

Michaël Bages | Pierre Bernard
Christine Lagrange | Jérôme Levie | Mathieu Mansuy
Julien Freslon | Marie Hézard | Jérôme Poineau | Amaury Freslon



MATHS

PCSI-PTSI

EXERCICES INCONTOURNABLES

3^e édition

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

© Dunod, 2023
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-086073-9

Table des matières

1^{er} semestre — Approfondissements de Terminale

1 Calcul algébrique	13
1.1 : Raisonnements pour la résolution d'équations	13
1.2 : Calcul de produits par factorielles	16
1.3 : Calcul de somme par décomposition de fraction	19
1.4 : Sommes doubles	21
1.5 : Triangle de Pascal généralisé	24
1.6 : Sommes binomiales de référence	27
1.7 : Sommes binomiales dérivées	30
2 Complexes et trigonométrie	35
2.1 : Équation trigonométrique par analyse-synthèse	35
2.2 : Systèmes non linéaires	36
2.3 : Calcul de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	38
2.4 : Théorème de Napoléon	40
2.5 : Argument et arc tangente	43
2.6 : Sommes de cosinus	45
2.7 : Linéarisation, formule de Moivre	49
2.8 : Méthode de Cardan	51
3 Calculs en analyse	57
3.1 : Calcul de dérivées	57
3.2 : Étude de fonction	59
3.3 : Calcul de limite par encadrement	63
3.4 : Fonctions circulaires réciproques	66
3.5 : Résolution d'une équation trigonométrique	70
3.6 : Différence d'arctangentes	72
3.7 : Réciproques des fonctions hyperboliques	74

4 Calcul de primitives, équations différentielles	79
4.1 : Intégration par parties	79
4.2 : Changement de variable $u = e^t$	81
4.3 : Changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$	83
4.4 : Ordre 1 et variation de la constante	85
4.5 : Équation fonctionnelle de l'exponentielle	88
4.6 : Ordre 2 et second membre exponentiel	89
4.7 : Ordre 2 et racine double	92
4.8 : Ordre 2 et second membre trigonométrique	93

1^{er} semestre — Les bases des mathématiques

5 Réels, suites	99
5.1 : Partie entière	99
5.2 : Calcul de bornes (par divergence, par densité)	100
5.3 : Calcul de bornes (par maximum, par limite de suite)	102
5.4 : Existence d'un point fixe par borne supérieure	104
5.5 : Étude d'une suite définie par une somme	107
5.6 : Irrationalité de e	111
5.7 : Étude d'une suite définie par récurrence	114
5.8 : Divergence de $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$	118
5.9 : Exemple de suites récurrentes linéaires	120
5.10 : Étude d'une suite implicite	124
6 Matrices et Systèmes	127
6.1 : Modélisation par système linéaire	127
6.2 : Système linéaire à paramètre	129
6.3 : Systèmes linéaires de grande taille	132
6.4 : Calcul explicite de l'inverse d'une matrice 3×3	133
6.5 : Puissances de matrices d'ordre 2	135
6.6 : Suites liées à une décomposition matricielle d'ordre 2	137
6.7 : Inversibilité d'une matrice d'ordre n	141
6.8 : Puissances de matrices particulières	143
6.9 : Puissances d'une matrice par la formule du binôme	146
6.10 : Puissances d'une matrice par diagonalisation	148
6.11 : Puissances d'une matrice par combinaisons linéaires	150
7 Limite, continuité, dérivabilité	153
7.1 : Calcul de limites	153
7.2 : Fonction continue ayant des limites finies à l'infini	156
7.3 : Trois théorèmes de point fixe	158
7.4 : Équation fonctionnelle	163

7.5 : Étude locale de dérivabilité	165
7.6 : Calcul d'une limite par accroissements finis	166
7.7 : Suite récurrente	168
7.8 : $f(f(x)) = ax + b$	170
8 Polynômes	175
8.1 : Racine et division euclidienne de polynômes	175
8.2 : Relations coefficients-racines	176
8.3 : Détermination d'un polynôme par divisibilités	179
8.4 : Polynômes de Legendre	181
8.5 : Polynômes de Tchebychev	183
8.6 : Suite de Polynômes	189
8.7 : Calcul de sommes de fractions rationnelles	195
9 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, convexité	199
9.1 : Formule de Leibniz	199
9.2 : Dérivées successives	200
9.3 : Égalité de Taylor-Lagrange	204
9.4 : Fonctions pathologiques	207
9.5 : Inégalités de convexité	209
9.6 : Asymptote à une fonction convexe	212

2nd semestre — Algèbre et Géométrie

10 Espaces vectoriels, applications linéaires	217
10.1 : Fonctions paires et impaires	217
10.2 : Combinaison linéaire	219
10.3 : Famille libre de fonctions	223
10.4 : Itérées d'un endomorphisme	225
10.5 : Images et noyaux I	228
10.6 : Endomorphismes de l'espace des polynômes	230
10.7 : Somme de projecteurs	233
11 Dimension finie et matrices	237
11.1 : Suites récurrentes linéaires d'ordre 3	237
11.2 : Images et noyaux II	241
11.3 : Noyaux et images itérés	243
11.4 : Inégalités sur le rang	246
11.5 : Indice de nilpotence	249
11.6 : Hyperplan	252
11.7 : Réduction d'un endomorphisme	254
11.8 : Projecteur et symétrie	255
11.9 : Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$	259

11.10 : Polynômes interpolateurs de Lagrange	261
12 Déterminants	265
12.1 : Calcul de déterminant par récurrence d'ordre 1	265
12.2 : Déterminant par récurrence linéaire d'ordre 2	267
12.3 : Déterminant d'un endomorphisme	270
12.4 : Calcul par somme de colonnes	272
12.5 : Déterminant d'une somme	274
12.6 : Déterminant de Hurwitz	276
12.7 : Déterminant de Vandermonde	278
12.8 : Déterminant d'une famille de vecteurs	282
13 Espaces euclidiens (PCSI)	285
13.1 : Orthonormalisation dans $\mathbb{R}^3$	285
13.2 : Espace euclidien de polynômes	288
13.3 : Caractérisation des projecteurs orthogonaux	293
13.4 : Espace euclidien de matrices	295
13.5 : Matrices orthogonales et décomposition RT	299
14 Géométrie (PTSI)	305
14.1 : Intersection de cercles	305
14.2 : Équation de plan	307
14.3 : Équation de droite	307
14.4 : Calculs de distances	309
14.5 : Plans dans l'espace	312
14.6 : Perpendiculaire commune	314

2nd semestre — Analyse et Probabilités

15 Analyse asymptotique	321
15.1 : Calculs de développements limités	321
15.2 : Développement limité d'un quotient	326
15.3 : Développement limité d'une fonction réciproque	328
15.4 : Formes indéterminées	330
15.5 : Recherche d'asymptote	334
15.6 : Prolongement $\mathcal{C}^1$	336
15.7 : Fonctions pathologiques - le retour	339
15.8 : Développement asymptotique d'une suite	342
15.9 : Développement asymptotique d'une suite implicite	344
16 Intégration	349
16.1 : Étude d'une fonction définie par une intégrale	349
16.2 : Changements de variable usuels : $u = \cos(t)$	352
16.3 : Sommes de Riemann	354

16.4 : Intégrales de Wallis	356
16.5 : Lemme de Riemann-Lebesgue	360
16.6 : Intégrale de Gauss	360
16.7 : Inégalité de Taylor-Lagrange	365
17 Séries	369
17.1 : Nature et somme de séries	369
17.2 : Nature par comparaison à une série géométrique	375
17.3 : Séries géométriques dérivées	378
17.4 : Natures de séries par équivalents	382
17.5 : Constante d'Euler et série harmonique alternée	385
17.6 : Formule de Stirling	390
17.7 : Séries de Bertrand	393
18 Fonctions de deux variables	399
18.1 : Ouverts de $\mathbb{R}^2$	399
18.2 : Étude du caractère $\mathcal{C}^1$	401
18.3 : Calcul de distance	405
18.4 : Recherche d'extremum	408
18.5 : Équation aux dérivées partielles	410
19 Dénombrement et probabilités	413
19.1 : Constitution de jury	413
19.2 : Formule de Vandermonde	415
19.3 : Coffre-fort	417
19.4 : Choix d'entiers non consécutifs	421
19.5 : Lancers aléatoires de deux dés	427
19.6 : Saut en hauteur	429
19.7 : Tirage dans une urne choisie aléatoirement	431
20 Variables aléatoires	437
20.1 : Urne remplie aléatoirement	437
20.2 : Valeur d'une action	441
20.3 : Maximum de deux variables aléatoires	443
20.4 : Tirage sans remise dans une urne	446
20.5 : Distribution aléatoire de cartes	451
20.6 : Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev	458

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux élèves de première année de classes préparatoires scientifiques en filières PCSI et PTSI. Il leur propose de mettre en pratique les notions abordées en cours de mathématiques par le biais d'exercices. Chacun est assorti d'une correction détaillée, dans laquelle l'accent est mis sur la méthode qui mène à la solution. Comme l'indique le titre, l'objectif a été de couvrir, pour l'ensemble des chapitres du programme, non seulement toutes les notions à connaître, mais encore les techniques, astuces essentielles, ainsi que quelques exercices-types, classiques ou de synthèse : en particulier, on progresse, au sein de chaque chapitre, des techniques les plus fondamentales d'application du cours vers des techniques plus avancées pouvant ressembler à des exercices d'oral de concours.

Cette 3^e édition tient compte de toutes les nouveautés et modifications du nouveau programme, valable à partir de l'année 2021-2022. Au-delà d'une mise à jour nécessaire liée au changement de programme, nous avons cherché à améliorer et approfondir l'édition précédente, tout en respectant les principes qui ont fait le succès de cette collection :

- fournir un panel le plus représentatif possible des exercices-types, compétences et notions, sur chaque chapitre ;
- donner, pour chaque exercice, d'une part une rédaction exemplaire conforme aux attendus des épreuves écrites – tout en mettant en relief les canevas susceptibles de servir souvent –, d'autre part une explication des démarches heuristiques et déductives sous-jacentes – afin notamment de faciliter l'application des techniques apprises à d'autres exercices.

Nous souhaitons ici remercier les quatre auteurs historiques, sur le travail desquels nous nous sommes fondés pour cette édition : Julien Freslon, Marie Hézard, Jérôme Poineau et Amaury Freslon.

Les auteurs,

Michaël BAGES

Pierre BERNARD

Christine LAGRANGE

Jérôme LEVY

Matthieu MANSUY

Structure de l'ouvrage

Le livre est divisé en vingt chapitres, consacrés chacun à une partie du programme.

Au-delà de la répartition officielle des chapitres en deux semestres, nous avons bien distingué la première période du 1^{er} semestre (*grosso modo* de la rentrée jusqu'aux vacances de la Toussaint), qui consiste en un approfondissement des connaissances de lycée, afin de permettre un passage progressif de la classe de Terminale à l'enseignement supérieur.

La seconde partie du 1^{er} semestre s'attache à revenir de manière la plus rigoureuse possible sur les notions fondatrices des mathématiques sur lesquelles seront construites toutes les connaissances ultérieures.

Pour le 2nd semestre, nous avons opté pour un découpage thématique traditionnel : « Algèbre et Géométrie » puis « Analyse et Probabilités ».

En ce qui concerne les corrections, nous avons choisi de séparer clairement la réflexion préliminaire, comprenant analyse du problème et tâtonnements, de la rédaction finale, rigoureuse et précise. Cette dernière étape est signalée, dans le texte, par la présence d'un liseré gris sur la gauche et du pictogramme . Insistons sur le fait que nous ne prétendons nullement présenter l'unique cheminement permettant d'aboutir à la solution d'un exercice donné, ni la seule rédaction acceptable. Dans les deux cas, bien des possibilités existent.

Par ailleurs, lorsque nous avons souhaité mettre en lumière un point important, nous l'avons rédigé sur un fond grisé et indiqué par . De même, la présence d'un piège dont il faut se méfier est signalée par .

Pour finir, signalons que cet ouvrage est conçu pour les étudiants des deux filières PCSI et PTSI. Cependant :

- Le chapitre **8 « Polynômes »** est placé au 1^{er} semestre, respectant en cela le programme de PCSI. Les élèves de PTSI l'abordent quant à eux au début du 2nd semestre. Nous leur demandons ce petit effort d'adaptation !
- le chapitre **13 « Espaces euclidiens »** est réservé aux étudiants de la filière PCSI.
- le chapitre **14 « Géométrie »** est réservé aux étudiants de la filière PTSI – nous conseillons toutefois aux étudiants de PCSI d'y jeter un coup d'oeil.
- Lorsqu'un chapitre contient des exercices réservés aux étudiants de la filière PCSI ou de la filière PTSI suivant le module PSI, la liste de ces exercices est donnée au début du chapitre.

Partie 1

1^{er} semestre — Approfondissements de Terminale

Calcul algébrique

Exercice 1.1 : Raisonnements pour la résolution d'équations

1. Déterminer les réels x tels que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.
2. Déterminer les réels strictement positifs x tels que $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.
3. Déterminer les réels x tels que $\sqrt{x(x-3)} = 3x+5$.

Dans la résolution d'équations, comme face à toute expression mathématique comportant des variables, le premier réflexe est de se demander pour quelles valeurs des variables cette expression a un sens – on parlera ici de *domaine de l'équation*. Le mieux est de déterminer ce domaine au début du problème, mais il faudra également se poser la question en fin de résolution, au moment d'écrire l'ensemble des solutions.

1. Nous allons pouvoir raisonner par équivalences pour cette première équation.

► Détermination du domaine de l'équation.



Pour tout x réel, les deux membres de l'équation ont un sens si, et seulement si, les radicandes sont positifs, c'est-à-dire si, et seulement si :

$$x(x-3) \geq 0 \quad \text{et} \quad 3x-5 \geq 0.$$

La première condition est équivalente à $x \leq 0$ ou $x \geq 3$ (un trinôme du second degré est du signe de son coefficient en x^2 à l'extérieur de ses racines et du signe contraire entre les racines), et la deuxième est équivalente à $x \geq \frac{5}{3}$.

Ainsi, l'équation a un sens uniquement pour $x \in [3, +\infty[$.

► Résolution proprement dite de l'équation.

L'idée est de tout élever au carré pour nous ramener à une équation du second degré.



Pour tout $x \in [3, +\infty[$, les deux membres de l'équation étant positifs, et la fonction carré réalisant une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$, l'équation est équivalente à l'égalité des carrés

$$x(x-3) = 3x-5,$$

laquelle se réécrit

$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Les réels x vérifiant cette équation du second degré sont 1 et 5, et, parmi ceux-ci, seul 5 appartient au domaine de l'équation, à savoir : $[3, +\infty[$.



Dans toute rédaction mathématique soignée, il faut veiller à avoir introduit correctement, et au bon moment, chaque objet considéré. On voit ici qu'il n'est pas possible d'introduire précisément la variable x sans avoir effectué préalablement la première étape, l'étude du domaine de l'équation.

► Conclusion.

On ne conserve que les solutions de l'équation qui appartiennent au domaine.



L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \{5\}$.



Attention, l'étape de résolution fait apparaître une « fausse solution » (dite également *solution parasite*). En effet, la fonction carré n'est pas injective sur $\mathbb{R}$: s'il est vrai que $a = b$ entraîne $a^2 = b^2$, la réciproque est fausse en général. Ainsi, en l'occurrence, l'équation $x(x-3) = 3x-5$ admet plus de solutions que l'équation de l'énoncé.

2. Pour cette deuxième équation, nous devons raisonner par disjonction de cas :

► Détermination du domaine de l'équation.

L'énoncé nous limite aux réels strictement positifs, or x^y a bien un sens lorsque x et y sont strictement positifs, c'est donc le cas des deux membres de notre équation.

► Résolution proprement dite de l'équation.



Soit x un réel strictement positif. Le logarithme népérien étant une fonction bijective, l'équation est équivalente à :

$$x^x \ln(x) = x \ln(x^x),$$

donc à

$$x^x \ln(x) = x^2 \ln(x).$$



On ne peut en déduire $x^x = x^2$ en simplifiant par $\ln(x)$: en effet, $\ln(x)$ pourrait être nul. Il faut donc raisonner par disjonction de cas, afin de gérer à part le cas $x = 1$.



Raisonnons par disjonction de cas.

- Si $x \neq 1$, alors $\ln(x) \neq 0$. L'équation est alors équivalente à $x^x = x^2$, puis, en prenant à nouveau le logarithme des deux membres, à $x \ln(x) = 2 \ln(x)$. Comme ici $x \neq 1$, ceci est équivalent à $x = 2$.
- Si $x = 1$, on constate alors immédiatement que $1^{(1^1)} = 1 = (1^1)^1$.

► Conclusion.

L'ensemble des solutions est la réunion de toutes les solutions trouvées dans chacun des cas traités.



Finalement,

$$\mathcal{S} = \{1, 2\}.$$

Ces deux premières questions mènent à deux constats :

- Si, dans la première question, on oublie pour quelles valeurs de la variable on raisonne, on aboutit à une solution parasite.
- Si, dans la deuxième question, on ne fait pas attention à ne pas diviser par 0 lors de la simplification par $\ln(x)$, on perd la solution $x = 1$.



Le manque de rigueur dans le raisonnement mathématique peut aboutir à trouver de « fausses solutions », ou au contraire à en oublier de vraies. Pour éviter cela, il est nécessaire, d'une part, de systématiquement déterminer le domaine de l'équation et, d'autre part, de s'assurer que tous les calculs sont licites (ne pas diviser par zéro, ne pas prendre la racine carrée ou le logarithme d'un nombre négatif, etc.). Ne pas hésiter, au besoin, à distinguer des cas.

3. Cette équation semble similaire à la première. Pourtant, nous n'allons pas pouvoir la résoudre avec la même méthode. En effet, nous n'allons pas pouvoir raisonner par équivalences à cause du membre de droite dont le signe n'est pas constant. La fonction carré n'étant pas bijective sur $\mathbb{R}$, nous ne pouvons pas élever au carré tout en conservant les équivalences.

Lorsqu'il n'est pas possible de conserver les équivalences, le bon raisonnement à adopter est celui de l'analyse-synthèse. Avant cela toutefois, nous nous interrogeons sur le domaine de l'équation.

► Domaine.



Le premier membre de l'équation n'est défini que pour les réels x tels que $x(x - 3) \geq 0$, c'est-à-dire pour $x \in] - \infty, 0] \cup [3, +\infty[$.

Ainsi, l'équation a un sens uniquement pour $x \in] - \infty, 0] \cup [3, +\infty[$.

Ceci implique évidemment que $\mathcal{S} \subset] - \infty, 0] \cup [3, +\infty[$.

► Résolution par analyse-synthèse.



Procédons par analyse-synthèse.

◇ *Analyse :*

Soit $x \in \mathcal{S}$. En appliquant la fonction carré à l'égalité $\sqrt{x(x - 3)} = 3x + 5$, on obtient l'égalité

$$x(x - 3) = (3x + 5)^2,$$

qui, une fois développée et réduite, est équivalente à :

$$8x^2 + 33x + 25 = 0.$$

Or, les racines du trinôme $8x^2 + 33x + 2$ sont $x_1 = -\frac{25}{8}$ et $x_2 = -1$.

Par conséquent, si x est solution, alors il vaut nécessairement $-\frac{25}{8}$ ou -1 .

Cela s'écrit ainsi de manière ensembliste :

$$\mathcal{S} \subset \left\{ -\frac{25}{8}, -1 \right\}.$$

◇ *Synthèse :*

On commence par vérifier l'appartenance au domaine. Les deux candidats-solutions sont tous les deux négatifs, donc appartiennent au domaine. Il faut donc vérifier qu'ils sont bien solutions en remplaçant dans l'égalité initiale.

Pour x_1 ,

$$\text{d'une part, } \sqrt{-\frac{25}{8} \left(-\frac{25}{8} - 3\right)} = \sqrt{-\frac{25}{8} \left(-\frac{49}{8}\right)} = \frac{5 \times 7}{8} = \frac{35}{8},$$

$$\text{d'autre part, } 3 \times \left(-\frac{25}{8}\right) + 5 = -\frac{75}{8} + \frac{40}{8} = -\frac{35}{8} \neq \frac{35}{8}. \text{ Donc } -\frac{25}{8} \notin \mathcal{S}.$$

Pour x_2 ,

$$\text{d'une part, } \sqrt{-1 \times (-1 - 3)} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\text{d'autre part, } 3 \times (-1) + 5 = 2. \text{ Donc } -1 \in \mathcal{S}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\mathcal{S} = \{-1\}.$$



L'intérêt du raisonnement par analyse-synthèse est de s'affranchir des conditions — souvent drastiques — des équivalences, pour aller plus rapidement repérer des « candidats-solutions » au sein du domaine. Son défaut réside dans la phase de synthèse : il est parfois difficile, ou très long, de vérifier si chaque candidat est oui ou non solution.

Dans ce dernier exercice, on aurait pu raisonner par équivalence au prix d'une disjonction de cas sur le signe du second membre, $3x + 5$:

- Si $3x + 5 \geq 0$, c'est-à-dire si $x \geq -\frac{5}{3}$, les deux membres sont positifs, donc l'équivalence est valide, puisque la fonction carré est bijective sur $\mathbb{R}_+$. On trouve dans ce cas les deux mêmes candidats-solutions, -1 et $-\frac{25}{8}$; mais $-\frac{25}{8} < -\frac{5}{3}$. Donc il faut rejeter $-\frac{25}{8}$ puisqu'elle n'est pas dans le domaine considéré ici.
- Si $3x + 5 < 0$, une racine carrée ne pouvant être strictement négative, l'égalité n'est jamais vraie : l'équation n'admet pas de solution dans ce cas.

Nous aborderons dans l'exercice 2.1 du chapitre 2 une équation qui ne peut être raisonnablement résolue que par analyse-synthèse.

Exercice 1.2 : Calcul de produits par factorielles

Pour tout $(p, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles.

1. $A = (p+1)(p+2) \cdots (p+n)$.

2. $B = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2p)$.

3. $C = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2p+1)$.

Les factorielles ne sont compatibles avec aucune opération. La seule formule utilisable est donc celle issue de la définition, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = \prod_{k=1}^n k \quad \text{et} \quad 0! = 1$$

1. Dans cette expression, on reconnaît une partie des facteurs de $(p+n)!$, nous allons faire apparaître les facteurs manquants.



Soit $(p, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Il vient successivement :

$$\begin{aligned} A &= (p+1) \times (p+2) \times \cdots \times (p+n) \\ &= \frac{1 \times 2 \times \cdots \times p}{1 \times 2 \times \cdots \times p} \times (p+1) \times (p+2) \times \cdots \times (p+n) \\ &= \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (p+n)}{1 \times 2 \times \cdots \times p} \\ &= \frac{(p+n)!}{p!}. \end{aligned}$$

2. Ici n'apparaissent que des facteurs pairs ; en factorisant 2 dans chacun d'entre eux, on obtiendra $p!$.



Le facteur 2 apparaît dans chaque facteur d'un *produit* de p facteurs, c'est donc la puissance 2^p qui se factorise.



Soit $p \in \mathbb{N}$.

Faisons apparaître 2 dans chaque facteur :

$$\begin{aligned} B &= 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2p) \\ &= (2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times \cdots \times (2 \times p) \\ &= 2^p \times 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times p \\ &= 2^p p! \end{aligned}$$



Il ne faut pas confondre $(2p)!$, qui est le produit de *tous* les entiers de 1 à $2p$, et B , qui est le produit des nombres *pairs* jusqu'à $2p$; par ailleurs, le symbole de la factorielle est prioritaire, ce qui signifie que $2p!$ doit être compris comme $2(p!)$, le double de la factorielle de p , ce qui est encore différent des expressions précédentes.

3. Nous allons procéder comme pour le calcul de A : introduire les facteurs manquants pour obtenir une factorielle, ici $(2p+1)!$. On reconnaîtra alors B .



Soit $p \in \mathbb{N}$.

Multiplions numérateur et dénominateur par le produit des nombres pairs de 2 à $2p$, c'est-à-dire B :

$$\begin{aligned} C &= 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2p+1) \\ &= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times (2p) \times (2p+1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2p)} \\ &= \frac{(2p+1)!}{B} = \frac{(2p+1)!}{2^p p!}. \end{aligned}$$



Nous avons choisi de rédiger les trois démonstrations précédentes avec des « $\cdots$ », afin de permettre aux lecteurs débutants de bien comprendre ce qui se passe.

Le lecteur plus aguerri devra démontrer ces résultats avec le symbole produit. C'est l'objectif que vous devez vous fixer à court terme (c'est-à-dire d'ici la fin du premier semestre).

Voici comment rédiger rigoureusement, à l'aide du symbole produit :

$$\begin{aligned} A &= \prod_{k=p+1}^{p+n} k = \frac{\prod_{k=1}^p k}{\prod_{k=1}^p k} \times \prod_{k=p+1}^{p+n} k = \frac{\prod_{k=1}^{p+n} k}{\prod_{k=1}^p k} = \frac{(p+n)!}{p!} \\ B &= \prod_{k=1}^p (2k) = 2^p \prod_{k=1}^p k = 2^p p! \\ C &= \prod_{k=1}^p (2k+1) = \frac{B}{B} \times \prod_{k=1}^p (2k+1) = \frac{1}{B} \times \prod_{k=1}^p (2k) \times \prod_{k=1}^p (2k+1) \\ &= \frac{1}{B} \times \prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2p} k \times \prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2p+1} k = \frac{1}{B} \prod_{k=1}^{2p+1} k = \frac{(2p+1)!}{2^p p!} \end{aligned}$$

Exercice 1.3 : Calcul de somme par décomposition de fraction

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

2. En déduire, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, une expression simplifiée de $\sum_{n=1}^N u_n$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$. Vérifier que $u_n = x_n - x_{n+1}$, puis retrouver la valeur de $\sum_{n=1}^N u_n$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.

1. Nous allons réduire au même dénominateur l'expression proposée, réorganiser le numérateur et comparer l'expression obtenue à la définition de u_n .



Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

En mettant les fractions au même dénominateur, l'égalité de l'énoncé est équivalente à

$$u_n = \frac{a(n+1)(n+2) + b n(n+2) + c n(n+1)}{n(n+1)(n+2)},$$

c'est-à-dire à

$$u_n = \frac{(a+b+c)n^2 + (3a+2b+c)n + 2a}{n(n+1)(n+2)}.$$

Il y a donc égalité si, et seulement si, le système suivant a une solution :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{array} \right. & \xLeftrightarrow{L_4 \leftarrow \frac{1}{2} L_4} \left\{ \begin{array}{l} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ a=\frac{1}{2} \end{array} \right. & \xLeftrightarrow{\text{substitution}} \left\{ \begin{array}{l} b+c=\frac{-1}{2} \\ 2b+c=\frac{-3}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{array} \right. \\ & & \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left\{ \begin{array}{l} b+c=-\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ a=\frac{1}{2} \end{array} \right. & \xLeftrightarrow{\text{substitution}} \left\{ \begin{array}{l} c=\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ a=\frac{1}{2} \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Ainsi, le triplet $(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$, et seulement lui, convient.



Attention à bien regrouper les termes de même degré dans l'expression du numérateur avant de former un système sur a , b et c .

2. Nous allons sommer les u_n en utilisant l'expression trouvée précédemment : cela nous fournira trois sommes analogues se prêtant à un changement d'indice.



Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors, par linéarité de la somme,

$$\sum_{n=1}^N u_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+2}.$$

En effectuant les changements d'indice $\ell = n+1$ et $\ell = n+2$ dans les deux dernières sommes, on obtient

$$\sum_{n=1}^N u_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n}.$$

Notez que l'on a implicitement renommé les nouveaux indices avec l'ancienne lettre n , ce que l'on fait régulièrement lors d'un changement d'indice.

Les trois sommes obtenues ne sont pas tout à fait identiques : les termes généraux sont les mêmes, mais les bornes sont différentes. Pour simplifier ces sommes, nous allons toutes les exprimer en fonction de l'une d'elles, par exemple la première.



Posons $H_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$. Il vient

$$\sum_{n=1}^N u_n = \frac{1}{2} H_N - \left(H_N - 1 + \frac{1}{N+1} \right) + \frac{1}{2} \left(H_N - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} \right),$$

c'est-à-dire, toutes simplifications effectuées,

$$\sum_{n=1}^N u_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)(N+2)}.$$



Les simplifications dans les sommes ne sont pas toujours simples à repérer. Pour les détecter, au brouillon, on peut écrire les premiers termes des différentes sommes et apercevoir ainsi qu'il y a des simplifications entre les différentes sommes. Par exemple, ici, si l'on écrit les premiers termes, on obtient

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right).$$

Ensuite, au moment de rédiger, on effectue les changements d'indice mettant en évidence les simplifications.

3. Suivons les indications de l'énoncé.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le calcul donne

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{n+2} \\ &= u_n. \end{aligned}$$

Grâce à cette égalité, nous pouvons à présent écrire $\sum_{n=1}^N u_n$ sous forme d'une somme télescopique, ce qui va grandement faciliter son calcul.



Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

On déduit de ce qui précède que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n &= \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n+1}) \\ &= x_1 - x_{N+1} \quad \text{par télescopage} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{1}{N+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{N+2}, \end{aligned}$$

qui est bien le résultat obtenu précédemment.

Exercice 1.4 : Sommes doubles

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes doubles suivantes.

1. $S_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i 2^j.$

2. $S_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n (1 - 2^i) 2^{ij}.$

3. $S_3 = \sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^n \frac{1}{i}.$

Le principe « général » (on verra que la troisième somme est un contre-exemple) de calcul des sommes doubles est de commencer par calculer la somme « interne », en considérant lors de ce calcul que l'indice de la somme « externe » est constant. On effectue ensuite le calcul de la somme externe, ce qui revient donc à calculer les sommes successivement, en partant de la plus intérieure.

1. Nous allons calculer S_1 en deux temps. À i fixé, nous allons calculer $\sum_{j=1}^n i 2^j$ en faisant apparaître une somme géométrique, puis nous sommerons sur i .



Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. L'indice i est constant du point de vue de j , donc on peut le mettre en facteur de la somme :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n i 2^j &= i \sum_{j=1}^n 2^j \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= i \left(\sum_{j=0}^n 2^j - 1 \right) \\ &= i \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} - 1 \right) \quad \text{somme géométrique de raison 2} \\ &= i(2^{n+1} - 2). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^n i(2^{n+1} - 2) \\ &= (2^{n+1} - 2) \sum_{i=1}^n i \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= (2^{n+1} - 2) \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{d'après une formule usuelle} \\ &= (2^n - 1)n(n+1). \end{aligned}$$



Le fait que le terme général de la somme soit le produit d'un facteur dépendant uniquement de i et d'un autre dépendant uniquement de j permet d'effectuer plus rapidement le calcul, de la façon suivante.

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^n \left(i \sum_{j=1}^n 2^j \right) = \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{j=1}^n 2^j \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} - 1 \right) = (2^n - 1)n(n+1). \end{aligned}$$

En effet, i ne dépend pas de j , on peut le « sortir » de la somme interne. On obtient alors une somme de la forme $\sum_{i=1}^n (i \times A)$, où A ne dépend pas de i , et ainsi

$$S_1 = A \sum_{i=1}^n i = \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{j=1}^n 2^j \right).$$

Cette manipulation est cependant impossible lorsque l'on ne peut pas factoriser séparément les indices, comme c'est le cas dans la question suivante.



Il est un bon réflexe, lors de l'établissement de telles formules, de les vérifier pour de petites valeurs de n .

Ici, pour $n = 0$, la somme est vide et vaut donc 0, et $(2^0 - 1) \times 0 \times (0 + 1)$ donne bien 0.

Pour $n = 1$, la somme n'a qu'un terme, qui vaut 2, et $(2^1 - 1) \times 1 \times (1 + 1)$ donne bien 2.

2. On procède comme dans la question précédente : on commence par fixer i pour calculer $\sum_{j=0}^n 2^{ij}$, puis on somme l'expression obtenue (qui dépend de i , mais plus de j) pour i allant de 1 à n . Les calculs font intervenir deux fois la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique.



Effectuons le calcul en commençant par la somme interne.

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \sum_{i=1}^n \left((1 - 2^i) \sum_{j=0}^n 2^{ij} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left((1 - 2^i) \sum_{j=0}^n (2^i)^j \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left[(1 - 2^i) \frac{1 - (2^i)^{n+1}}{1 - 2^i} \right] \quad (\text{somme géométrique de raison } 2^i \neq 1) \\
 &= \sum_{i=1}^n (1 - 2^{i(n+1)}) \\
 &= \sum_{i=1}^n 1 - \sum_{i=1}^n (2^{n+1})^i \quad \text{par linéarité de la somme} \\
 &= n - 2^{n+1} \frac{1 - (2^{n+1})^n}{1 - 2^{n+1}} \quad (\text{somme géométrique de raison } 2^{n+1} \neq 1).
 \end{aligned}$$



Attention à ne pas oublier le premier terme de la somme d'une suite géométrique. On rappelle la formule au départ de $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \forall q \in \mathbb{C}, q \neq 1, \quad \sum_{k=n_0}^n q^k = q^{n_0} \times \frac{1 - q^{n-n_0+1}}{1 - q}.$$

3. Cette somme double est plus difficile que les précédentes : elle est « triangulaire », c'est-à-dire que l'une des bornes de la somme interne dépend de l'indice de la somme externe.