

MATEMÁTICAS

FUNCIONES

LÍMITES, DERIVADAS
E INTEGRALES

OBERON

Este libro
te ayudará a
acceder a la
universidad



Los Profes de  Ciencias

OBERON

Diseño de cubierta: Celia Antón Santos

Editor: Víctor Manuel Ruiz Calderón

Ilustraciones e imágenes: © 2003-2024 Shutterstock, Inc.

Textos y el resto de ilustraciones e imágenes: Copyright © 2024 Jhoan M. López

Copyright © 2024 Jhoan M. López. Los Profes de Ciencias

Reservados todos los derechos. El contenido de esta obra está protegido por la Ley, que establece penas de prisión y/o multas, además de las correspondientes indemnizaciones por daños y perjuicios, para quienes reprodujeren, plagiaren, distribuyeren o comunicaren públicamente, en todo o en parte, una obra literaria, artística o científica, o su transformación, interpretación o ejecución artística fijada en cualquier tipo de soporte o comunicada a través de cualquier medio, sin la preceptiva autorización.

© EDICIONES OBERON (GRUPO ANAYA, S.A.), 2024

Valentín Beato, 21. 28037 Madrid

Primera edición digital: 2024

Edición electrónica sobre la 1.^a edición impresa

ISBN: 978-84-415-5004-9

INTRODUCCIÓN

Durante años soñé con escribir este libro. Un libro de matemáticas que te explica las funciones de un modo ameno, divertido, con un lenguaje coloquial y que, a su vez, tiene asociado decenas de vídeos privados con explicaciones que te harán comprender la materia. "¿Un libro de matemáticas interactivo? Sí, se puede". Tienes en tu mano no solo un libro, sino un profesor particular que te ayudará a alcanzar tus metas educativas. La experiencia me dice que a veces las funciones se atascan un poco y las derivadas e integrales dan miedo, pero, lejos de que eso sea real, te invito a que comiences el libro con la idea de que son fáciles de entender. En poco tiempo te convertirás en una persona experta en la materia que destacará en clase por sus notas en los exámenes y en la prueba de acceso a la universidad por obtener la nota deseada para entrar en la carrera con la que tanto tiempo llevas soñando. A lo largo del libro verás que hay muchos códigos QR que te llevarán a vídeos con explicaciones relacionadas con lo que estás viendo en ese momento, te animo a que los veas y hagas junto a mí los ejercicios que propongo en la pizarra. Gracias por dejar que sea tu profesor particular encerrado en un libro.

Me siento muy afortunado de tener la mejor comunidad de Internet, de tal manera que muchas gracias a todos y cada uno que la forman y la formarán, gracias por el apoyo que recibo a diario; sois los culpables de que este libro sea posible. Gracias a aquellas personas que empezaron como compañeros de profesión y a día de hoy son amigos. Gracias también a esas personitas que empezaron como alumnos y alumnas y hoy son parte de mi círculo de amigos, aprendí mucho de docencia impartiendo vuestras clases. Familia y amigos, muchas gracias por estar ahí siempre. Y, por supuesto, **especial agradecimiento a mi madre, padre y hermana. Gracias por confiar en mí incondicionalmente y apoyarme en todo lo que hago. Gracias por la educación que me habéis dado y por hacer que cada día crezca como profesor.**

REDES SOCIALES



<https://youtube.com/LosProfesDeCiencias>



<https://www.tiktok.com/@losprofesdeciencias>



<https://www.instagram.com/losprofesdeciencias/>

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	3
1. FUNCIONES	5
¿Qué es una función?	5
Ejercicios de pruebas de acceso a la universidad resueltos	13
2. LÍMITES DE FUNCIONES	15
¿Qué es y qué significa el límite de una función?	15
¿Qué es una indeterminación?	21
Indeterminaciones en límites de una función en un punto	21
Indeterminaciones en límites de una función en el infinito	24
Ejercicios de prueba de acceso a la universidad resueltos	31
3. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN	33
Ejercicios de pruebas de acceso a la universidad resueltos	41
4. DERIVADAS	43
¿Qué es una derivada?	43
Ejercicios de pruebas de acceso a la universidad resueltos	49
5. APLICACIONES DE LAS DERIVADAS	51
Ejercicios de pruebas de acceso a la universidad resueltos	63
6. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES	65
Ejercicios de pruebas de acceso a la universidad resueltos	93
7. INTEGRALES INDEFINIDAS	95
Ejercicios de pruebas de acceso a la universidad resueltos	107
8. INTEGRALES DEFINIDAS	109
Ejercicios de pruebas de acceso a la universidad resueltos	117
SOLUCIONES	119

1

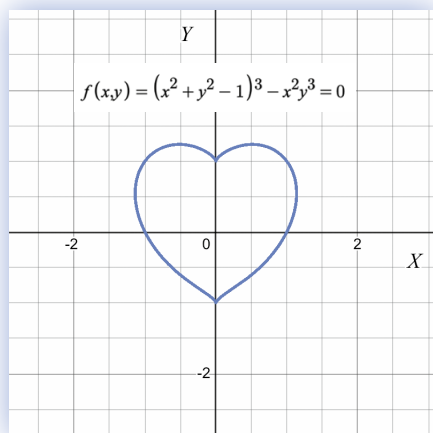
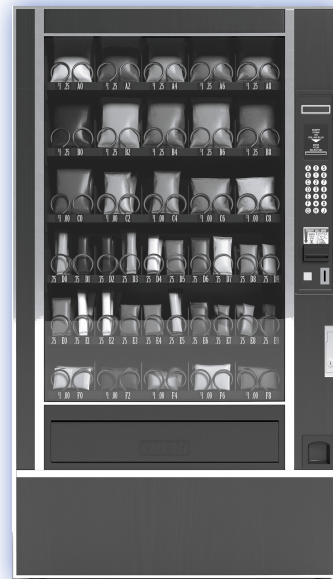
FUNCIONES

Antes de empezar este fascinante viaje en el que te convertirás en una persona experta en funciones matemáticas y sus aplicaciones, es necesario que empecemos por lo más sencillo.

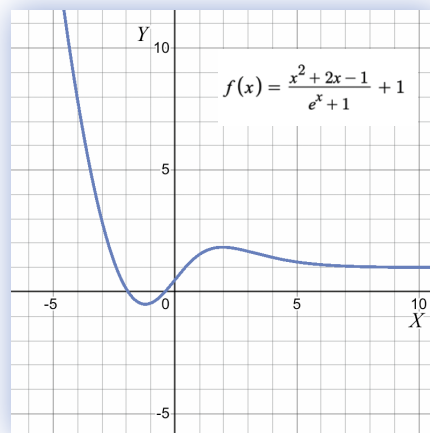
¿QUÉ ES UNA FUNCIÓN?

Para ello, imagina que estás delante de una máquina que dispensa *snacks* y bebidas. Siempre que presiones la misma tecla, obtendrás el mismo producto, ¿verdad?

Pues una función es lo mismo. Se trata de una relación entre un conjunto de entradas, que llamaremos dominio de la función, y un conjunto de salidas, que será la imagen de la función. En términos más sencillos, una función toma un valor como entrada y produce un valor correspondiente de salida. Cada entrada se relaciona con una única salida de acuerdo con las instrucciones definidas por la expresión algebraica que define la función, pudiendo elaborar lo que llamaremos tabla de valores de la función.



No es función



Es función

En el caso del corazón, hay valores de x que tienen 2 valores de y , por tanto, no es función. Solo puede haber un único valor de y para cada x , como se observa en la gráfica de la derecha.

El dominio de una función es algo que vas a hacer en todos tus ejercicios de funciones. Empecemos por el concepto.

¿QUÉ ES EL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN?

Para ello recurrimos a un símil. Imagina que eres el director de un parque de atracciones y tienes una montaña rusa emocionante. Ahora, no todos pueden subir a esa montaña rusa, ¿verdad? Los niños pequeños no, ¡sería peligroso!

Entonces, aquí viene el truco: el "dominio" es como la lista de alturas permitidas para subir a la montaña rusa. Si alguien de la fila tiene una altura permitida, puede subir y disfrutar del paseo lleno de emociones, pero, si alguien no está en la lista, ¡mejor que se quede en tierra firme!

En términos matemáticos, el dominio de una función es igual. Es la lista de todos los números que pueden "subir" a la función para obtener respuestas sensatas y permitidas.

Es decir, son los valores que le podemos dar a la variable x para obtener un único valor de la variable y .

Ahora que ya sabemos lo que es el dominio, llega el momento de centrarnos en cómo calcularlo, ya que no todas las funciones tienen como dominio todos los números reales. Para dar la solución del dominio de una función es muy común hacer uso de intervalos. En caso de que necesites un repaso de cómo expresar intervalos escanea el código QR, te mandará a un vídeo con una explicación sobre el tema.

El primer tipo de funciones a la que vamos a calcular el **dominio** es a las **funciones polinómicas**. Se trata quizás de las funciones más sencillas y cuya ecuación general es:

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + d$$

El dominio de este tipo de funciones SIEMPRE es $\mathbb{R}$, es decir, podemos darle el valor que nos dé la gana, su dominio será siempre todos los números reales.

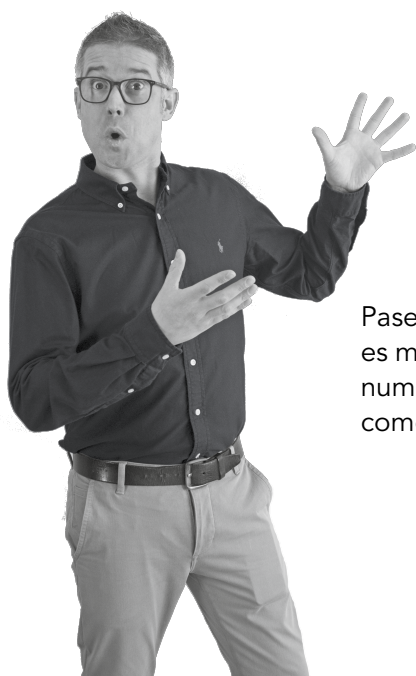
Ejemplo:

$$f(x) = 3x^3 + x^2 - 2$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

Pasemos ahora al dominio de **funciones racionales**. Identificar una función racional es muy sencillo, ya que se trata de una fracción en la que encontramos, tanto en el numerador como en el denominador, expresiones algebraicas con la variable x como protagonista. Su expresión general sería la siguiente:

$$f(x) = \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{cx^n + dx^{n-1} + \dots}$$



Cabe destacar que tanto en numerador como denominador podemos encontrar funciones irracionales, exponenciales, trigonométricas, etc. De momento, nos centraremos en el caso más sencillo, que sería tener polinomios tanto en el numerador como en el denominador. En cuanto tengamos los conocimientos del resto de funciones, iremos subiendo la dificultad de los ejercicios a realizar.

En cualquiera de los casos, en una función racional a la hora de calcular su dominio nos vamos a centrar en los valores de x que hacen que el denominador tome el valor 0, en caso de que los haya. Es decir, a la hora de calcular el dominio de una función racional, igualamos el denominador a 0 y resolvemos la ecuación.

Recordemos:

$$\frac{0}{k} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{k}{0} = \nexists$$

Sea k cualquier número distinto de 0.

De esta manera, aquellos valores que hagan el denominador 0 serán los que queden excluidos del dominio de la función. Veamos un ejemplo:

$$f(x) = \frac{4x^3 - 2x^2 + 4}{x^2 - 9}$$

Lo primero que hacemos es igualar el denominador a 0 y resolver:

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \begin{cases} -3 \\ 3 \end{cases}$$

De esta manera el dominio de $f(x) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

¿QUÉ SIGNIFICA?

Que le podemos dar a la función cualquier valor a excepción del -3 y el 3. Además, esta información es muy valiosa para el cálculo de asíntotas verticales que veremos más adelante.

Para profundizar sobre el dominio de este tipo de funciones tienes el código QR del *post-it* un vídeo con más ejemplos y casos especiales en los que el dominio de este tipo de funciones se corresponde con todos los números reales.

Dominar el cálculo del dominio de una función racional, independientemente del nivel de dificultad, es muy importante de cara a la prueba de acceso a la universidad. Es muy común que un apartado sea realizar el dominio de una función racional, como veremos más adelante con ejemplos reales de pruebas de acceso.





Pasemos ahora a calcular el dominio de **funciones irracionales**. Se trata de un procedimiento sencillo en el que tenemos que recordar únicamente que el dominio de una raíz de índice impar siempre será todos los números reales $\mathbb{R}$, ya que en este caso sí que existen las raíces impares de números negativos. Por el contrario, en las raíces de índice par, su dominio será única y exclusivamente cuando el valor del radicando (lo que va dentro de la raíz) sea mayor o igual a cero. De este modo, es importante que dominemos los conceptos de las inecuaciones, ya que, gracias a ellas, seremos capaces de dar solución al dominio que se nos plantea. En caso de que necesites un repaso de inecuaciones, tienes el código QR de un vídeo con un repaso sobre la materia.

Veamos un ejemplo de dominio de función irracional:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

Nos centramos en el radicando y calculamos para qué valores de x es mayor o igual a 0:

$$x^2 - 1 \geq 0$$

$$x^2 \geq 1$$

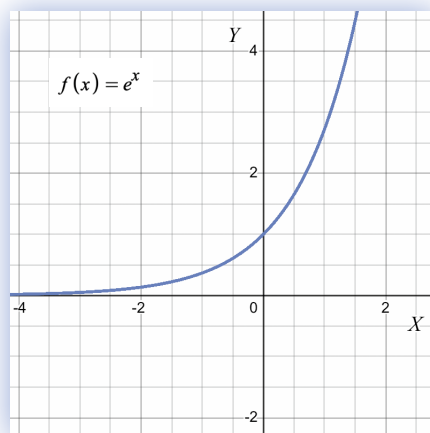
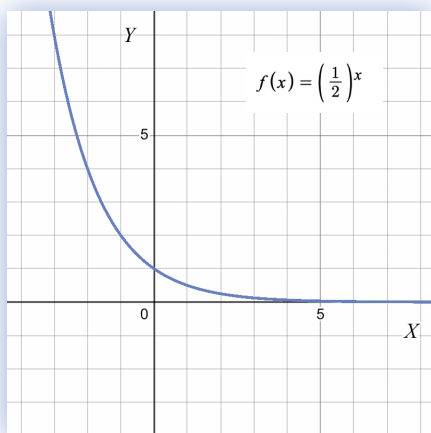
$$\text{Solución: } (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

De esta manera el dominio de $f(x) \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

En esta ocasión, al tratarse de una función irracional, los valores umbral del intervalo estarían contenidos, pero, si por un casual tenemos una función racional en la que el denominador es una raíz, recordemos que el valor del denominador debe ser distinto de cero, por lo que, en vez de poner el resultado con corchetes, deberíamos notarlo con paréntesis, indicando que esos valores no se tienen en cuenta y están fuera del dominio. En el *post-it* tienes un vídeo con un ejemplo como el que te indico, ¡no dejes de verlo!



Abordemos ahora el dominio de **funciones exponenciales**. Su dominio es muy sencillo y fácil de recordar, ya que, al igual que las funciones polinómicas, siempre será todos los números reales $\mathbb{R}$. Se trata de una función continua cuyo aspecto es como el que se muestra en la figura:



Para cualquier función exponencial, su dominio siempre será:

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

Ha llegado el momento de las **funciones logarítmicas**. Su procedimiento es similar al caso de las funciones irracionales, en el que el valor del radicando no puede ser menor a cero en las raíces de índice par. En esta ocasión, si nos remontamos a la definición de logaritmo, nos encontraremos lo siguiente:

$$\log_n(0) = \nexists$$

Es decir, el logaritmo de 0 no existe para cualquier valor de la base del logaritmo, incluido el logaritmo neperiano.

Por tanto, el dominio de una función logarítmica estará definido únicamente para los valores mayores que 0, sin incluir el cero. Veamos un ejemplo:

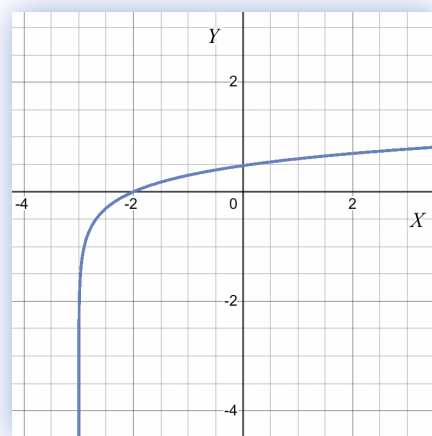
$$f(x) = \log(x + 3)$$

Según lo que hemos visto, su dominio serán los valores de x que hagan que el interior del logaritmo sea mayor que 0.

$$x + 3 > 0$$

$$x > -3$$

El dominio de $f(x) = \mathbb{R} \in (-3, +\infty)$.



Al igual que las funciones irracionales, dominar las inecuaciones es algo fundamental en este tipo de dominios. Para profundizar más en el tema, tienes en el código QR un ejemplo de una función más complicada para así ir afrontando ejercicios de mayor dificultad. Quiero que veas que se hacen todos igual siguiendo siempre los mismos pasos.



Avancemos hasta el dominio de las **funciones trigonométricas**. El dominio de la función seno y coseno es muy sencillo de recordar, será siempre para ambas todos los números reales $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \text{sen}(x) \rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

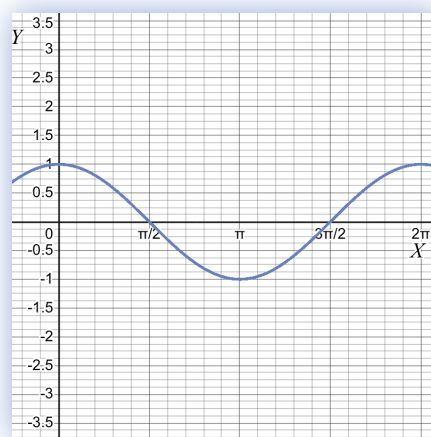
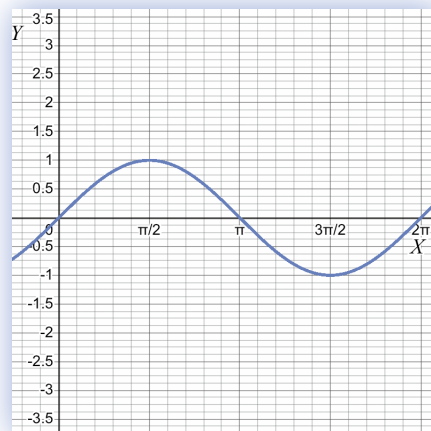
$$f(x) = \text{cos}(x) \rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

Para entender el dominio del resto de funciones trigonométricas es necesario que pensemos en la gráfica del seno y del coseno, y comprobemos en qué puntos de su dominio la imagen de la función es 0:

$$\operatorname{sen}(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \text{ rad} \rightarrow k\pi \text{ rad} \\ x = 2\pi \text{ rad} \end{cases}$$



$$\cos(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \\ x = \frac{3\pi}{2} \text{ rad} \end{cases} \rightarrow (2k + 1) \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$



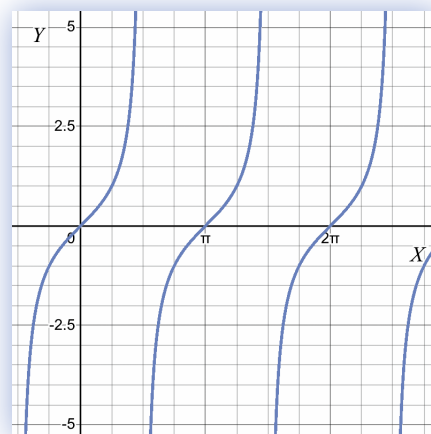
Todo ello porque:

$$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

Esto nos hace pensar en el dominio de una función racional y, por tanto, que el denominador no puede ser 0. Todo ello nos lleva a que el dominio de la función tangente sea todos los números reales a excepción de aquellos valores del denominador que lo hacen cero, es decir, donde el coseno toma el valor cero:

$$f(x) = \tan(x)$$

$$\operatorname{Dom} f(x) = \mathbb{R} - \left\{ (2k + 1) \frac{\pi}{2} \text{ rad} \right\}$$



Del mismo modo que calculamos y abordamos el dominio de la función tangente, se realiza el dominio de las funciones cotangente, secante y cosecante, tal y como os muestro a continuación:

FUNCIÓN	DOMINIO
$f(x) = \text{cosec}(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$	$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{k\pi \text{ rad}\}$
$f(x) = \text{sec}(x) = \frac{1}{\text{cos}(x)}$	$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ rad}\right\}$
$f(x) = \text{cotg}(x) = \frac{1}{\text{tan}(x)}$	$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{k\pi \text{ rad}\}$

Para terminar en este apartado de dominios, llega el momento de tratar el dominio de **funciones a trozos**. Este tipo de funciones, en lugar de seguir una única expresión en todo su dominio, adapta su comportamiento de acuerdo con las condiciones establecidas en cada intervalo. Por tanto, tendremos que tener muy en cuenta qué sucede en cada intervalo y cuáles van a ser sus límites. Cada segmento de la función se rige por su propia fórmula, lo que le permite abordar variadas situaciones y casos.

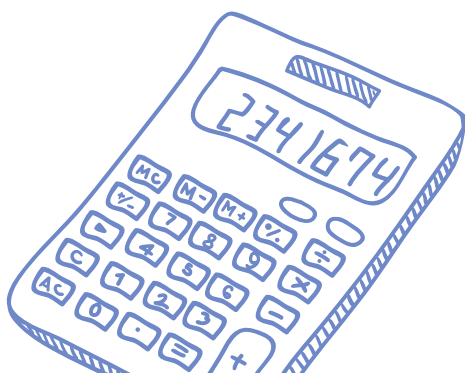
Veamos un ejemplo de función a trozos y analicemos su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 4x^2 - 2, & x < 0 \\ \frac{3x}{x^2 - 1}, & x \geq 0 \end{cases}$$



Se trata de una función a trozos porque tenemos dos funciones:

$$\begin{aligned} & x^3 + 4x^2 - 2 \text{ para valores de } x \text{ menores que } 0 \\ & \frac{3x}{x^2 - 1} \text{ para valores de } x \text{ mayores o iguales que } 0 \end{aligned}$$



Calcular el dominio de una función a trozos es tan sencillo como analizar el dominio de las funciones que la componen por separado y comprobar, en caso de que lo hubiese, si hay algún punto de ausencia de dominio en nuestro intervalo en cuestión. Hagámoslo:

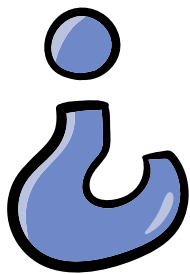
- El dominio de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2$, que se corresponde con nuestra primera función, es igual a todos los números reales $\mathbb{R}$. Esto nos permite de momento despreocuparnos de esta parte de la función.
- El dominio de $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$, al tratarse de una función racional, tendremos que igualar el denominador a 0 y resolver la ecuación resultante. El dominio de esta función es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. ¡Mucho cuidado! Esta función está definida para valores mayores o iguales que cero, por tanto, la solución de $x = -1$ no nos compete en el intervalo y únicamente tendríamos que tener en cuenta la solución de $x = 1$.

Analizados ambos dominios, podemos afirmar que el dominio de nuestra función a trozos es:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 4x^2 - 2, & x < 0 \\ \frac{3x}{x^2 - 1}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Ahora que ya sabes la teoría para calcular el dominio de una función a trozos, es el momento de hacer el dominio de funciones a trozos un poco más complejas. Para ello, tienes en el código QR un vídeo con ejemplos más complicados. Si quieres, al empezar el vídeo, apunta el ejemplo en tu cuaderno, hazlo y comprueba viendo el vídeo que lo has hecho bien.



Ahora que eres una persona experta calculando dominios, ha llegado el momento de ponerlo a prueba con ejercicios extraídos de pruebas de acceso a la universidad. Cuando los hagas quiero que te des cuenta de que es algo sencillo y que, si sigues los pasos que hemos visto anteriormente, serás capaz de hacerlo con total solvencia. Al lado de cada ejercicio tienes el código QR para que puedas ver cómo se resuelve.

