est aussi appelée rang de la famille (X_1, X_2, X_3). On a donc :

$$\text{rg}(X_1, X_2, X_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 1 \\ 2 & \text{si } t = -2 \\ 3 & \text{si } t \notin \{1, -2\} \end{cases}$$

Exercice 11 –

1. Vrai. On a en effet :

$$\begin{aligned} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + z = 0\} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = -x + 2y\} \\ &= \{(x, y, -x + 2y),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x\,(1, 0, -1) + y\,(0, 1, 2)\,,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, 2)) \end{aligned}$$

et les vecteurs $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, 2)$ ne sont pas colinéaires, donc la famille $((1, 0, -1), (0, 1, 2))$ est libre ; c'est donc une base de F.

2. Faux. Le vecteur nul $(0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ n'appartient pas à E.

3. Vrai. Si on note $E = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 1))$, on peut remarquer que :

$$(1, -1, 0) = (1, 0, 1) - (0, 1, 1) \quad \text{et} \quad (1, 1, 2) = (1, 0, 1) + (0, 1, 1)$$

donc les vecteurs $(1, -1, 0)$ et $(1, 1, 2)$ appartiennent à E. De plus E est de dimension 2 (car la famille $((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ est libre, ses deux vecteurs n'étant pas colinéaires) et la famille $((1, -1, 0), (1, 1, 2))$ est libre, donc c'est aussi une base de E.

4. Vrai. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont inclus dans E, donc $F \cap G$ aussi. F et G contiennent le vecteur nul de E, donc $F \cap G$ aussi.

Soit alors $(x, y) \in (F \cap G)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme F est un sous-espace vectoriel de E et comme x et y appartiennent à F, $\lambda x + y$ appartient à F. De même il appartient à G, donc à $F \cap G$.

2 Applications linéaires

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives $n \geq 1$ et $p \geq 1$.
Soit f une application linéaire de E dans F et A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. L'application $X \mapsto AX$ définie sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E. ☐ Vrai ☐ Faux
3. Si f est injective, alors f est bijective. ☐ Vrai ☐ Faux
4. La matrice représentative de f appartient à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (-3x + 2y, y - z)$$

1. Prouver que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la matrice représentative M de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer le noyau de f.
4. Déterminer l'image de f.

Exercice 3 –

On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'image par f des vecteurs $x = 2e_1 - e_2 + e_3$, $y = -e_1 + e_3$ et $z = e_1 + e_2 + e_3$.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Déterminer la dimension puis une base de l'image de f.

Exercice 4 –

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application f définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = MA$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Dans la suite, on suppose que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   On note $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ la base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Déterminer une base du noyau de f.

   b) Déterminer une base de l'image de f.
3. Déterminer la matrice associée à f dans $\mathcal{B}$.

Exercice 5 –

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par les égalités suivantes :

$$f(e_1) = \frac{1}{3}(e_2 + e_3) \quad \text{et} \quad f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1$$

1. Écrire la matrice M de f dans la base B.
2. Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ puis celle de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Donner alors une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 6 –

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_2[x]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ f(P) = P + P' + P''$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Déterminer la matrice représentative de f dans la base canonique (e_0, e_1, e_2) de $\mathbb{R}_2[x]$.
3. **a)** Déterminer le rang de f.

   b) En déduire l'image de f.

   c) Déterminer le noyau de f.

Pour aller plus loin

Exercice 7 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la matrice J de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont tous égaux à 1. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

1. **a)** Déterminer le noyau de f.

b) Déterminer l'image de f.

2. **a)** Montrer que $f^2 - nf$ est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$.

b) En déduire que :

$$\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f - n\,\mathrm{Id}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f - n\,\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f)$$

Exercice 8 –

Soient E, F et G trois espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G.

1. Prouver que : $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

2. **a)** Prouver que : $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$.

b) Démontrer que : $\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g))$. On pourra appliquer le théorème du rang à la restriction h de f à $\mathrm{Ker}(g \circ f)$.

Exercice 9 – Le vrai/faux de la fin

Soit E un espace vectoriel de dimension n supérieure ou égale à 1 et f un endomorphisme de E. On considère une base $\mathscr{B}$ de E et on note A la matrice associée à f dans $\mathscr{B}$.

1. Si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ alors $f = 0$. ☐ Vrai ☐ Faux

2. Si $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$ alors $f = 0$. ☐ Vrai ☐ Faux

3. Si $f^2 = 0$ alors $f = 0$. ☐ Vrai ☐ Faux

4. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1, -1, 0))$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. L'application $X \mapsto AX$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. ☒ Vrai ☐ Faux

2. Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E. ☒ Vrai ☐ Faux

3. Si $n \neq p$, il n'y a pas équivalence entre injectivité et bijectivité. ☐ Vrai ☒ Faux

4. Faux, elle appartient à $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. ☐ Vrai ☒ Faux

Exercice 2 –

1. Par définition, f est une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. Soit alors $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + u') &= f(\lambda x + x', \lambda y + y, \lambda z + z') \\ &= (-3(\lambda x + x') + 2(\lambda y + y), (\lambda y + y') - (\lambda z + z')) \\ &= (\lambda(-3x + 2y) + (-3x' + 2y'), \lambda(y - z) + (y' - z')) \\ &= \lambda(-3x + 2y, y - z) + (-3x' + 2y', y' - z') \\ &= \lambda f(u) + f(u') \end{aligned}$$

Ainsi f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

Cours

Soit E et F deux espaces vectoriels. Une application f de E dans F est linéaire si :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

2. On a :

$$f(1, 0, 0) = (-3, 0), \quad f(0, 1, 0) = (2, 1) \quad \text{et} \quad f(0, 0, 1) = (0, -1)$$

donc : $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Méthode

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F.
Pour déterminer la matrice M représentative de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, on calcule $f(e_1), \dots, f(e_p)$ puis on écrit, en colonne, leurs coefficients dans la base $\mathscr{C}$: les coefficients de la $j^{ème}$ colonne de M sont les coefficients de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$.
Plus précisément, si on a :

$$\forall j \in [\![1, p]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} f_i = m_{1,j} f_1 + m_{2,j} f_2 + \cdots m_{n,j} f_n$$

alors M est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = (m_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(e_1) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_p) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,j} & \cdots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & m_{i,j} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,j} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{matrix}$$

3. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

Pour déterminer le noyau de f, on résout l'équation $f(u) = 0$ d'inconnue $u \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \text{Ker}(f) &\iff (-3x + 2y, y - z) = (0, 0)\\ &\iff \begin{cases} -3x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} 3x = 2y \\ z = y \end{cases}\\ &\iff (x, y, z) = \left(\frac{2y}{3}, y, y\right)\\ &\iff (x, y, z) \in \text{Vect}((2, 3, 3))\end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure : $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((2, 3, 3))$.

À retenir

Se souvenir que, si f est une application linéaire de E dans F, alors :

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E,\ f(x) = 0\}$$

4. Comme f est une application linéaire, sur $\mathbb{R}^3$, et comme $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}\text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1))\\ &= \text{Vect}((-3, 0), (2, 1), (0, -1))\\ &= \text{Vect}((1, 0), (2, 1), (0, 1))\\ &= \text{Vect}((1, 0), (0, 1))\end{aligned}$$

et finalement : $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

$\text{Vect}(-3x, y, -z) = \text{Vect}(x, y, z)$

$\text{Vect}(x, 2x + z, z) = \text{Vect}(x, z)$

Méthode

Si f est une application linéaire de E dans F et si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E, on a :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$$

Pour déterminer une base de l'image de f, on peut donc déterminer $f(e_1), \dots, f(e_p)$ puis enlever les vecteurs qui sont combinaison linéaire des autres.

Exercice 3 –

Cours

Soit f une application linéaire de E dans F, $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_j)_{1\leq j\leq p}$ une base de F. Soit x un vecteur de E et A la matrice associée à f relativement aux base $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.
Si on note X la colonne des coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$, alors AX est la colonne des coordonnées de $f(x)$ dans $\mathscr{B}$.
Plus précisément, si $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $AX = (y_j)_{1\leq j\leq p}$ alors :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{j=1}^{p} y_j f_j$$

1. • En notant $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ la colonne des coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$, on a :

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc les coordonnées de $f(x)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) sont $(-1, 2, 1)$, ce qui signifie :

$$f(x) = -e_1 + 2e_2 + e_3$$

$f(x)$ n'est pas égal à $(-1, 2, 1)$ car (e_1, e_2, e_3) n'est pas la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

• De même on a :

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $f(y) = -3e_1 + e_2 - 2e_3$ et $f(z) = 0$.

2. Soit $u = ae_1 + be_2 + ce_3$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ et U la colonne de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. On a alors :

On va résoudre l'équation $AU = 0$ en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned} f(u) = 0 &\iff AU = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} U = 0 \qquad L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} U = 0 \qquad L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U = 0 \end{aligned}$$

$$f(u) = 0 \iff \begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases}$$
$$\iff a = b = c$$
$$\iff U \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

ce qui nous permet de conclure :

Ne pas oublier que, quand on résout l'équation $AU = 0$, on ne trouve pas les vecteurs de $\text{Ker}(f)$ mais leurs coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$$

À retenir

Soit f un endomorphisme de E, $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et A la matrice associée à f dans la base $\mathscr{B}$. Pour déterminer le noyau de f, on peut résoudre l'équation $AX = 0$, d'inconnue X dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Une fois résolue l'équation $AX = 0$, on a trouvé les coordonnées des vecteurs de $\text{Ker}(f)$ dans $\mathscr{B}$. Il est donc essentiel, avant de conclure, de se souvenir de la base dans laquelle on travaille.

Par exemple, supposons que $E = \mathbb{R}^3$ et que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La résolution de l'équation $AX = 0$ donne :

$$AX = 0 \iff X \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

- si $\mathscr{B}$ est **la base canonique** de $\mathbb{R}^3$, alors :

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -2))$$

- si $\mathscr{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1))$ (le lecteur est invité à vérifier qu'il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}^3$), alors $(1, 0, -1)$ sont les coordonnées du vecteur

$$1 \cdot (1, 0, 0) + 0 \cdot (0, 1, 0) + (-1) \cdot (1, 1, 1) = (0, -1, -1)$$

tandis que $(0, 1, -2)$ sont les coordonnées du vecteur

$$0 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) + (-2) \cdot (1, 1, 1) = (-2, -1, -2)$$

donc dans ce cas :

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}((0, -1, -1), (-2, -1, -2)) = \text{Vect}((0, 1, 1), (2, 1, 2))$$

3. D'après le résultat précédent, on a, comme $e_1 + e_2 + e_3 \neq 0$:

$$\dim(\text{Ker}(f)) = 1$$

et donc, d'après le théorème du rang et comme E est de dimension 3 :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 - 1 = 2$$

Cours – Théorème du rang.

Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F.
Si E est de dimension finie, alors $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont de dimensions finies et :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$$

On a :

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 + e_3 \\ f(e_2) = e_1 - e_2 \end{cases}$$

Comme $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2, il suffit de trouver deux vecteurs non colinéaires dans $\mathrm{Im}(f)$ pour en trouver une base.

Comme (e_1, e_2, e_3) est libre, les vecteurs $e_1 + e_3$ et $e_1 - e_2$ ne sont pas colinéaires, donc la famille $(e_1 + e_3, e_1 - e_2)$ est libre ; comme elle est formée de deux vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$ et comme $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2, on en déduit :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_1 - e_2)$$

Exercice 4 –

1. On sait que le produit de deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est bien défini et appartient à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, donc f est une application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, pour tout couple (M, N) d'éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout réel λ, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda M + N) &= (\lambda M + N)A \\ &= \lambda MA + NA \\ &= \lambda f(M) + f(N) \end{aligned}$$

donc f est linéaire. Ainsi f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Cours

Soit E et F deux espaces vectoriels.

- Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans E.
- Un isomorphisme de E sur F est une application linéaire bijective de E sur F.

2. **a)** Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(M) = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} a-b & -a+b \\ c-d & -c+d \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \\ &\iff M = \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} \\ &\iff M = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, +c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc :

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est donc génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$. De plus elle est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires, donc elle en forme une base.

b) Comme $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et comme f est linéaire, on a :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(E_1), f(E_2), f(E_3), f(E_4))$$

De plus on a :

$$f(E_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et de même :

$$f(E_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(E_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc on a (en remarquant que $f(E_2) = -f(E_1)$ et $f(E_4) = -f(E_3)$) :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(E_1), f(E_3))$$

De plus la famille $(f(E_1), f(E_2))$ est libre (car formée de deux vecteurs non colinéaires). Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

3. D'après les calculs précédents, on a :

$$\begin{cases} f(E_1) = E_1 - E_2 \\ f(E_2) = -E_1 + E_2 \\ f(E_3) = E_3 - E_4 \\ f(E_4) = -E_3 + E_4 \end{cases}$$

donc : $$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4 donc M est une matrice carrée d'ordre 4.

Exercice 5 –

1. On a directement :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. • Les deux premières colonnes de M ne sont pas colinéaires, donc elles forment une famille libre. De plus les deux dernières colonnes sont égales. On en déduit que M est de rang 2, donc :

$$\dim(\text{Im}(f)) = 2$$

Cours

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies non nulles. Soit f une application linéaire de E dans F, dont la matrice relativement à des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de E et F est M. On a :

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(M)$$

• Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie égale à 3, on en déduit, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\text{Ker}(f)) = 1$$

3. Comme $f(e_2) = f(e_3)$ et comme f est linéaire, on a :

$$f(e_2 - e_3) = 0$$

De plus $e_2 - e_3$ n'est pas le vecteur nul et $\text{Ker}(f)$ est de dimension 1, donc :

$$\boxed{(e_2 - e_3) \text{ est une base de } \text{Ker}(f)}$$

Exercice 6 –

1. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$, P' et P'' appartiennent à $\mathbb{R}_2[x]$ donc, comme $\mathbb{R}_2[x]$ est un espace vectoriel, $f(P)$ appartient à $\mathbb{R}_2[x]$ et f est une application de $\mathbb{R}_2[x]$ dans lui-même.

De plus, pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_2[x])^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q) + (\lambda P + Q)' + (\lambda P + Q)''$$

d'où, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= \lambda P + Q + \lambda P' + Q' + \lambda P'' + Q'' \\ &= \lambda \left(P + P' + P''\right) + (Q + Q' + Q'') \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

donc f est linéaire de $\mathbb{R}_2[x]$ dans $\mathbb{R}_2[x]$, ce qui signifie que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.

2. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} f(e_0)(x) = e_0(x) + e_0'(x) + e_0''(x) = 1 \\ f(e_1)(x) = e_1(x) + e_1'(x) + e_1''(x) = x + 1 \\ f(e_2)(x) = e_2(x) + e_2'(x) + e_2''(x) = x^2 + 2x + 2 \end{cases}$$

$e_0(x) = 1$
$e_1(x) = x$
$e_2(x) = x^2$

donc la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. **a)** Comme A est la matrice représentative de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$, f et A ont le même rang. De plus A est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls, donc A est inversible. Le rang de A est donc égal au nombre de colonnes de A, d'où : $\text{rg}(f) = 3$.

b) On a donc :

$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$

$$\dim(\text{Im}(f)) = 3$$

De plus on sait que :

$$\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[x] \quad \text{et} \quad \dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$$

donc : $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$.

c) Comme $\mathbb{R}_2[x]$ est de dimension finie égale à 3, on a, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}_2[x]) - \dim(\text{Im}(f)) = 0$$

donc : $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

Exercice 7 –

1. **a)** Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Comme J est la matrice représentative de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a, en notant X le vecteur de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les composantes sont $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff JX = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ &\iff x_n = -\sum_{i=1}^{n-1} x_i \\ &\iff x = \left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\sum_{i=1}^{n-1} x_i \right) \\ &\iff x = x_1 (1, 0, \dots, 0, -1) + x_2 (0, 1, 0, \dots, 0, -1) + \cdots + x_{n-1} (0, \dots, 0, 1, -1) \end{aligned}$$

et donc, en notant $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_n, e_2 - e_n, \dots, e_{n-1} - e_n)$$

b) Comme les colonnes de J sont toutes égales et non nulles, on a :

$$\mathrm{rg}(J) = 1$$

donc :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$$

De plus $f(e_1)$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$ et n'est pas le vecteur nul ; on en déduit que $(f(e_1))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ donc :

$\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 1 donc tout vecteur non nul de $\mathrm{Im}(f)$ en forme une base.

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, \dots, 1)) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + \cdots + e_n)$$

2. **a)** Comme J est la matrice représentative de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $J^2 - nJ$ est la matrice représentative de $f^2 - nf$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. De plus, on a :

$$J^2 = \begin{pmatrix} n & n & \cdots & n \\ n & n & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{pmatrix} = nJ$$

donc $J^2 - nJ = 0$ et : $f^2 - nf = 0$.

b) • Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$ et alors :

$$\begin{aligned}(f - n\,\mathrm{Id})(y) &= (f - n\,\mathrm{Id})(f(x)) \\ &= f^2(x) - nf(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

donc y appartient à $\mathrm{Ker}(f - n\,\mathrm{Id})$ et ainsi : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f - n\,\mathrm{Id})$.

Méthode

Pour montrer qu'un ensemble F est inclus dans un ensemble G, on montre que tout élément de F appartient aussi à G.

• Soit $y \in \mathrm{Im}(f - n\,\mathrm{id})$. Il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x) - nx$ et :

$$\begin{aligned}f(y) &= f(f(x) - nx) \\ &= f^2(x) - nf(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

donc y appartient à $\mathrm{Ker}(f)$ et ainsi : $\mathrm{Im}(f - n\,\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 8 –

1. Soit $y \in \mathrm{Im}(g \circ f)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = (g \circ f)(x)$ et alors :

$$y = g(f(x))$$

donc, comme $f(x)$ appartient à F :

$$\exists z \in F,\ y = g(z)$$

donc y appartient à $\mathrm{Im}(g)$ et :

$$\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$$

2. **a)** Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. On a alors :

$$f(x) = 0$$

donc, comme $f(x)$ appartient à F et comme g est linéaire sur F

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

g est linéaire donc $g(0) = 0$.

donc x appartient à $\mathrm{Ker}(g \circ f)$ et :

$$\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$$

b) On note h la restriction de f à $\mathrm{Ker}(g \circ f)$. Comme f est une application linéaire sur E et comme $\mathrm{Ker}(g \circ f)$ est un sous-espace vectoriel de E, h est une application linéaire sur $\mathrm{Ker}(g \circ f)$. De plus, comme E est de dimension finie, $\mathrm{Ker}(g \circ f)$ est de dimension finie donc, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \dim(\mathrm{Ker}(h)) + \dim(\mathrm{Im}(h)) \tag{2.1}$$

Par ailleurs, comme h est la restriction de f à $\mathrm{Ker}(g \circ f)$, on a directement, pour tout $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$:

$$h(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = 0$$

donc :

$$\mathrm{Ker}(h) \subset \mathrm{Ker}(f)$$

d'où :

$$\dim(\mathrm{Ker}(h)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f))$$

Enfin, pour tout y appartenant à $\mathrm{Im}(h)$, il existe $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$ tel que :

$$y = h(x) = f(x)$$

et alors, comme x appartient à $\mathrm{Ker}(g \circ f)$:

$$g(y) = (g \circ f)(x) = 0$$

donc y appartient à $\mathrm{Ker}(g)$ et :

$$\mathrm{Im}(h) \subset \mathrm{Ker}(g)$$

et donc :

$$\dim(\mathrm{Im}(h)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(g))$$

ce qui nous permet de conclure, avec (2.1) :

$$\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g))$$

Exercice 9 –

1. Faux. Si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ alors on a, pour tout vecteur x non nul appartenant à E : $f(x) \neq 0$.

2. Vrai. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) = \{0\} &\Longleftrightarrow \forall x \in E,\ f(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow f = 0 \end{aligned}$$

3. Faux. Par exemple, si f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors on a :

$$A \neq 0 \quad \text{et} \quad A^2 = 0$$