MP/MP*
MPI/MPI*

Lionel Vidal
Régis Bourdin
Ludovic Menguy
Vincent Parmentier
Emmanuel Van Brackel
Marc Venturi
Sylvie Zanier

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

PHYSIQUE

4e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Résolutions de problèmes, activités numériques
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

ellipses

PRÉPAS SCIENCES

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Physique MP/MP* MPI/MPI*

4e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES

ouvrage coordonné par

Lionel VIDAL

Professeur au lycée Vaucanson (Grenoble)

Régis BOURDIN

Professeur au lycée Sainte-Marie (Caen)

Ludovic MENGUY

Professeur au lycée Montesquieu (Le Mans)

Vincent PARMENTIER

Professeur au lycée Pothier (Orléans)

Emmanuel VAN BRACKEL

Professeur au lycée Livet (Nantes)

Marc VENTURI

Professeur au lycée Kléber (Strasbourg)

Sylvie ZANIER

Enseignante à l'université J. Fourier (Grenoble)

ellipses

COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

Les notices culturelles « un scientifique » et « un peu d'histoire »
des pages de titre des chapitres ont été rédigées par Bertrand Hauchecorne.

ISBN 9782340-066823
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en physique-chimie comme en mathématiques ou sciences industrielles.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthodes » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » permet de tester votre recul par rapport au programme et de vous révéler les mauvais réflexes à rectifier. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi l'ouvrage de physique comme ceux de chimie, de maths et de SII vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

1. Référentiels non galiléens 1
2. Lois du frottement solide 33
3. Champ électrostatique 61
4. Potentiel et dipôle électrostatique 87
5. Magnétostatique 137
6. Équations de Maxwell 179
7. Équations de Maxwell dans le cadre de l'ARQS 209
8. Ondes électromagnétiques dans le vide 235
9. Propagation dans les conducteurs et les plasmas 277
10. Réflexion d'OPPM à la surface d'un conducteur 317
11. Propagation guidée 347
12. Rayonnement dipolaire et diffusion 383
13. Généralités sur les ondes et interférences lumineuses 417
14. Dispositifs interférentiels 457
15. Thermodynamique des systèmes ouverts (MP) 519
16. Transferts thermiques 553
17. Mécanique quantique ondulatoire 613
18. Particule dans un potentiel constant 653
19. Éléments de thermodynamique statistique (MP) 701
20. Signaux périodiques et filtrage 737
21. Électronique numérique 765

Annexes 813

1. Formulaire d'analyse vectorielle 814
2. Éléments d'analyse spectrale 818
3. Le minimum de savoir-faire en mathématiques 824
4. Constantes fondamentales et ordres de grandeur classiques 830
5. Calculs d'incertitudes 832

Index 839

Chapitre 1

Référentiels non galiléens

UN SCIENTIFIQUE



Gaspard Coriolis (1792-1843) intègre en 1808 l'École polytechnique puis entre dans le corps des Ponts et Chaussées. Devenu ingénieur, il se lasse rapidement et revient à Paris pour satisfaire son goût pour la recherche scientifique. Ses travaux sont souvent en lien avec des applications à l'industrie ou au génie civil et concernent la cinématique, les notions d'énergie mécanique. Sa célébrité lui vient de son explication de la déviation dite de Coriolis qu'il explique en 1835.

Un peu d'histoire

Christian Huygens se penche sur l'étude des mouvements ce qui l'amène à introduire la notion d'énergie cinétique. En 1698, Pierre Varignon introduit les notions de « vitesse à chaque instant » et d'accélération et explique que la seconde se déduit de la première par dérivation. Il ouvre la voie à Euler et d'Alembert qui publient les premiers traités de mécanique, respectivement en 1736 et 1743. On y trouve les notions de force centrifuge et de moment d'inertie.

Motivés tous deux par l'astronomie, Lagrange et Laplace publient des ouvrages de référence en mécanique. Pourtant, ils n'expliquent pas une propriété remarquée par les navigateurs qui avaient constaté que les courants dominants ne tournaient pas dans le même sens dans chacun des hémisphères. Ce phénomène est expliqué par Gaspard Coriolis dans *Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps*.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- Les différents types de mouvement d'un référentiel par rapport à un autre
- Le vecteur rotation
- Les lois de composition des vitesses et des accélérations
- Les notions de vitesse et d'accélération d'entraînement et de point coïncident
- Les expressions des vitesses et accélération d'entraînement dans les deux cas particuliers
- La définition de l'accélération de Coriolis
- Les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis
- Les référentiels d'utilisation courante
- Quelques effets du caractère non galiléen du référentiel terrestre

Ce qu'il faut savoir faire

- Identifier le mouvement d'un référentiel par rapport à un autre
- Calculer une vitesse et une accélération avec les lois de composition
- Déterminer par une analyse des ordres de grandeurs si un référentiel est galiléen ou pas
- Mener une étude statique ou dynamique en référentiel non galiléen

■■ Résumé de cours

■ Cinématique du changement de référentiel

❑ Position du problème

Dans tout ce qui suit, (R) rapporté à $(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z})$ est un référentiel absolu et (R') rapporté à $(O',\vec{e_{x'}},\vec{e_{y'}},\vec{e_{z'}})$ est un référentiel relatif en mouvement dans (R). On note $\vec{\Omega}_{R'/R}$ le vecteur rotation instantanée de (R') par rapport à (R). On peut associer à un référentiel un solide indéformable dit **solide de référence**. Etudier le mouvement du référentiel (R') par rapport à (R) revient alors à étudier le mouvement du solide attaché à (R') dans la base attachée à (R).

■ Distribution des vitesses d'un solide de référence

❑ Relation de Varignon

Soient *A* et *M* deux points d'un même solide de référence *S*. Leur vitesse est liée par la **relation de Varignon** $\boxed{\vec{V_M} = \vec{V_A} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}}$ où $\vec{\omega}(t)$ est le vecteur rotation instantanée du solide que nous noterons plus simplement $\vec{\omega}$.

❑ Mouvement instantané le plus général d'un solide

On appelle axe instantané de viration ou axe central du torseur cinématique (dit encore axe de vissage du solide) l'axe Δ parallèle à $\vec{\omega}(t)$. En tout point de cet axe, la vitesse est colinéaire à $\vec{\omega}(t)$. De plus, l'axe Δ est le lieu des points de vitesses minimales du solide.

Soit *O* un point du solide *S* appartenant à Δ et *M* un point quelconque de *S*, la relation de Varignon entre *O* et *M* donne : $\boxed{\vec{V_M} = \vec{V_O} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{V_{\|}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}}$.

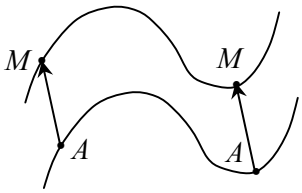
→ Le terme $\vec{V_{\|}}$, colinéaire à Δ, est appelé vitesse de glissement le long de Δ. $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ est un terme de rotation autour de Δ à la vitesse angulaire instantanée ω.

⇨ **Méthode 1.2. Comment caractériser le mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe ?**

→ Le mouvement instantané le plus général d'un solide est un mouvement hélicoïdal, combinaison d'une translation le long de Δ et d'une rotation autour de Δ.

❑ Mouvement de translation

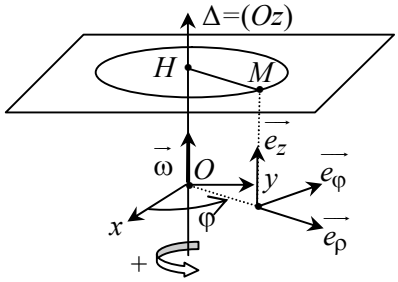
Un solide *S* est en translation dans le référentiel (R) si pour tout point *A* et *M* appartenant à *S*, on a : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{cte}$. Attention il ne s'agit pas ici de translation rectiligne mais curviligne (translation elliptique, circulaire ou suivant une courbe quelconque).



Dans ce cas, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{AM}}{\mathrm{d}t}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{V_M}=\overrightarrow{V_A}, \quad \forall (A,M)\in S$. Tous les points de S ont même vitesse et même accélération. Par comparaison avec la relation de Varignon, on a : $\boxed{\vec{\omega}(t)=\vec{0}}$.

❑ Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Un solide S est en rotation autour d'un axe Δ fixe passant par une origine O fixe d'un référentiel (R), lorsque tout point M de S décrit un mouvement circulaire de rayon HM dans un plan perpendiculaire à Δ, où H est le projeté orthogonal de M sur Δ. En adoptant le système de coordonnées cylindriques d'axe (Oz) qui est le trièdre adapté aux symétries du problème, la vitesse du point M est : $\boxed{\overrightarrow{V_M}=\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}}$ où $\boxed{\vec{\omega}=\omega\,\vec{e_z}=\dot{\varphi}\,\vec{e_z}}$ est orienté suivant à l'aide de la **règle du tire bouchon**.



⇨ **Méthode 1.2. Comment caractériser le mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe ?**

❑ Point coïncident

Soit un point matériel M mobile rapport à (R'). On appelle **point coïncident** avec M dans (R') à l'instant t le **point *P* fixe** de (R'), coïncident avec M à l'instant t. L'ensemble des points P successivement occupé par M est la trajectoire de M dans (R').

■ Changement de référentiel pour les vitesses et les accélérations

❑ Dérivation dans un trièdre mobile

Soit $\overrightarrow{K}=K_{x'}\,\overrightarrow{e_{x'}}+K_{y'}\,\overrightarrow{e_{y'}}+K_{z'}\,\overrightarrow{e_{z'}}$ un vecteur exprimé dans (R'), les dérivées temporelles dans (R) et (R') sont liées par $\boxed{\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{K}}{\mathrm{d}t}\right|_R=\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{K}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}+\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{K}}$.

⇨ **Méthode 1.1. Comment dériver un vecteur dans un trièdre mobile ?**

❑ Composition des vitesses de rotation

Soient A et B deux points d'un même solide de référence $S2$ en rotation par rapport à $S0$ et $S1$ avec les vecteurs rotations instantanées respectives $\overrightarrow{\omega_{2/0}}$ et $\overrightarrow{\omega_{2/1}}$. On associe à chacun de ces solides les référentiels (R_0), (R_1) et (R_2). On a $\boxed{\overrightarrow{\omega_{2/1}}=\overrightarrow{\omega_{2/0}}+\overrightarrow{\omega_{0/1}}}$.

❑ Composition des vitesses

Soit un point matériel M repéré à l'instant t par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans (R) et par $\overrightarrow{O'M}$ dans (R').

On définit :

→ sa **vitesse absolue** comme sa vitesse par rapport à (R) : $\overrightarrow{V_a}(M)=\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_R$

→ sa **vitesse relative** comme sa vitesse par rapport à (R') : $\overrightarrow{V_r}(M)=\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}$

→ sa **vitesse d'entraînement** de M comme la vitesse du point coïncidant P (fixe dans (R') et coïncidant à l'instant t avec M) : $\overrightarrow{V_e}(M)=\overrightarrow{V_{/R}}(O')+\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{O'M}$.

On a alors $\boxed{\overrightarrow{V_a}(M)=\overrightarrow{V_r}(M)+\overrightarrow{V_e}(M)}$.

❑ Composition des accélérations

Soit un point matériel M repéré à l'instant t par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans (R) et par $\overrightarrow{O'M}$ dans (R').
On définit :

→ son **accélération absolue** par rapport à (R) : $\overrightarrow{a_a}(M)=\left.\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right|_R=\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_a}}{\mathrm{d}t}\right|_R$

→ son **accélération relative** par rapport à (R') : $\overrightarrow{a_r}(M)=\left.\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{R'}=\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_r}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}$

→ son **accélération d'entraînement** qui est celle du point coïncidant P (fixe dans (R') et coïncidant à l'instant t avec M) :

$$\overrightarrow{a_e}(M)=\left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}t^2}\right|_R=\overrightarrow{a_a}(P)=\overrightarrow{a_a}(O')+\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}}{\mathrm{d}t}\right|_R\wedge\overrightarrow{O'P}+\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}\wedge\left(\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{O'P}\right)$$

→ son **accélération de Coriolis** : $\overrightarrow{a_c}(M)=2\,\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{V_r}(M)$.

On a alors $\boxed{\overrightarrow{a_a}(M)=\overrightarrow{a_r}(M)+\overrightarrow{a_e}(M)+\overrightarrow{a_c}(M)}$.

⇨ **Méthode 1.3. Comment utiliser les lois de composition ?**

❑ Cas où (R') est en translation et où (R') en rotation uniforme autour d'un axe fixe

Cas de la translation

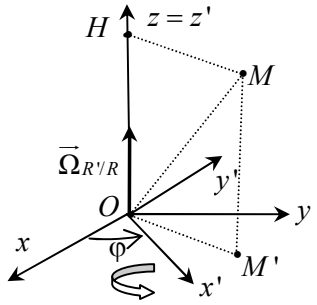
Dans ce cas, les axes du référentiel (R') gardent une direction fixe par rapport à ceux de (R) de sorte que $\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}=\vec{0}$. Ainsi, la vitesse d'entraînement et l'accélération d'entraînement ont une expression particulièrement simple $\boxed{\overrightarrow{V_e}(M)=\overrightarrow{V_{/R}}(O')}$ et $\boxed{\overrightarrow{a_e}(M)=\overrightarrow{a_a}(O')=\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_e}(M)}{\mathrm{d}t}\right|_R}$.

L'accélération de Coriolis est nulle puisque $\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}=\vec{0}$.

Remarque

Notons que c'est seulement dans ce cas que l'accélération d'entraînement s'identifie avec la dérivée de la vitesse d'entraînement.

Cas de la rotation uniforme autour d'un axe fixe dans (R)



Considérons un référentiel (R') rapporté à $(O',\vec{e_{x'}},\vec{e_{y'}},\vec{e_{z'}})$ en rotation autour de l'axe (Oz) du référentiel (R) rapporté à $(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z})$ avec $O = O'$ et $(Oz) = (Oz')$.

Cette rotation est repérée par l'angle $\varphi(t) = \left(\vec{e_x},\vec{e_{x'}}\right)$ et le vecteur rotation de (R') par rapport à (R) s'écrit $\vec{\Omega}_{R'/R} = \dot{\varphi}\,\vec{e_z}$. Lorsque la rotation est uniforme : $\vec{\Omega}_{R'/R} = cte\,\vec{e_z}$.

En désignant par H le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation (Oz) on a :

$$\boxed{\vec{V_e}(M) = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{HM}} \text{ et } \boxed{\vec{a_e}(M) = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \left(\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'P}\right) = -\Omega^2{}_{R'/R}\ \overrightarrow{HM}}.$$

⇨ **Méthodes 1.2. Comment caractériser le mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe ?**

Remarque

On parle dans ce cas, pour l'accélération d'entraînement, d'accélération centripète puisqu'elle pointe vers le centre H de rotation du point M. Dans le cas contraire elle est dite centrifuge car elle pointe de H vers M : elle « fuit » le centre de rotation.

■ Dynamique en référentiel non galiléen

❑ Théorème de la résultante cinétique

Le PFD (ou le TRC pour un solide) reste valable dans un référentiel (R') non galiléen à condition d'adjoindre à la résultantes des actions extérieurs $\overrightarrow{R_{ext}}$ les forces d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{f_{ie}}$ et de Coriolis $\overrightarrow{f_{ic}}$ s'exerçant sur le système du fait du caractère non galiléen du référentiel :

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'} = \overrightarrow{R_{ext}} + \overrightarrow{f_{ie}} + \overrightarrow{f_{ic}}}.$$

Les termes $\overrightarrow{f_{ie}} = -m\overrightarrow{a_e}$ et $\overrightarrow{f_{ic}} = -m\overrightarrow{a_c}$ sont les **termes inertiels**, où $\overrightarrow{a_e}$ et $\overrightarrow{a_c}$ désignent respectivement les accélérations d'entraînement et de Coriolis du système de masse m.

Lorsque ces termes sont négligeables devant $\overrightarrow{R_{ext}}$ (R') peut être considéré comme une bonne réalisation d'un référentiel galiléen.

⇨ **Méthode 1.4. Comment appliquer les lois de la dynamique en référentiel non galiléen ?**

❑ TMC par rapport à un point A fixe dans un référentiel non galiléen

Comme pour le TRC, il reste valable dans un référentiel (R') non galiléen à condition d'adjoindre au moment résultant en A des actions extérieurs $\overrightarrow{M}_{A_{ext}}$ les moments en ce même

point des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis s'exerçant sur le système du fait du caractère non galiléen du référentiel.
Il en va de même pour le TMC en projection suivant un axe de rotation, le point *A* étant généralement choisi sur l'axe.

❑ Théorèmes énergétiques dans un référentiel non galiléen

Théorème de l'énergie cinétique
Si on applique le TEC dans un **référentiel non galiléen**, il faut tenir compte, en plus de travail des actions extérieures, du travail des forces d'inertie d'entraînement. La force de Coriolis qui est toujours perpendiculaire au déplacement ne travaille pas :

$\boxed{\mathrm{d}E_{c_{R'}} = \delta W_{ext} + \delta W\left(\overrightarrow{f_{ie}}\right)}$, soit $\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}\right|_{R'} = P_{ext} + P\left(\overrightarrow{f_{ie}}\right)}$ qui constitue le théorème de la puissance cinétique.

Énergie potentielle centrifuge et théorème de l'énergie mécanique
Dans le cas d'une rotation uniforme à la vitesse angulaire ω, la force d'inertie d'entraînement (centrifuge) dérive d'une énergie potentielle : $\boxed{E_{p\,cf} = -\frac{1}{2} m\,\omega^2 HM^2}$ où *H* est le projeté de *M* sur l'axe.
On doit l'inclure dans l'énergie potentielle totale dans l'utilisation du théorème de l'énergie mécanique.

■ Caractère galiléen approché de quelques référentiels

Le caractère approximativement galiléen d'un référentiel (R') en mouvement par rapport à un autre référentiel (R) considéré comme galiléen est contrôlable expérimentalement : le principe d'inertie doit y être vérifié avec la meilleure approximation possible. Si compte tenu des échelles spatio-temporelles mises en jeu lors qu'un processus physique, l'écart au principe d'inertie n'est pas détectable, le référentiel en question est une très bonne approximation d'un référentiel galiléen. Dans le cas contraire, les termes inertiels ne sont plus négligeables devant les autres termes dans le PFD et le caractère non galiléen ne peut être négligé.

❑ Référentiel de Copernic

Il a pour centre le centre de masse du système solaire et ses axes pointes vers trois étoiles fixes. Il s'agit de la meilleure approximation d'un référentiel galiléen. On ne l'utilise que pour les mouvements d'objets à l'échelle du système solaire (planètes, comètes...).

❑ Référentiel géocentrique

Son centre est au centre de la Terre et ses axes sont dirigés vers trois étoiles fixes. Il est une bonne approximation de référentiel galiléen pour l'étude de mouvements au voisinage de la Terre (satellites...), sur une échelle de temps de quelques heures ou jours.

❑ Référentiel terrestre et référentiel du laboratoire

Référentiels liés à la Terre et utilisables en pratique à notre échelle. Leur caractère galiléen est suffisamment précis pour des expériences brèves (jusqu'à quelques minutes) sur de faibles échelles de longueurs.

■ Quelques manifestations du caractère non galiléen du référentiel terrestre

❑ Variation du champ de pesanteur entre pôle et équateur

Le poids $\vec{P}$ est constitué de l'attraction gravitationnelle (de la Terre en négligeant les termes de marée liés aux autres astres proches) et de la force d'inertie d'entraînement due au mouvement de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles. En posant $\vec{P}(M) = m\vec{g}(M)$ où m est la masse, on défini le champ de pesanteur $\vec{g}$ en un point M par $\boxed{\vec{g}(M) \approx -G\frac{M_{Terre}}{R_{Terre}^2}\vec{e_r} + \omega^2\,\overrightarrow{HM}}$ où H est le projeté de M sur l'axe des pôles et $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ (SI) est la constante de gravitation.
Le premier terme (prépondérant) est le **champ de gravitation** exercé par la Terre.
Le second provient de la **force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la Terre** autour de son axe, il varie en fonction de la latitude induisant d'une part un écart local à la verticalité et d'autre part une variation de la norme de $\vec{g}$ de l'ordre de 0,2 % entre pôle et équateur.

❑ Effets de la force de Coriolis

Contrairement au poids, la force de Coriolis due à la rotation de la Terre est dynamique et agit sur les systèmes en mouvement. Elle n'est pas incluse dans la définition du poids. Parmi ses effets observables citons l'expérience du pendule de Foucault (se reporter à l'exercice 1.8) ou la déviation vers l'est. Cette dernière a une importance particulière puisqu'elle est responsable, à l'échelle de la Terre, des mouvements des masses d'air entre pôles et équateur créant les alizés, de la formation des dépressions, des cyclones et anticyclones...

⇨ **Méthode 1.5. Quelles conséquences du caractère non galiléen du référentiel terrestre ?**

■ Description cinématique d'un solide

❑ Méthode 1.1. Comment dériver un vecteur dans un trièdre mobile ?

Dans de nombreux problèmes de cinématique il est fréquent d'avoir à exprimer la dérivée temporelle d'une grandeur vectorielle $\vec{K}$ dans un référentiel absolu (R) notée $\left.\frac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t}\right|_R$, en fonction de celle dans un référentiel relatif (R') notée $\left.\frac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}$, (R') étant en rotation par rapport à (R) caractérisée par un vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}_{R'/R}$. Le lien entre ces deux dérivées est fait par la formule de dérivation vectorielle dans un trièdre $\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t}\right|_R = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{K}}$ (relation que nous noterons D2 dans les exercices). Cette expression traduit le fait que le vecteur $\vec{K}$, suivant la base dans laquelle il est explicité, ne se dérive pas de la même façon. En effet, s'il est explicité dans (R), sa dérivée temporelle ne fait pas intervenir celles des vecteurs unitaires de la base attachée à (R). Au contraire si $\vec{e}'$ désigne l'un des vecteurs unitaires du trièdre attaché à (R'), on a : $\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\vec{e}'}{\mathrm{d}t}\right|_R = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{e}'}$ (relation que nous noterons D1 dans les exercices) et la dérivée de $\vec{K}$ explicité dans (R') doit en tenir compte. Cette dernière relation D1 s'applique de façon générale à tout bipoint rigidement liée au solide de référence attaché à (R').

⇨ Exercices 1.1 à 1.3

Soit un référentiel absolu (R) rapporté à $(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z})$ et un référentiel relatif (R') rapporté à $(O',\vec{e_{x'}},\vec{e_{y'}},\vec{e_{z'}})$, en mouvement dans (R). On note $\vec{\Omega}_{R'/R}$ le vecteur rotation instantanée de (R') par rapport à (R). Soit $\vec{K} = K_{x'}\,\vec{e_{x'}} + K_{y'}\,\vec{e_{y'}} + K_{z'}\,\vec{e_{z'}}$ un vecteur exprimé dans (R'). Les vecteurs unitaires $(\vec{e_{x'}},\vec{e_{y'}},\vec{e_{z'}})$ étant fixes dans (R'), la dérivation temporelle y est évidente : $\left.\frac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'} = \left.\frac{\mathrm{d}K_{x'}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'} \vec{e_{x'}} + \left.\frac{\mathrm{d}K_{y'}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'} \vec{e_{y'}} + \left.\frac{\mathrm{d}K_{z'}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'} \vec{e_{z'}}$.

Ces mêmes vecteurs ne sont pas constants dans (R), ainsi la dérivation dans (R) doit tenir compte de leur évolution, ce qui entraîne l'égalité suivante :

$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t}\right|_R = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'} + K_{x'}\left.\frac{\mathrm{d}\vec{e_{x'}}}{\mathrm{d}t}\right|_R + K_{y'}\left.\frac{\mathrm{d}\vec{e_{y'}}}{\mathrm{d}t}\right|_R + K_{z'}\left.\frac{\mathrm{d}\vec{e_{z'}}}{\mathrm{d}t}\right|_R$. Comme on le constate, la dérivée temporelle de ce vecteur dans (R) fait intervenir celle des vecteurs de base de (R'). Évaluons $\left.\frac{\mathrm{d}\vec{e_{x'}}}{\mathrm{d}t}\right|_R$, notons pour cela $\vec{e_{x'}} = \overrightarrow{O'I'}$ où O' et I' sont deux points du même solide attaché au référentiel (R'). D' après la relation de Varignon : $\vec{V_{I'}} = \vec{V_{O'}} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'I'}$ d'où : $\vec{V_{I'}} - \vec{V_{O'}} = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{e_{x'}} = \left.\frac{\mathrm{d}(\overrightarrow{OI'} - \overrightarrow{OO'})}{\mathrm{d}t}\right|_R = \left.\frac{\mathrm{d}(\overrightarrow{O'I'})}{\mathrm{d}t}\right|_R = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{e_{x'}}}{\mathrm{d}t}\right|_R$.

On obtient de même : $\left.\frac{\mathrm{d}\vec{e_{y'}}}{\mathrm{d}t}\right|_R = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{e_{y'}}$ et $\left.\frac{\mathrm{d}\vec{e_{z'}}}{\mathrm{d}t}\right|_R = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{e_{z'}}$. Ainsi, de façon plus générale, si $\vec{U}$ désigne un vecteur du solide attaché à (R'), on a : $\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}t}\right|_R = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{U}}$ (relation D1). On peut à présent dériver $\vec{K} = K_{x'}\vec{e_{x'}} + K_{y'}\vec{e_{y'}} + K_{z'}\vec{e_{z'}}$ dans (R) :

$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t}\right|_R = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \left(K_{x'}\vec{e_{x'}} + K_{y'}\vec{e_{y'}} + K_{z'}\vec{e_{z'}}\right)$ d'où finalement la formule de dérivation : $\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t}\right|_R = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{K}}$ (relation D2).

Appliquons les résultats précédents à la composition des vecteurs rotation : soient *A* et *B* deux points d'un même solide de référence *S*2 en rotation par rapport à deux solides *S*0 et *S*1 avec les vecteurs rotation instantanée respectif $\overrightarrow{\omega_{2/0}}$ et $\overrightarrow{\omega_{2/1}}$. On associe à chacun de ces solides les référentiels (R_0), (R_1) et (R_2). D'après la relation D1, on a :

$\left.\frac{\mathrm{d}(\overrightarrow{AB})}{\mathrm{d}t}\right|_{R_0} = \overrightarrow{\omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{AB}$ et $\left.\frac{\mathrm{d}(\overrightarrow{AB})}{\mathrm{d}t}\right|_{R_1} = \overrightarrow{\omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{AB}$. D'autre part, d'après la relation D2, on a : $\left.\frac{\mathrm{d}(\overrightarrow{AB})}{\mathrm{d}t}\right|_{R_1} = \left.\frac{\mathrm{d}(\overrightarrow{AB})}{\mathrm{d}t}\right|_{R_0} + \overrightarrow{\omega_{0/1}} \wedge \overrightarrow{AB}$.

Ainsi $\forall \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\omega_{0/1}} \wedge \overrightarrow{AB}$ et donc : $\boxed{\overrightarrow{\omega_{2/1}} = \overrightarrow{\omega_{2/0}} + \overrightarrow{\omega_{0/1}}}$ qui rend compte de la composition des vecteurs rotations.

❑ Méthode 1.2. Comment caractériser le mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe ?

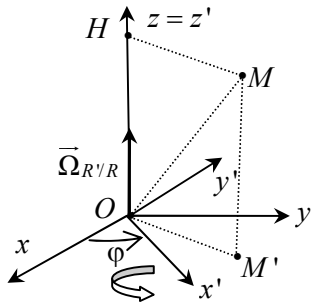
En mécanique, il est fréquent que l'on « attache » un solide au référentiel relatif (R'), on parle alors de solide de référence. On peut imaginer un cube donc trois des arrêtes coïncident avec les trois directions formant une base de (R'). L'étude du mouvement dans (R) en terme de vitesse et d'accélération se fait alors en utilisant les relations du cours :

$$\overrightarrow{V_a}(M)=\overrightarrow{V_r}(M)+\overrightarrow{V_e}(M) \text{ et } \overrightarrow{a_a}(M)=\overrightarrow{a_r}(M)+\overrightarrow{a_e}(M)+\overrightarrow{a_c}(M)$$

dans lesquelles un certains nombre de termes sont nuls lorsque le point *M* est en rotation pure et uniforme autour d'un axe fixe dans le référentiel d'étude.

⇨ Exercice 1.3

Considérons un solide de référence attaché à (R') rapporté à $(O',\overrightarrow{e_{x'}},\overrightarrow{e_{y'}},\overrightarrow{e_{z'}})$ en rotation autour de l'axe (Oz) du référentiel (R) rapporté à $(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$ avec $O = O'$ et $(Oz) = (Oz')$. Cette rotation est repérée par l'angle $\varphi(t)=\left(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_{x'}}\right)$ et le vecteur rotation de (R') par rapport à (R) s'écrit $\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}=\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_z}$. Lorsque la rotation est uniforme : $\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}=cte\,\overrightarrow{e_z}$. En désignant par *H* le projeté orthogonal de *M* sur l'axe de rotation (Oz) on a, avec $\overrightarrow{V_{/R}}(O')=\vec{0}$:



$$\boxed{\overrightarrow{V_e}(M)=\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{HM}}.$$

D'autre part, avec $\overrightarrow{a_a}(O')=\vec{0}$ et $\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}}{\mathrm{d}t}\right|_R\wedge\overrightarrow{OP}=0$, puisque la rotation est uniforme, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{a_e}(M)=\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}\wedge\left(\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{OP}\right)=-\Omega^2{}_{R'/R}\,\overrightarrow{HM}}.$$

On parle dans ce cas, pour l'accélération d'entraînement, d'accélération centripète puisqu'elle pointe vers *H* qui est le centre de la rotation caractérisant la trajectoire du point *M*.

Dans le cas particulier où le point *M* appartient au solide de référence (R'), c'est-à-dire lorsqu'il est fixe dans (R'), la vitesse relative est nulle (solide indéformable) de sorte que :

$$\boxed{\overrightarrow{V_a}(M)=\overrightarrow{V_M}=\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{OM}=\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{OM}}.$$

Ce résultat est conforme à celui fournit par la relation de Varignon entre les points *O* et *M* du même solide de référence dans (R') : $\overrightarrow{V_M}=\overrightarrow{V_O}+\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{V_{\|}}+\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{OM}$ et s'agissant ici d'une rotation pure $\overrightarrow{V_{\|}}=\vec{0}$.

De même les accélérations relative et de Coriolis sont nulles, ainsi, pour tout point *M* appartenant au solide en rotation uniforme, on écrit :

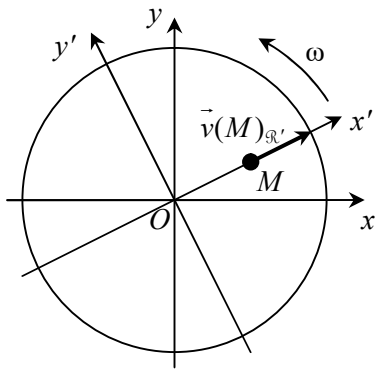
$$\boxed{\vec{a}(M)=-\dot{\varphi}^2\,\overrightarrow{HM}}.$$

❑ Méthode 1.3. Comment utiliser les lois de composition ?

– Il faut tout d'abord caractériser le mouvement du point *M* considéré dans le référentiel relatif (R') : rectiligne, circulaire ou autre. En déduire sa vitesse et son accélération dans (R').
– Analyser ensuite le mouvement de (R') par rapport au référentiel absolu (R) : translation ou rotation autour d'un axe. En déduire la vitesse et l'accélération d'entraînement du point *M*.
– Le cas échéant, calculer également l'accélération de Coriolis de *M*.
– La vitesse et l'accélération dans (R) s'obtiennent finalement en additionnant ces différents termes, selon les deux lois de composition.

⇨ **Exercices 1.1 à 1.3**

Considérons un manège tournant à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe vertical (*Oz*) du référentiel terrestre (R). On associe au manège le référentiel tournant (R') et un repère (*Ox'y'z'*).
Un enfant se déplace sur le plateau du manège, en se dirigeant du centre vers le bord selon l'axe (*Ox'*) à la vitesse constante *v*.
On cherche à déterminer sa vitesse et son accélération dans le référentiel terrestre.



$\vec{v}(M)_R = \vec{v}(M)_{R'} + \vec{v_e}(M)_{R'/R}$ avec $\vec{v}(M)_{R'} = v\vec{e_{x'}}$ et $\vec{v_e}(M)_{R'/R} = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{OM} = \omega\vec{e_{z'}} \wedge x'\vec{e_{x'}}$ $= \omega x'\vec{e_{y'}}$ donc $\vec{v}(M)_R = v\vec{e_{x'}} + \omega x'\vec{e_{y'}}$ puisque l'enfant tourne et s'éloigne de *O* en même temps.

$\vec{a}(M)_R = \vec{a}(M)_{R'} + \vec{a_e}(M)_{R'/R} + \vec{a_c}(M)_{R'/R}$ avec $\vec{a}(M)_{R'} = \vec{0}$ car le mouvement de l'enfant est rectiligne uniforme par rapport à (R'), $\vec{a_e}(M)_{R'/R} = -\omega^2\overrightarrow{OM} = -\omega^2 x'\vec{e_{x'}}$ et
$\vec{a_c}(M)_{R'/R} = 2\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}(M)_{R'} = 2\omega\vec{e_{z'}} \wedge v\vec{e_{x'}} = 2\omega v\vec{e_{y'}}$ donc $\vec{a}(M)_R = -\omega^2 x'\vec{e_{x'}} + 2\omega v\vec{e_{y'}}$.

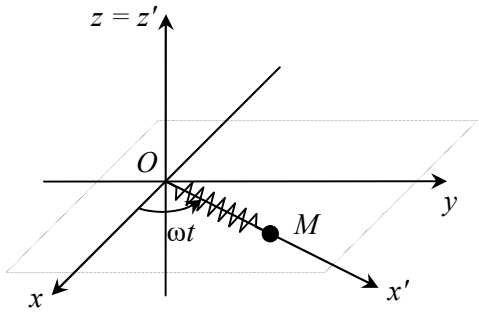
■ Comment mener une étude dynamique en référentiel non galiléen ?

❑ Méthode 1.4. Comment appliquer les lois de la dynamique en référentiel non galiléen ?

– Commencer par s'assurer que le référentiel utilisé n'est pas galiléen, en identifiant précisément son mouvement par rapport à un référentiel galiléen.
– Faire un bilan des forces appliquées au point matériel ou des actions extérieurs appliquées au solide considéré, et y adjoindre les deux forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis en n'oubliant pas en cas d'utilisation du TEC que cette dernière ne travaille pas.
– Appliquer alors les lois de la dynamique en suivant les méthodes usuelles.

⇨ **Exercices 1.4 à 1.7**

Considérons une masse m, assimilée à un point matériel M, mobile sans frottement le long d'une tige rectiligne. On définit un axe (Ox') suivant cette tige, qui tourne autour de l'axe vertical (Oz) du référentiel terrestre (R) (supposé galiléen) avec une vitesse angulaire constante ω. La masse est accrochée à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, l'autre extrémité étant fixée à l'origine du repère O.
Cherchons l'équation du mouvement de M le long de la tige.



Le référentiel (R') lié à la tige, lié au repère $(Ox'y'z')$, est en rotation par rapport à (R) galiléen, (R') n'est donc pas galiléen.
Forces appliquées à M : son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_{z'}}$, la réaction normale de la tige $\vec{R} = R_{y'}\vec{e_{y'}} + R_{z'}\vec{e_{z'}}$ et la tension du ressort $\vec{T} = -k(x' - \ell_0)\vec{e_{x'}}$, auxquelles on ajoute la force d'inertie d'entraînement $\vec{f_{ie}} = -m\vec{a_e}(M)_{R'/R} = +m\omega^2\,\vec{OM} = m\omega^2 x'\vec{e_{x'}}$ et la force d'inertie de Coriolis $\vec{f_{ic}} = -m\vec{a_c}(M)_{R'/R} = -2m\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}(M)_{R'} = -2m\omega\vec{e_{z'}} \wedge \dot{x}'\vec{e_{x'}} = -2m\omega\dot{x}'\vec{e_{y'}}$.
Appliquons le PFD à M dans (R') : $m\vec{a}(M)_{R'} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f_{ie}} + \vec{f_{ic}}$.
En projections suivant (Ox) il vient : $m\ddot{x}' = -k(x' - \ell_0) + m\omega^2 x'$, soit encore :
$\ddot{x}' + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)x' = \frac{k}{m}\ell_0$. Il s'agit d'un oscillateur harmonique si $\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}$, dans le cas contraire la solution diverge et le ressort sort du domaine élastique.

❑ Méthode 1.5. Quelles conséquences du caractère non galiléen du référentiel terrestre ?

En négligeant les effets de la viscosité dans l'atmosphère, le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen, appliqué à un volume fermé de fluide de masse $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}\tau(M)$ autour d'un point M soumis à l'effet des forces de pression et gravitationnelle, s'écrit par unité de masse : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi_g - \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P}{\rho}$, où Φ_g est le potentiel gravitationnel dont dérive la force d'attraction gravitationnelle, pointant vers le centre de la Terre. Le terme $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P$ traduit la fait que la force de pression est dans le sens des pressions décroissantes (des hautes pressions vers les basses).
Pour tenir compte du caractère non galiléen du référentiel terrestre, il convient d'ajouter les densités volumiques massiques de forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi_g - \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P}{\rho} - 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v} + \Omega^2\,\overrightarrow{HM}$, où H étant le projeté orthogonal d'un point M de l'atmosphère sur l'axe de rotation de la terre et $\vec{v}$ est la vitesse relative de l'élément de fluide par rapport au référentiel terrestre. Les deux termes supplémentaires ont de nombreuses conséquences en géophysique et en météorologie, domaines dans lesquels les distances et les temps caractéristiques mis en jeu sont tels que le caractère non-galiléen du référentiel terrestre s'exprime pleinement. Les effets des forces de Coriolis et d'entraînement ne sont alors plus négligeables. Voyons deux exemples importants.

⇨ **Exercices 1.6 et 1.7**

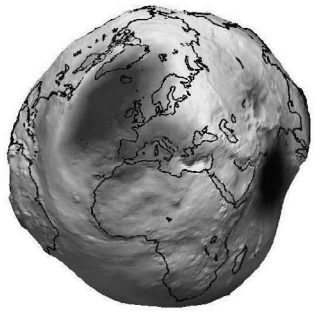
Conséquence du terme $\Omega^2\,\overrightarrow{HM}$: on introduit le potentiel gravitationnel effectif $\Phi_g = \Phi - \dfrac{1}{2}\Omega^2\,HM^2$ rendant compte de la gravité locale en M :

$\vec{g}(M) \approx -G\dfrac{M_{Terre}}{R_{Terre}^2}\vec{e_r} + \Omega^2\,\overrightarrow{HM}$, de sorte que la dynamique du mouvement est régie par l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi - \frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P}{\rho} - 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}\,.$$

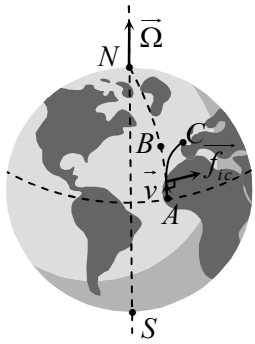
Ainsi, un fil à plomb ne pointe pas vers le centre de la terre mais il est normal aux surfaces équipotentielles effectives $\Phi = cte$.
On admet qu'en première approximation la surface équipotentielle de référence $\Phi = 0$ est un **ellipsoïde dit de référence**. Elle diffère d'une équipotentielle sphérique qui correspondrait au seul potentiel gravitationnel qui est à symétrie sphérique. En effet, du fait du bourrelet équatorial g est plus élevé à l'équateur qu'aux pôles et de plus le terme inertiel $\Omega^2\left\|\overrightarrow{HM}\right\|$ est

nul aux pôles et maximum à l'équateur. D'autre part, la Terre n'est pas homogène et sa masse n'est pas distribuée de façon uniforme, ainsi la surface équipotentielle $\Phi = 0$ n'est pas un ellipsoïde parfait mais un « patatoïde » appelé **le géoïde**. Sa forme est conditionnée par la présence des plateaux continentaux ainsi que par les mouvements magmatiques. Il est déterminé en analysant les perturbations des trajectoires de satellites artificiels terrestres par rapport aux trajectoires théoriques idéales calculées dans le cadre d'un modèle relatif à l'ellipsoïde de référence. Cette méthode permet de déterminer le champ de gravité et ses anomalies et ainsi donne accès à la surface équipotentielle correspondante. Ci-contre l'image du géoïde où les écarts à l'ellipsoïde de référence sont fortement exagérés.

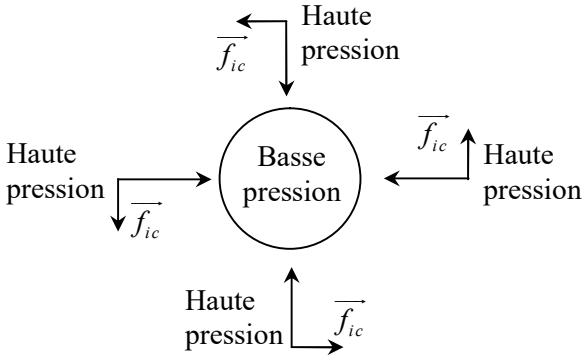


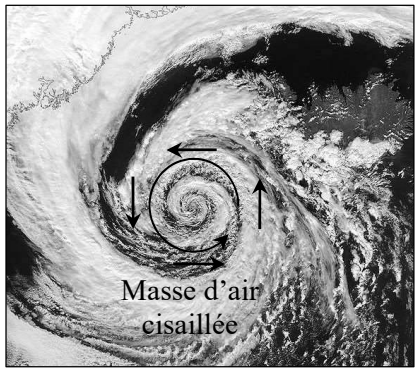
Conséquence du terme $-2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$:

Envisageons, dans l'hémisphère nord, un déplacement d'une masse unitaire d'air à altitude considérée comme constante. Par construction du produit vectoriel, le terme de Coriolis $-2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ entraîne une déviation vers la droite de ce que serait sa propre trajectoire en l'absence de rotation terrestre. Par exemple une masse d'air chaude remontant de l'équateur vers le pôle nord suivrait en l'absence de force de Coriolis la trajectoire *AB*. Du fait de la déviation vers la droite elle se retrouve en *C* et non en *B*.



Ainsi, en présence d'un centre dépressionnaire associé à de basses pressions les masses d'air en provenance des zones de haute pression convergeraient, en l'absence de la force de Coriolis directement vers le centre de la dépression. La déviation vers la droite de la trajectoire liée à la force de Coriolis produit ainsi un effet de cisaillement de la masse d'air à l'origine de la formation des dépressions et des cyclones qui dans l'hémisphère nord tournent dans le sens antihoraire (et dans le sens contraire dans l'hémisphère sud) : la masse d'air converge vers le centre dépressionnaire en s'enroulant autour de lui et non radialement, comme le montre l'image ci-dessous illustrant une dépression sur l'Islande. Au contraire une zone de haute pression produirait en l'absence de la force de Coriolis un vent divergeant qui compte tenu de la déviation vers la droite entraînerait un mouvement en spirale divergente dans le sens horaire dans l'hémisphère nord.





Méthodes

■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Une translation circulaire est identique à une rotation.	☐	☐
2.	Dans une translation, l'accélération de Coriolis est nulle.	☐	☐
3.	Dans une translation, la vitesse d'entraînement est constante au cours du temps.	☐	☐
4.	Dans une translation, la vitesse d'entraînement est indépendante du point considéré.	☐	☐
5.	Si un référentiel est galiléen, alors tout référentiel en translation rectiligne par rapport à lui est aussi galiléen.	☐	☐
6.	La force de Coriolis dérive d'une énergie potentielle.	☐	☐
7.	Pour un point matériel en équilibre dans un référentiel non galiléen, la force d'inertie de Coriolis est nulle.	☐	☐
8.	Pour un point matériel en mouvement dans un référentiel non galiléen, la force d'inertie d'entraînement ne dépend que de sa position.	☐	☐
9.	Dans le référentiel géocentrique, la Terre est immobile.	☐	☐
10.	Le poids d'un corps inclut la force d'inertie d'entraînement due au mouvement de la Terre.	☐	☐
11.	Si le vecteur rotation d'un solide est nul, son mouvement est rectiligne et uniforme.	☐	☐
12.	L'accélération d'entraînement d'un solide est la dérivée de sa vitesse d'entraînement.	☐	☐
13.	L'accélération de Coriolis est responsable de la formation des alizés et de la circulation générale atmosphérique.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

❑ Exercice 1.1. Composition des vecteurs vitesse et accélération

Soit un point matériel M repéré à l'instant t par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le référentiel (R) rapporté à $(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z})$ et par $\overrightarrow{O'M}$ dans (R') rapporté à $(O',\vec{e_{x'}},\vec{e_{y'}},\vec{e_{z'}})$. On note $\vec{\Omega}_{R'/R}$ le vecteur rotation instantanée de (R') par rapport à (R). On définit la vitesse absolue du point M, $\vec{V_a}(M)$ comme sa vitesse par rapport à (R), la vitesse relative $\vec{V_r}(M)$ comme sa vitesse par rapport à (R') et sa vitesse d'entraînement $\vec{V_e}(M)$ comme la vitesse d'un point P fixe dans (R') et coïncidant à l'instant t avec M.

1. Montrer que $\vec{V_a}(M)=\vec{V_r}(M)+\vec{V_e}(M)$, en explicitant clairement chacun des termes de cette égalité. On fera en particulier clairement apparaître que la vitesse d'entraînement est égale à la celle du point coïncidant.

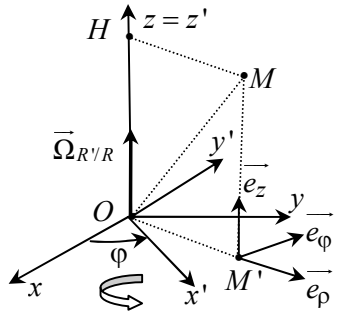
2. On définit l'accélération absolue $\vec{a_a}(M)$ du point M comme étant son accélération par rapport à (R), son accélération relative $\vec{a_r}(M)$ comme celle par rapport à (R') et son accélération d'entraînement $\vec{a_e}(M)$ comme celle d'un point P fixe dans (R') et coïncidant à l'instant t avec M.

a) Montrer que $\vec{a_a}(M)=\vec{a_r}(M)+\vec{a_e}(M)+\vec{a_c}(M)$, en explicitant clairement chacun des termes de cette égalité. On explicitera le terme $\vec{a_c}(M)$, appelée accélération de Coriolis, en fonction de $\vec{\Omega}_{R'/R}$ et de la vitesse relative $\vec{V_r}(M)$. On veillera à faire apparaître que l'accélération d'entraînement est égale à celle du point coïncidant.

b) Dans quel cas particulier l'accélération d'entraînement s'identifie-t-elle avec la dérivée de la vitesse d'entraînement ?

❑ Exercice 1.2. Expression des vitesses et des accélérations en coordonnées cylindriques

Pour cet exercice, la résolution préalable de l'exercice 1.1 est nécessaire. Rapportons le référentiel (R'), en mouvement de rotation dans (R) autour de (Oz) avec le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{R'/R}$, au système de coordonnées cylindriques (ρ,φ,z) auquel on associe le trièdre direct $\left(\vec{e_\rho},\vec{e_\varphi},\vec{e_z}\right)$ tel que $\overrightarrow{OM'}=\rho\,\vec{e_\rho}$ repère la position de M', projeté orthogonal de M sur le plan (xOy) de (R). $\vec{e_\rho}$ est le vecteur unitaire radial et $\vec{e_\varphi}$, déduit de $\vec{e_\rho}$ par rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de $\vec{e_z}$, est le vecteur unitaire orthoradial.



La position d'un point M peut être repérée par la donnée de son rayon polaire $\left\|\overrightarrow{OM'}\right\| = \rho$, de l'angle φ que fait ce dernier avec l'axe (Ox) du référentiel (R) : $\varphi = \left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_\rho}\right)$, et de sa côte z.

1. À l'aide des formules de dérivation vectorielle établies dans l'exercice 1, expliciter la vitesse absolue du point M (pour un observateur attaché à (R)) dans le repère cylindrique (R').
2. Établir de même l'expression de l'accélération absolue du point M dans le repère cylindrique (R').

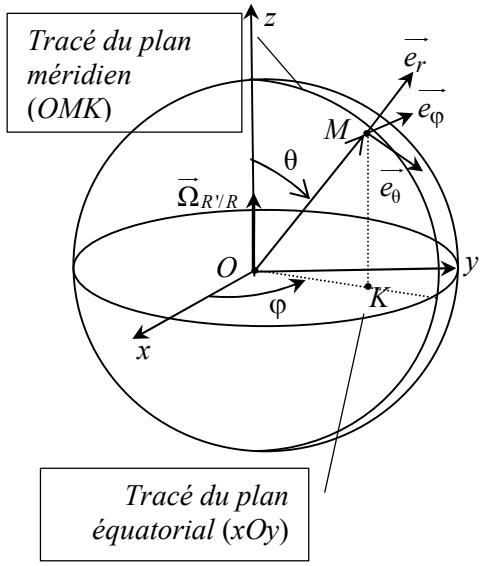
❑ Exercice 1.3. Expression des vitesses et des accélérations en coordonnées sphériques*

Rapportons le référentiel (R'), en mouvement de rotation dans (R) avec le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{R'/R}$, au système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) auquel on associe le trièdre direct $\left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi}\right)$ où :

– $\overrightarrow{e_r}$ désigne le vecteur unitaire radial portant $\overrightarrow{OM}$;

– $\overrightarrow{e_\theta}$ désigne le vecteur unitaire tangent à l'arc décrit par M dans le plan méridien lors de sa rotation d'angle θ autour de l'axe passant par O et perpendiculaire à ce plan, de vecteur rotation instantanée $\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\varphi}$.

Notons K le projeté orthogonal de M sur le plan équatorial. $\overrightarrow{e_\varphi}$ désigne le vecteur unitaire tangent à l'arc décrit par K dans un plan équatorial lors de sa rotation d'angle φ autour de l'axe (Oz), et donc aussi à celui décrit par M dans un plan parallèle au plan équatorial lors de la même rotation d'angle φ autour de l'axe (Oz) de vecteur rotation instantanée $\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_z}$. La position du point M peut être repérée par la norme de son rayon vecteur $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$, sa colatitude $\theta = \left(\overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{OM}\right)$ et sa longitude $\varphi = \left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{OK}\right)$.

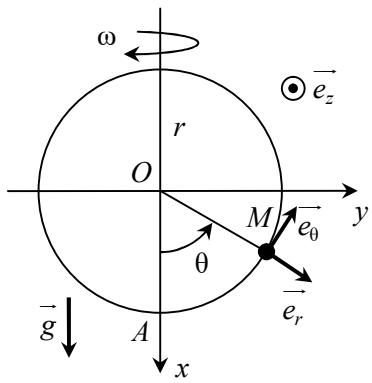


1. Établir l'expression du vecteur rotation de (R') par rapport à (R).
2. À l'aide des formules de dérivation vectorielle établies dans l'exercice 1, expliciter la vitesse absolue du point M (pour un observateur attaché à (R)) dans le repère sphérique (R').
3. Établir de même l'expression de l'accélération absolue du point M dans le repère cylindrique (R').

❑ Exercice 1.4. Anneau coulissant sur un cercle en rotation

Un guide circulaire de centre O et de rayon r est en rotation uniforme, caractérisé par $\vec{\Omega} = \omega \vec{e_x}$, autour de son diamètre vertical (Ox), par rapport au référentiel terrestre galiléen (R). Le référentiel d'étude est le référentiel (C) lié au cercle auquel on attache le repère ($Oxyz$).

Un anneau de masse m, assimilé à un point matériel M, est astreint à coulisser sans frottement sur la circonférence. Son mouvement dans (C) est repéré par l'angle θ entre $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$. On note $\vec{g} = +g\vec{e_x}$ le champ de pesanteur, et $\vec{R}$ la réaction du cercle sur M.



1. Faire la liste complète des forces qui s'exercent sur M dans le référentiel (C), et donner les composantes de ces forces dans la base cylindrique $\left(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z}\right)$.

2. Écrire le principe fondamental de la dynamique pour M dans ce référentiel, et en déduire l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$, ainsi que l'expression de $\vec{R}$ en fonction de θ, de ses dérivées et des paramètres du problème.

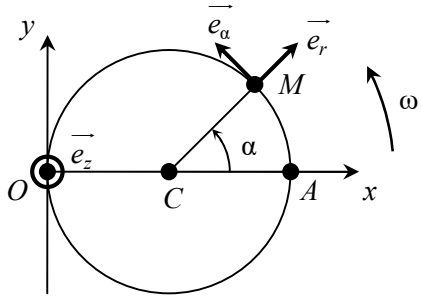
3. Indiquer la ou les position(s) d'équilibre de M dans ce référentiel.

❑ Exercice 1.5. Oscillations en référentiel tournant*

Un anneau circulaire horizontal, de centre C et de rayon r, est soudé en un point O à une tige verticale, confondue avec l'axe (Oz) du référentiel terrestre (R_T) supposé galiléen.

À partir de l'instant $t = 0$, on fait tourner cet anneau par rapport à (R_T), à la vitesse angulaire ω constante, autour de (Oz). Une perle de masse m, assimilable à un point matériel M, peut coulisser sans frottement sur l'anneau ; on note α l'angle entre $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{CM}$. À $t = 0^+$, M se trouve au point A (tel que $\alpha = 0$), et sa vitesse par rapport à (R_T) est encore nulle.

On note $\vec{g} = -g\vec{e_z}$ l'accélération de la pesanteur.



1. a) Le référentiel (R) lié à l'anneau est-il galiléen ?

b) Faire la liste complète des forces qui s'exercent sur M dans (R), et donner les composantes de ces forces dans la base cylindrique $\left(\vec{e_r}, \vec{e_\alpha}, \vec{e_z}\right)$.

On pourra utiliser : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$.

2. Écrire le principe fondamental de la dynamique pour M dans ce référentiel, et en déduire que l'équation différentielle vérifiée par $\alpha(t)$ est de la forme : $\ddot{\alpha} + \omega^2 \sin\alpha = 0$.

3. a) Déterminer les positions d'équilibre de M dans (R).

b) Préciser leur stabilité en utilisant l'équation différentielle précédente.

4. a) On suppose maintenant $\alpha << 1$ (petites oscillations). Déterminer alors complètement la solution $\alpha(t)$ en tenant compte des conditions initiales.

b) Montrer que la solution trouvée est en réalité incompatible avec l'hypothèse des petites oscillations. A-t-on surestimé ou sous-estimé sin α (en valeur absolue) ? En déduire si l'amplitude réelle des oscillations est plus grande ou plus petite que celle calculée à la question précédente.

5. a) Exprimer l'énergie potentielle totale et l'énergie cinétique de M dans (R), en fonction de α, $\dot{\alpha}$ et des paramètres du système.

b) En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, retrouver l'équation différentielle précédente.

❑ Exercice 1.6. Force de Coriolis sur un train - Problème ouvert

Sur les lignes TGV entre le nord et le sud de la France on constate une usure différentielle sur l'un des deux rails (toujours le même). Proposer une modélisation permettant de rendre compte de cette observation.

Données : le TGV est de masse $m = 7{,}8\cdot10^5$ kg, la vitesse $v = 300$ km·h^{-1} est supposée constante. On pourra pour les applications numériques se placer à un instant donné à la hauteur de Valence (entre Lyon et Avignon) dont la latitude est $\lambda = 45°$ nord.

On donne la vitesse angulaire de la terre $\Omega = 7{,}3\cdot10^{-5}$ rad·s^{-1} et $g = 9{,}8$ m·s^{-2}.

❑ Exercice 1.7. Champ de pesanteur

On s'intéresse au champ de pesanteur $\vec{g}(P)$ en un point P de la surface de la Terre. Par rapport au référentiel géocentrique (R_G), la Terre (assimilée à une sphère de rayon R et de masse M) effectue un mouvement de rotation autour de l'axe des pôles (Oz), à la vitesse angulaire constante $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. On néglige l'influence de tout autre astre, ce qui revient à ne considérer que les deux termes principaux constituant le champ $\vec{g}(P)$.

1. Indiquer en quelques mots l'origine physique de ces deux termes, et donner leur expression vectorielle. Il sera nécessaire d'introduire des notations supplémentaires que l'on définira sur un schéma (vue en coupe de la Terre) : faire apparaître sur ce schéma chacun des deux termes et le champ $\vec{g}(P)$ résultant.

2. Calculer la norme g du champ de pesanteur pour un point situé sur l'équateur.
On donne : $G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ \mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$ (constante de gravitation universelle) ;
$R = 6378$ km (rayon équatorial) ; $M = 5{,}99\cdot10^{24}$ kg ; $T = 23$ h 56 min $= 86164$ s.

3. Imaginons maintenant qu'on pose le pied sur l'astéroïde Sisyphe, lui aussi sphérique mais beaucoup plus petit que la Terre et en rotation plus rapide : $R' = 1{,}2$ km ; $M' = 1{,}8\cdot10^{12}$ kg ; $T' = 2$ h 24 min. Que peut-on dire du poids à l'équateur ?

❑ Exercice 1.8. Pendule de Foucault en python

Un pendule de Foucault est un pendule pesant de grande longueur L (plusieurs dizaines de mètres si possible) dont le plan d'oscillation tourne, dans le référentiel terrestre, autour de la verticale sous l'effet de la force de Coriolis. La vitesse angulaire de rotation Ω est fonction de

la vitesse angulaire propre de la Terre Ω_T et de la latitude λ du site où a lieu l'expérience : $\Omega = \Omega_T \sin(\lambda)$.

En projection sur le plan horizontal (Ox,Oy) et pour des amplitudes d'oscillations faibles, le système d'équation est : $\left\{\begin{array}{l} \ddot{x} = -\dfrac{g}{L}x + 2\Omega_T \sin(\lambda)\dot{y} \\ \ddot{y} = -\dfrac{g}{L}y - 2\Omega_T \sin(\lambda)\dot{x} \end{array}\right\}$. Les seconds termes des seconds membres traduisent l'existence de la force de Coriolis. Pour simuler la trace du pendule dans le plan horizontal, il faut résoudre le système d'équations différentielles précédent. On prendra ici $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et L = 50 m, on se placera à une latitude de $\pi/4$ rad. La vitesse angulaire de rotation propre de la Terre sera estimée en rad par seconde en considérant qu'elle fait un tour en 24 heures.

1. **a)** Appeler les bibliothèques utiles à l'étude et définir les paramètres numériques permettant de coder le système d'équations différentielles traduisant la dynamique du pendule. On appellera également l'instruction `odeint` de la bibliothèque `scipy.integrate` qui sera utile à la résolution du système d'équations différentielles.

b) Définir une fonction, nommée `EquationPendule`, qui prend en paramètres d'entrée la liste $[x,\dot{x},y,\dot{y}]$ et la variable temps *t* et qui renvoie la liste $[\dot{x},\ddot{x},\dot{y},\ddot{y}]$, c'est-à-dire la dérivée de la liste déclarée en entrée par rapport au paramètre *t*, où $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$ prennent les expressions définies par le système d'équations traduisant la dynamique du pendule.

2. **a)** Définir les conditions initiales si on lâche le pendule sans vitesse initiale pour le faire osciller dans le plan (*Ox, Oz*).

b) Proposer un script permettant de résoudre le système d'équation précédent à l'aide de l'instruction odeint. Cette instruction doit contenir comme arguments le système d'équations différentielles sous forme de la fonction EquationPendule précédemment créée, les conditions initiales sous forme de liste et la liste des instants (on prendra 100 000 instants également répartis entre 0 et 1000 s). Elle renvoie la liste, qui sera notée `s`, des valeurs numériques des fonctions et de leurs dérivées premières évaluées à chacun des instants, ce qui permet alors le tracé des fonctions voulues.

c) Pour obtenir la trace du pendule dans le plan (*Ox,Oy*) il faut extraire les listes des *x* et *y* pour tracer l'une en fonction de l'autre. Proposer un script réalisant cette étape de visualisation. Qu'observe-t-on ?

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 1.1. Question 1 : attention, le terme $\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_R$ n'est pas la vitesse relative. En effet on dérive ici par rapport à (R) et non (R') comme il le faudrait… Penser donc à utiliser les résultats de l'exercice 1.1.

Exercice 1.2. Question 1 : il convient ici de bien faire la différence entre le référentiel (R) depuis lequel le mouvement est « vu » (on dérive dans (R)) et le trièdre de projection où le mouvement est explicité (ici il s'agit de la base cylindrique).

Exercice 1.3. Songer à décomposer le vecteur rotation de (R') dans (R) en une rotation dans le plan équatorial autour de (*Oz*) et une dans le plan méridien autour de l'axe passant par *O* et perpendiculaire à ce plan.

Exercice 1.6. L'idée directrice est que c'est la force de Coriolis qui est la responsable de l'usure. Définir, au point *P* où se situe le train, une base orthonormale $\left(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$ avec $\overrightarrow{e_x}$ vers l'est, $\overrightarrow{e_y}$ vers le nord et $\overrightarrow{e_z}$ vers le zénith et faire un schéma de la situation.

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
faux	vrai	faux	vrai	faux	faux	vrai	vrai	faux	vrai	faux	faux	vrai

1. Les axes ont une direction fixe dans la translation circulaire, alors qu'ils tournent dans une rotation.

3. Cela n'est vrai que si la translation est rectiligne uniforme.

5. La translation doit également être uniforme.

6. Elle dépend de la vitesse, donc ne constitue pas un champ de force.

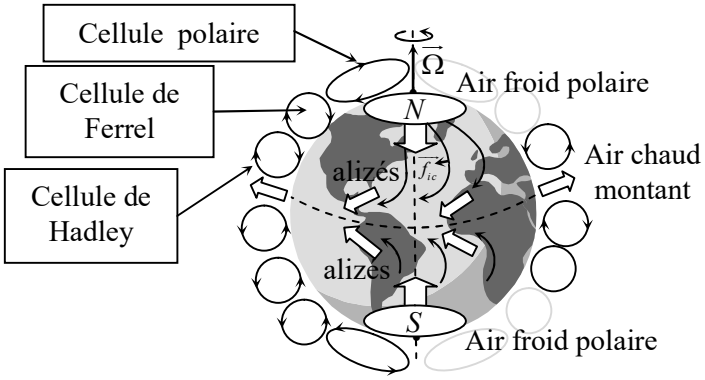
9. Dans ce référentiel, la Terre est en rotation autour de l'axe des pôles.

11. Le mouvement de translation n'est pas nécessairement rectiligne, dans le cas général il est curviligne (translation elliptique, circulaire ou suivant une courbe quelconque), il est encore moins nécessairement uniforme.

12. Cette assertion n'est vraie que dans le cas d'un solide en translation. En effet, dans ce cas, les axes du solide de référence (R') gardent une direction fixe par rapport à ceux du référentiel absolu (R) de sorte que $\vec{\Omega}_{R'/R} = \vec{0}$. Ainsi, la vitesse d'entraînement et l'accélération d'entraînement ont pour expression : $\overrightarrow{V_e}(M) = \overrightarrow{V_{/R}}(O')$ et $\overrightarrow{a_e}(M) = \overrightarrow{a_a}(O') = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_e}(M)}{\mathrm{d}t}\right|_R$.

L'accélération de Coriolis est nulle puisque $\vec{\Omega}_{R'/R} = \vec{0}$. Ainsi l'accélération d'entraînement s'identifie avec la dérivée de la vitesse d'entraînement.

13. Dans le référentiel terrestre, une masse d'air en mouvement dans l'hémisphère nord est déviée vers la droite de sa trajectoire et vers la gauche dans l'hémisphère sud. Sous l'effet de la forte isolation à l'équateur, l'air chaud s'élève provoquant une zone de basse pression à l'équateur. Ainsi les masses d'air froid descendant des pôles vers l'équateur où elles remplacent les masses d'air chaud qui montent sont déviées vers l'ouest et contribuent, dans la zone située entre l'équateur et 30 degrés de latitude nord ou sud, à des vents réguliers soufflant du nord-est dans l'hémisphère nord et du sud-est dans celui du sud : les alizés.



Des cellules de convection thermique dite de Hadley assurent le retour des masses d'air chaud ayant quitté l'équateur : l'air chaud monte de l'équateur à la troposphère où il diverge vers les pôles en se refroidissant, il redescend alors vers les basses couches de l'atmosphère pour retourner à l'équateur en contribuant aux alizés. Ces cellules qui théoriquement devraient s'étendre jusqu'aux pôles sont en fait limités 30 degrés de latitude nord ou sud. En effet la composante méridienne (de l'équateur vers les pôles) de la vitesse est initialement quasi nulle pour l'air montant sur l'équateur et augmente à mesure que l'air divergeant vers les pôles par conservation du moment cinétique. Ainsi la masse d'air atteint environ $100\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ au sommet de la cellule de Hadley par 30 degrés de latitude nord ou sud, ce qui la rend instable. La cellule se morcelle ainsi en trois : une cellule de Hadley, une cellule de Ferrel et une cellule polaire.

❑ Les erreurs classiques

→ Le vecteur rotation $\vec{\omega}_{S/R}$ d'un solide dans (R) est orienté par la règle du tire bouchon, conformément au sens positif suivant lequel l'angle θ, paramétrant la rotation, augmente. Cette orientation est sans rapport avec le sens de rotation réel du solide

→ Ne pas confondre les différentes vitesses et accélérations dans les formules. En particulier, la vitesse entrant dans le calcul de l'accélération de Coriolis est la vitesse du point considéré dans le référentiel « mobile ».

→ Attention aux erreurs dues à une analyse insuffisante des différents mouvements : commencer par bien décrire le mouvement de (R') par rapport à (R), puis examiner les informations connues sur le mouvement du point étudié dans (R').

→ Le poids inclut la force d'inertie d'entraînement due au mouvement de la Terre, mais non celle due au mouvement d'un autre référentiel mobile (véhicule…).

→ La force de Coriolis n'induit pas toujours une déviation vers l'est ! La déviation est vers la droite de la trajectoire dans l'hémisphère nord et vers la gauche dans l'hémisphère sud. Ce n'est qu'en cas de chute libre que cette déviation est toujours vers l'est.

→ Le référentiel terrestre n'est pas toujours galiléen. Il ne l'est que sur de faibles échelles spatio-temporelles, par contre à l'échelle de phénomènes géophysiques il est non galiléen.

Exercice 1.1

1. En dérivant par rapport au temps l'égalité $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ il vient $\overrightarrow{V_a}(M) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_R = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right|_R + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_R$. On reconnaît le premier terme du second membre de cette égalité comme étant la vitesse de O' par rapport à (R) : $\overrightarrow{V_{/R}}(O')$.

Le second terme $\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_R$ *n'est pas la vitesse relative. Pour la faire apparaître, il faudrait dériver par rapport à (R') et non (R) comme c'est ici le cas.*

Utilisons donc la relation D2 : $\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_R = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{V_r}(M) + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}$.

Ainsi, $\overrightarrow{V_a}(M) = \overrightarrow{V_r}(M) + \overrightarrow{V_{/R}}(O') + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}$, relation qui rend compte de la composition des vitesses du point M entre (R) et (R'). Écrivons la composition des vitesses pour le point coïncidant P : $\overrightarrow{V_a}(P) = \overrightarrow{V_r}(P) + \overrightarrow{V_{/R}}(O') + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'P}$. Or, P est fixe dans (R') ($\overrightarrow{V_r}(P) = \vec{0}$), et coïncide à t avec M, on peut donc identifier le terme $\overrightarrow{V_{/R}}(O') + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}$ avec la vitesse d'entraînement $\overrightarrow{V_a}(P) = \overrightarrow{V_{/R}}(O') + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{V_e}(M)$. Finalement :

$\boxed{\overrightarrow{V_a}(M) = \overrightarrow{V_r}(M) + \overrightarrow{V_e}(M)}$ avec $\overrightarrow{V_r}(M) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}$ et $\overrightarrow{V_e}(M) = \overrightarrow{V_{/R}}(O') + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}$.

2. a) Dérivons dans (R) la formule de composition des vitesses obtenue à la question 1, il vient $\overrightarrow{a_a}(M) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_r}(M)}{\mathrm{d}t}\right|_R + \overrightarrow{a_a}(O') + \left.\frac{\mathrm{d}\left(\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}{\mathrm{d}t}\right|_R$. D'après la formule D2, on a d'une part $\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_r}(M)}{\mathrm{d}t}\right|_R = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_r}(M)}{\mathrm{d}t}\right|_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{V_r}(M) = \overrightarrow{a_r}(M) + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{V_r}(M)$. Évaluons d'autre part $\left.\frac{\mathrm{d}\left(\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}{\mathrm{d}t}\right|_R$: $\left.\frac{\mathrm{d}\left(\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}{\mathrm{d}t}\right|_R = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}_{R'/R}}{\mathrm{d}t}\right|_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_R$ or, d'après la relation D2, on a $\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_R = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{V_r}(M) + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}$, ainsi

$$\left.\frac{\mathrm{d}\left(\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)}{\mathrm{d}t}\right|_R=\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}_{R'/R}}{\mathrm{d}t}\right|_R\wedge\overrightarrow{O'M}+\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\left(\vec{V}_r(M)+\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)$$

$$=\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}_{R'/R}}{\mathrm{d}t}\right|_R\wedge\overrightarrow{O'M}+\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\vec{V}_r(M)+\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\left(\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{O'M}\right).$$ Finalement :

$$\vec{a}_a(M)=\vec{a}_r(M)+\vec{a}_a(O')+\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}_{R'/R}}{\mathrm{d}t}\right|_R\wedge\overrightarrow{O'M}+2\,\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\vec{V}_r(M)+\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\left(\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{O'M}\right).$$

En écrivant la même loi de composition des accélérations pour le point P fixe dans (R') et coïncidant avec M à l'instant t, on a :

$\vec{a}_a(P)=\vec{a}_a(O')+\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}_{R'/R}}{\mathrm{d}t}\right|_R\wedge\overrightarrow{O'P}+\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\left(\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{O'P}\right)=\vec{a}_e(M)$. Ainsi, on obtient la relation de composition des accélérations $\vec{a}_a(M)=\vec{a}_r(M)+\vec{a}_e(M)+2\,\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\vec{V}_r(M)$. On pose alors $\vec{a}_c(M)=2\,\overrightarrow{\Omega_{R'/R}}\wedge\vec{V}_r(M)$ l'accélération de Coriolis, de sorte que finalement :

$\boxed{\vec{a}_a(M)=\vec{a}_r(M)+\vec{a}_e(M)+\vec{a}_c(M)}$, où $\vec{a}_r(M)=\left.\frac{\mathrm{d}\vec{V}_r(M)}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}$,

$\vec{a}_e(M)=\vec{a}_a(O')+\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}_{R'/R}}{\mathrm{d}t}\right|_R\wedge\overrightarrow{O'P}+\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\left(\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{O'P}\right)$ et $\vec{a}_c(M)=2\,\overrightarrow{\Omega_{R'/R}}\wedge\vec{V}_r(M)$.

b) Dans le cas d'une translation du référentiel (R') par rapport à (R), les axes de (R') gardent une direction fixe par rapport à ceux de (R) de sorte que $\vec{\Omega}_{R'/R}=\vec{0}$. Ainsi l'accélération d'entraînement s'identifie avec la dérivée de la vitesse d'entraînement :

$$\boxed{\vec{a}_e(M)=\vec{a}_a(O')=\left.\frac{\mathrm{d}\vec{V}_e(M)}{\mathrm{d}t}\right|_R}.$$

✎ *Ce n'est que dans ce cas que cette égalité est vérifiée.*

Exercice 1.2

1. Dérivons $\overrightarrow{OM}$ dans (R) pour obtenir la vitesse absolue $\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_R=\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}+\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{OM}$.

Dans (R'), on a $\overrightarrow{OM}=\rho\,\vec{e}_\rho+z\,\vec{e}_z$ et $\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}=\dot{\rho}\,\vec{e}_\rho+\dot{z}\,\vec{e}_z$ puisque $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_z$ y sont indépendants du temps. D'autre part, $\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{OM}=\dot{\varphi}\,\vec{e}_z\wedge\left(\rho\,\vec{e}_\rho+z\,\vec{e}_z\right)=\rho\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$. Ainsi la vitesse absolue du point M s'écrit $\boxed{\vec{V}_a(M)=\dot{\rho}\,\vec{e}_\rho+\rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi+\dot{z}\,\vec{e}_z}$.

2. Dérivons à présent $\vec{V}_a(M)$ dans (R) pour obtenir $\vec{a}_a(M)$:

$\overrightarrow{a_a}(M)=\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_a}(M)}{\mathrm{d}t}\right|_R=\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_a}(M)}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}+\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{V_a}(M)$.

Dans (R') : $\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_a}(M)}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}=\ddot{\rho}\,\overrightarrow{e_\rho}+\left(\rho\ddot{\varphi}+\dot{\rho}\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{e_\varphi}+\ddot{z}\,\overrightarrow{e_z}$, et d'autre part,

$\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{V_a}(M)=-\rho\dot{\varphi}^2\,\overrightarrow{e_\rho}+\dot{\rho}\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi}$. Ainsi l'accélération absolue (pour un observateur attaché à (R)) explicitée dans le repère cylindrique est $\boxed{\overrightarrow{a_a}(M)=\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2\right)\overrightarrow{e_\rho}+\left(\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{e_\varphi}+\ddot{z}\,\overrightarrow{e_z}}$.

Exercice 1.3

1. Le vecteur rotation de (R') par rapport à (R) se décompose en une rotation dans le plan équatorial autour de (*Oz*) de vecteur $\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_z}$, et une dans le plan méridien autour de l'axe passant par *O* et perpendiculaire à ce plan de vecteur $\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\varphi}$: $\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}=\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_z}+\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\varphi}$. Comme, de plus, $\overrightarrow{e_z}=\cos\theta\,\overrightarrow{e_r}-\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$, il vient $\boxed{\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}=\dot{\varphi}\cos\theta\,\overrightarrow{e_r}-\dot{\varphi}\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}+\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\varphi}}$.

2. Le vecteur position de *M* s'écrit en coordonnées sphériques $\overrightarrow{OM}=r\,\overrightarrow{e_r}$.

Dérivons $\overrightarrow{OM}$ dans (R) pour obtenir la vitesse absolue $\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_R=\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}+\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{OM}$.

Avec $\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{OM}=\dot{\varphi}\cos\theta\,\overrightarrow{e_r}-\dot{\varphi}\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}+\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\varphi}\wedge r\,\overrightarrow{e_r}=r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}+r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi}$ et $\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}=\dot{r}\,\overrightarrow{e_r}$

on a $\boxed{\overrightarrow{V_a}(M)=\dot{r}\,\overrightarrow{e_r}+r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}+r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi}}$.

3. Dérivons à présent $\overrightarrow{V_a}(M)$ dans (R) pour obtenir $\overrightarrow{a_a}(M)$, il vient :

$$\boxed{\overrightarrow{a_a}(M)=\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_a}(M)}{\mathrm{d}t}\right|_R=\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_a}(M)}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}+\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{V_a}(M)=\begin{cases}\left(\ddot{r}-r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2-r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r\\ \left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\overrightarrow{e_\theta}\\ \left(2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta+r\sin\theta\,\ddot{\varphi}\right)\overrightarrow{e_\varphi}\end{cases}}.$$

Exercice 1.4

1. On étudie le point matériel *M* de masse *m* dans le référentiel (C) de l'anneau, non galiléen (en rotation uniforme par rapport au référentiel terrestre galiléen R). Son mouvement est circulaire : $\vec{v}(M)_C=r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$ et $\vec{a}(M)_C=-r\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}+r\ddot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$.

Dressons le bilan des forces appliquées à *M* :

- le poids $\boxed{\overrightarrow{P}=m\,\overrightarrow{g}=+mg\,\overrightarrow{e_x}=mg\left(\cos\theta\,\overrightarrow{e_r}-\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}\right)}$;
- la réaction normale du support circulaire $\boxed{\overrightarrow{R}=R_r\,\overrightarrow{e_r}+R_z\,\overrightarrow{e_z}}$;
- la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{f_{ie}}=-m\,\overrightarrow{a_e}(M)=+m\omega^2\,\overrightarrow{HM}$ où *H* est le projeté de *M* sur l'axe de rotation (*Ox*), soit $\boxed{\overrightarrow{f_{ie}}=m\omega^2\,r\sin\theta\,\overrightarrow{e_y}=m\omega^2\,r\sin\theta\left(\sin\theta\,\overrightarrow{e_r}+\cos\theta\,\overrightarrow{e_\theta}\right)}$;

Corrigé

– la force d'inertie de Coriolis $\overrightarrow{f_{ic}} = -m\overrightarrow{a_c}(M) = -2m\overrightarrow{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_C = -2m\omega\overrightarrow{e_x} \wedge r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ soit $\boxed{\overrightarrow{f_{ic}} = -2m\omega r\dot{\theta}\cos\theta\overrightarrow{e_z}}$.

> *Ne pas oublier la composante sur $\overrightarrow{e_z}$ dans la réaction normale ! Ce n'est pas parce qu'elle n'est pas dans le plan de figure qu'elle n'existe pas… et la suite montrera qu'elle est bien non nulle en général.*

2. Appliquons le PFD à M dans le référentiel (C) : $m\vec{a}(M)_C = \vec{P} + \vec{R} + \overrightarrow{f_{ie}} + \overrightarrow{f_{ic}}$. En projection dans la base $\left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}\right)$ il vient :

$$\begin{cases} mg\cos\theta + R_r + m\omega^2 r\sin^2\theta = -mr\dot{\theta}^2 \\ -mg\sin\theta + m\omega^2 r\sin\theta\cos\theta = mr\ddot{\theta} \\ R_z - 2m\omega r\dot{\theta}\cos\theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} r\ddot{\theta} + g\sin\theta - \omega^2 r\sin\theta\cos\theta = 0 \\ R_r = -mg\cos\theta - m\omega^2 r\sin^2\theta - mr\dot{\theta}^2 \\ R_z = 2m\omega r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}}.$$

3. Une position d'équilibre est donnée par $\ddot{\theta} = 0$ d'où $\sin\theta(g - \omega^2 r\cos\theta) = 0$, soit :

– $\sin\theta = 0$, ce qui correspond à $\boxed{\theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi}$;

– ou bien $\cos\theta = \dfrac{g}{r\omega^2}$, soit $\boxed{\theta = \arccos\dfrac{g}{r\omega^2}}$ qui n'existe que $\boxed{\text{si } \omega > \sqrt{\dfrac{g}{r}}}$.

> *On pourrait montrer que c'est la dernière position qui est stable lorsqu'elle existe, sinon c'est $\theta = 0$.*

Exercice 1.5

1. a) Le référentiel (R) de l'anneau est non galiléen, car il est en rotation (uniforme) par rapport au référentiel terrestre galiléen.

b) Dressons le bilan des forces appliquées à M dans (R) :

– le poids $\boxed{\vec{P} = m\vec{g} = -mg\overrightarrow{e_z}}$;

– la réaction normale de l'anneau $\boxed{\vec{R} = R_r\overrightarrow{e_r} + R_z\overrightarrow{e_z}}$;

– la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{f_{ie}} = -m\overrightarrow{a_e}(M) = m\omega^2\overrightarrow{OM} = m\omega^2\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}\right)$ soit $\boxed{\overrightarrow{f_{ie}} = m\omega^2\left(r\cos\alpha\overrightarrow{e_r} - r\sin\alpha\overrightarrow{e_\alpha} + r\overrightarrow{e_r}\right)}$;

– la force d'inertie de Coriolis $\overrightarrow{f_{ic}} = -m\overrightarrow{a_c}(M) = -2m\overrightarrow{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{\mathrm{R}} = -2m\omega\overrightarrow{e_z} \wedge r\dot{\alpha}\overrightarrow{e_\alpha}$ soit $\boxed{\overrightarrow{f_{ic}} = 2m\omega r\dot{\alpha}\vec{e}_r}$.

2. Appliquons le PFD à M dans (R) : $m\vec{a}(M)_R = \vec{P} + \vec{R} + \overrightarrow{f_{ie}} + \overrightarrow{f_{ic}}$.

En projection dans la base $\left(\vec{e_r},\vec{e_\alpha},\vec{e_z}\right)$ il vient : $\begin{cases} R_r + m\omega^2 r(\cos\alpha+1) + 2m\omega r\dot{\alpha} = -mr\dot{\alpha}^2 \\ -m\omega^2 r\sin\alpha = mr\ddot{\alpha} \\ -mg + R_z = 0 \end{cases}$

car $\vec{a}(M)_R = -r\dot{\alpha}^2\vec{e_r} + r\ddot{\alpha}\vec{e_\alpha}$ (le mouvement étant circulaire). L'équation différentielle du mouvement est la deuxième (qui ne contient pas d'autre inconnue) : $\boxed{\ddot{\alpha} + \omega^2\sin\alpha = 0}$.

3. a) L'équilibre correspond à $\ddot{\alpha} = 0$ d'où $\sin\alpha = 0$, ce qui donne deux positions d'équilibre : $\boxed{\alpha = 0}$ (point A) et $\boxed{\alpha = \pi}$ (point O).

b) Pour le point A :

Supposons que M s'écarte légèrement de $\alpha = 0$: si $\alpha > 0$ alors $\sin\alpha > 0$ donc $\ddot{\alpha} < 0$, alors α aura tendance à diminuer, ce qui ramène M vers A ; même chose si $\alpha < 0$. Donc <u>A est une position d'équilibre stable</u>.

Pour le point O :

Supposons que M s'écarte légèrement de $\alpha = \pi$, soit $\alpha = \pi + \varepsilon$:

si $\varepsilon > 0$ alors $\sin(\pi+\varepsilon) = -\sin\varepsilon < 0$ donc $\ddot{\alpha} > 0$, alors α aura tendance à augmenter, ce qui éloigne encore M de O ; même chose si $\varepsilon < 0$. Donc <u>O est une position d'équilibre instable</u>.

4. a) Pour $\alpha << 1$ (c'est-à-dire au voisinage de A), $\sin\alpha \approx \alpha$ donc l'équation différentielle devient : $\ddot{\alpha} + \omega^2\alpha = 0$. On reconnaît un oscillateur harmonique, donc la solution générale est $\alpha(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ d'où $\dot{\alpha}(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$.

Position à $t = 0$: $\alpha(0) = 0$ donc $A = 0$. Vitesse à $t = 0$: $\vec{v}(M)_{R_T} = \vec{0}$ soit $\vec{v}(M)_R + \vec{v_e}(M) = \vec{0}$ d'où $\vec{v}(M)_R = -\vec{v_e}(M) = -\vec{v}(A)_{R_T} = -2r\omega\vec{e_y}$; or $\vec{v}(M)_R = r\dot{\alpha}\vec{e_\alpha}$, donc $\dot{\alpha}(0) = -2\omega$, d'où $B = -2$.

Finalement : $\boxed{\alpha(t) = -2\sin(\omega t)}$.

b) α oscille entre –2 et 2 (en radians), donc <u>ne vérifie pas l'approximation</u> $\alpha << 1$ (toujours radians).

En réalité, $|\sin\alpha| < |\alpha|$, donc $|\ddot{\alpha}| < \omega^2|\alpha|$: l'accélération est toujours plus faible que dans l'approximation linéaire, donc <u>l'amplitude réelle des oscillations est plus faible</u> que celle qu'on avait calculée.

5. a) Il y a deux forces conservatives, $\vec{P}$ et $\vec{f_{ie}}$. Énergie potentielle de pesanteur : $E_{pp} = +mgz + \text{cte} = \text{cte}$ puisque $z = 0$. Le seul terme variable est donc l'énergie potentielle centrifuge : $E_{pcf} = -\frac{1}{2}m\omega^2 OM^2 + \text{cte} = -\frac{1}{2}m\omega^2(r^2 + r^2 - 2r^2\cos(\pi-\alpha)) + \text{cte}$ soit $\boxed{E_p = -m\omega^2 r^2(1+\cos\alpha) + \text{cte}}$. Énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}m v(M)_R^2$ soit $\boxed{E_c = \frac{1}{2}mr^2\dot{\alpha}^2}$.

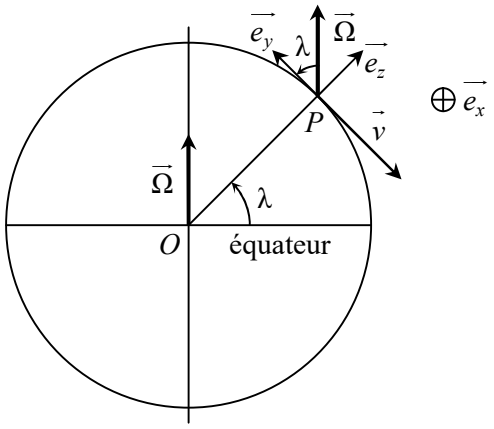
b) Appliquons le théorème de l'énergie mécanique dans (R) en notant $P\left(\vec{f_{nc}}\right)$ la puissance des actions non conservatives : $\left.\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t}\right|_R = P\left(\vec{f_{nc}}\right)_R$. Or les deux forces non conservatives $\vec{R}$ et $\vec{f_{ic}}$ sont orthogonales à la vitesse (qui est selon $\vec{e_\alpha}$) donc leur puissance est nulle.

Corrigé

Ainsi, $\left.\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t}\right|_R = -m\omega^2 r^2(-\dot{\alpha}\sin\alpha) + mr^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} = 0$ d'où après simplification : $\dot{\alpha} = 0$ (solution particulière correspondant à l'équilibre) ou $\boxed{\ddot{\alpha} + \omega^2 \sin\alpha = 0}$.

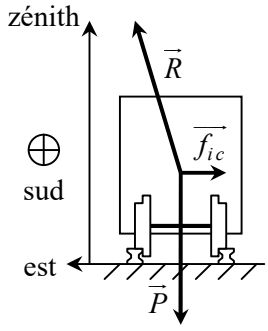
Exercice 1.6

Prenons le cas où le TGV circule du nord vers le sud entre Lyon et Avignon à la hauteur de Valence. Comme bien souvent en mécanique on commence par faire un schéma de la situation au point *P*. On note $\vec{v}$ le vecteur vitesse du train et $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation de la Terre.



L'idée directrice est que c'est la force de Coriolis que est la responsable de l'usure et non le poids du train. Exprimons donc la force de Coriolis qui s'exerce sur le train dans le référentiel terrestre dans le but de comparer sa norme à celle du poids du train : $\overrightarrow{f_{ic}} = -m\overrightarrow{a_c}(M) = -2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}$.

Or $\vec{\Omega} = \Omega\cos\lambda\,\overrightarrow{e_y} + \Omega\sin\lambda\,\overrightarrow{e_z}$ et $\vec{v} = -v\overrightarrow{e_y}$ donc $\overrightarrow{f_{ic}} = -2m\left(\Omega\cos\lambda\,\overrightarrow{e_y} + \Omega\sin\lambda\,\overrightarrow{e_z}\right)\wedge\left(-v\overrightarrow{e_y}\right)$ soit $\boxed{\overrightarrow{f_{ic}} = -2m\Omega\sin\lambda\, v\,\overrightarrow{e_x}}$ qui pointe vers l'ouest, c'est-à-dire ici vers la droite.



Dressons à présent un schéma local du train, vu de l'arrière, représentant les différentes forces subies. Aux deux forces précédentes s'ajoute la réaction $\vec{R}$ des deux rails (la force d'inertie d'entraînement, due au mouvement de la Terre, étant déjà incluse dans le poids).

Le PFD appliqué au train donne donc $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \overrightarrow{f_{ic}}$.

L'accélération du train est nulle si on considère son mouvement comme rectiligne uniforme.

Par contre, si on tient compte dans la modélisation de la courbure de la Terre, le mouvement du train est circulaire uniforme donc son accélération vaut $-\frac{v^2}{R}\overrightarrow{e_z}$.

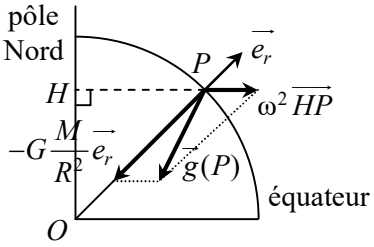
Cependant, dans les deux cas, la projection horizontale donne $R_x = -f_{ic}$: c'est donc le rail de droite (côté ouest) qui doit exercer une force de poussée horizontale, et subit alors une force opposée donc s'usera plus vite que le rail de gauche. Numériquement on calcul : $\boxed{f_{ic} = 6{,}7\ \text{kN}}$.

Or le poids est $P = mg = 7{,}6\ \text{MN}$ donc $\boxed{\frac{f_{ic}}{P} = 9\cdot10^{-4} = 0{,}09\ \%}$. La force subie par le rail de droite est donc en norme de l'ordre de 1 % de poids du train ce qui sur des années d'utilisation permet de produire une usure visible.

Si le train va vers le nord, la force de Coriolis est orientée vers l'est et c'est donc le rail du côté est qui s'use le plus, mais il s'agit toujours du rail de droite.

Exercice 1.7

1. D'après le cours : $\boxed{\vec{g}(P) = -G\frac{M}{R^2}\vec{e_r} + \omega^2\overrightarrow{HP}}$.



Le premier terme (prépondérant) est le <u>champ de gravitation</u> exercé par la Terre.
Le second provient de la <u>force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la Terre</u> autour de son axe.

2. Pour P à l'équateur, H est confondu avec O donc $HP = R$. De plus les deux termes sont colinéaires et de sens contraires, donc leurs normes se soustraient : $g = G\frac{M}{R^2} - \frac{4\pi^2}{T^2}R = 9{,}82 - 0{,}034$ soit $\boxed{g = 9{,}79\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$.

3. Cette fois $G\frac{M'}{R'^2} = 8{,}34\cdot10^{-5}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ et $\frac{4\pi^2}{T'^2}R' = 6{,}35\cdot10^{-4}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Comme on pouvait s'y attendre, ces termes sont <u>beaucoup plus faibles</u> que sur la Terre, mais surtout le terme d'inertie d'entraînement est prépondérant, ce qui signifie que ce « poids » est en fait <u>orienté vers l'extérieur</u> !

Exercice 1.8

1. a)
```
#Importation des bibliothèques
import numpy as np #commandes de calculs numériques
import matplotlib.pyplot as plt #commandes de tracés
from scipy.integrate import odeint #commande de résolution numérique
#d'équations différentielles
#Paramètres numériques de l'étude
g=9.81 #intensité de la pesanteur
L=50   #longueur du pendule
omega=np.sqrt(g/L) # pulsation propre du pendule
latitude=np.pi/4   #latitude du lieu, en rad.
OmegaT=2*np.pi/24/3600 #vitesse angulaire de rotation propre de la Terre
```

b) Codons à présent l'équation différentielle du mouvement. L'objet liste qui contient les coordonnées de position `x` et `y` et leur dérivée, les vitesses `vx` et `vy` est noté `X`. La seconde ligne permet d'affecter les quatre éléments de la liste `X` aux variables `x`, `vx`, `y` et `vy`, dans cet ordre. Il serait équivalent d'écrire `x=X[0]`, `vx=X[1]`, `y=X[2]` et `vy=X[3]`. C'est dans l'instruction return que l'on déclare le système d'équations différentielles : on renvoie une liste de quatre éléments qui sont, dans l'ordre, la dérivée de `x`, donc `vx`, puis la dérivée de `vx`, donc l'accélération `ax` selon (Ox), qui prend l'expression définie par le système d'équations, puis la dérivée de `y`, donc `vy`, et enfin la dérivée de `vy`, donc `ay`, dont l'expression est elle aussi issue du système d'équations. Le script est le suivant :

```
def EquationPendule(X,t):
   x,vx,y,vy=X
   return [vx, -omega**2*x +2*OmegaT**np.sin(latitude)*vy ,vy ,-omega**2*y\
   2*OmegaT**np.sin(latitude)*vx ]
```

Corrigé

2. a) On définit ensuite les conditions initiales : pendule sans vitesse initiale oscillant dans le plan (*Ox, Oz*) :

```
#Conditions initiales
x0=.45
vx0=0
y0=0
vy0=0
```

b) On définit ensuite la liste des instants, ici entre 0 et 1000, avec 100 000 points, pour cela, on fait appel à l'instruction odeint et on renvoie son résultat, un tableau des quatre valeurs `x`, `vx`, `y` et `vy` évalués à chaque instant, dans la variable `s` :

```
s=odeint(EquationPendule,[x0,vx0,y0,vy0],t)
```

c) On extrait les listes des grandeurs de la matrice `s`. Pour cela, on utilise le « slicing » (ou extraction de sous-liste ou tranchage de liste) de listes (ou de tableaux). Le double point « : » signifie que l'on parcourt tous les éléments du tableau `s`, qui sont des listes de quatre éléments, le `0` signifie que parmi tous les éléments, du premier au dernier, on ne retient que celui d'indice `0`, donc le premier. L'ensemble est stocké dans la variable `x`. On le code comme suit :

```
x=s[:,0]
```

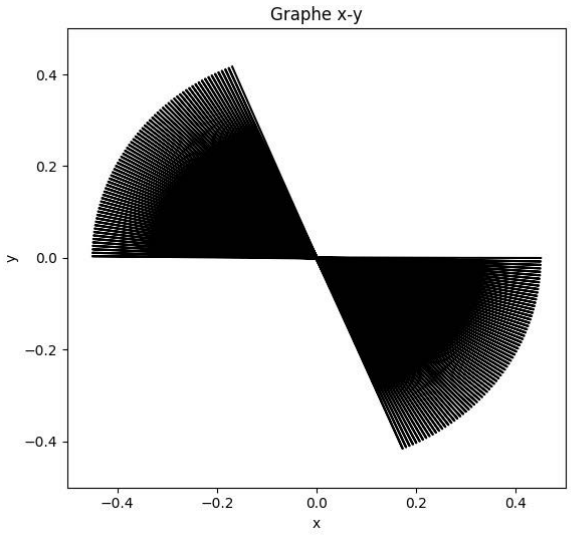
On fait de même pour extraire `y` de `s`

```
y=s[:,2]
```

Il ne reste plus qu'à observer la trace du pendule dans le plan (*Ox,Oy*) à l'aide d'un plot :

```
plt.figure() #on ouvre une fenêtre
plt.plot(x,y,color='black') #on trace y en fonction de x en noir
plt.title('Graphe x-y')     #titre du graphe
plt.xlabel('x')  #légende des abscisses
plt.ylabel('y')  #légende des ordonnées
plt.xlim(-.5,.5) #on fixe les valeurs minimale et maximale sur Ox
plt.ylim(-.5,.5) #on fixe les valeurs minimale et maximale sur Oy
plt.show() #on affiche l'ensemble
```

On obtient le tracé suivant sur lequel on constate la rotation de la trace du plan d'oscillation dans le plan (*Ox,Oy*) autour de la verticale (*Oz*) sous l'effet de la force de Coriolis :



Chapitre 2

Lois du frottement solide

UN SCIENTIFIQUE



Esprit à la fois théorique et pratique, **Guillaume Amontons** (1663-1705) est avant tout un inventeur. Cependant, il comprend que de bien connaître les sciences est fondamental pour améliorer les instruments qu'il conçoit. Ceci le conduit à étudier les mathématiques et la physique. Très intéressé par la météorologie, il conçoit un baromètre, un hygromètre et un thermomètre. Il participe à la conception de travaux publics ce qui l'amène à étudier les forces de frottement.

Un peu d'histoire

Comme l'avait suggéré Aristote, on pensait, jusqu'à Galilée, que le mouvement nécessitait continuellement l'application d'une force sans comprendre la cause réelle du ralentissement des mobiles. Léonard de Vinci affirme en 1493 deux principes régissant les frottements. Cette découverte étant restée inconnue, c'est totalement indépendamment que Guillaume Amontons les retrouve et affirme en 1699 que la force de frottement est proportionnelle à la charge appliquée et qu'elle est indépendante de la surface de contact. Il étudie par la suite la force nécessaire pour enrouler un câble marin sur une poulie en fonction de son diamètre et de celui de la poulie.

Lorsqu'il est en poste à Rochefort, Charles de Coulomb, célèbre pour ses découvertes en électrostatique, reprend les travaux d'Amontons, confirme ses résultats et introduit un coefficient de frottement variable suivant les matériaux.

■■ Objectifs

■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ La définition de la résultante des actions de contact dans le cadre du modèle du contact ponctuel entre deux solides indéformables. Le sens physique de ses composantes normale et tangentielle
- ▷ Les lois de Coulomb pour le frottement sec entre deux solides, en statique comme en dynamique
- ▷ La notion de cône de frottement
- ▷ La définition de la puissance des actions de contact, son lien avec la vitesse de glissement

■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Savoir traduire la condition de non-glissement d'un solide sur son support
- ▷ Savoir traduire la condition d'initiation du glissement d'un solide sur son support
- ▷ Savoir traduire la condition de basculement d'un solide sur son support
- ▷ Savoir simuler en Python une situation mécanique dans laquelle intervient au moins un changement de mode de glissement

■■ Résumé de cours

■ Introduction et position du problème

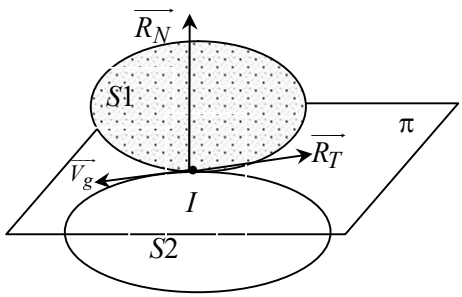
On s'intéresse ici au contact ponctuel, dans un référentiel (R), entre deux solides $S1$ et $S2$ indéformables, en un point de contact géométrique à l'instant t noté $I(t)$ ou plus simplement I. La réalité physique est bien entendu plus complexe : les solides sont déformables et le contact s'effectue sur une surface. Les actions de contact entre les deux solides s'exercent ainsi en tout point de cette surface. Dans le modèle du contact ponctuel, on représente ces actions de surface par des actions équivalentes ramenées au point de contact I. Si les surfaces en contact sont assez régulières, on peut définir un plan commun tangent aux deux solides en contact (noté (π) sur le schéma ci-dessous) et décomposer les actions de contact en composantes normale et tangentielle.

⇨ **Méthodes 2.1. Comment modéliser un contact surfacique ? et 2.2. Comment modéliser un contact linéique ?**

■ Vitesse de glissement

❑ Définition

I étant le point de l'espace où le contact entre les solides se produit à l'instant t, $I_{1\in S1}$ le point appartenant à $S1$ coïncidant avec I à l'instant t (mais pas à un instant antérieur ou postérieur) et $I_{2\in S2}$ le point appartenant à $S2$ coïncidant avec I à l'instant t, on définit la vitesse de glissement de $S1$ sur $S2$, notée $\overrightarrow{V_g}$.



La vitesse de glissement s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{V_g} = \overrightarrow{V}_{S1/S2} = \overrightarrow{V}_{I_1/S2} = \overrightarrow{V}_{I_1\in S1/R} - \overrightarrow{V}_{I_2\in S2/R}}.$$

Remarque

Les solides étant indéformables, on a $\boxed{\overrightarrow{V_g} \in (\pi)}$.

■ Actions de contact

La force de contact équivalente au point I se décompose en :

→ une composante normale $\overrightarrow{R_N}$ traduisant l'impossibilité d'interpénétration des solides,

→ une composante tangentielle $\overrightarrow{R_T}$ traduisant les forces de frottement, dite de résistance au glissement, entre les solides : $\boxed{\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}}$.

Si $\vec{R}_{1\to2}$ désigne la force qu'exerce $S1$ sur $S2$, alors d'après le principe des actions mutuelles $\vec{R}_{2\to1} = -\vec{R}_{1\to2}$.

Remarques

La force de frottement est la moyenne à l'échelle macroscopique d'interactions microscopiques d'origine électromagnétique.

■ Approche empirique des lois du frottement sec : lois de Coulomb

❑ Définition

On dit qu'il y a frottement sec lorsqu'il n'y a pas de couche fluide entre les surfaces en contact (en particulier, ceci exclut la présence de lubrifiant). Un tel frottement peut se manifester en s'opposant à la mise en mouvement du solide $S1$ par rapport au solide $S2$ en contact avec $S1$: on parle alors de frottement statique, ou bien par sa capacité à dissiper l'énergie mécanique d'un solide en mouvement : on parle alors de frottement dynamique.

❑ Loi de Coulomb pour le frottement statique

En statique, la vitesse de glissement est nulle : $\boxed{\overrightarrow{V_g} = \vec{0}}$. À la limite du glissement, on peut relier la composante normale de la réaction de $S1$ sur $S2$ à sa composante tangentielle par une relation linéaire : $\boxed{\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = \mu_s \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|}$, où μ_s est une constante caractéristique de la nature des solides en contact dite coefficient de frottement statique.

⇨ **Méthode 2.3. Comment traduire les conditions de non-glissement et de début de glissement d'un solide initialement statique ?**

❑ Loi de Coulomb pour le frottement dynamique

Lors du glissement, on est en dynamique, $\boxed{\overrightarrow{V_g} \neq \vec{0}}$ et on peut écrire : $\boxed{\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = \mu_d \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|}$, où μ_d est le coefficient de frottement dynamique. μ_d est légèrement inférieur à μ_s et diminue faiblement lorsque $\overrightarrow{V_g}$ augmente.

Dans la pratique, on néglige la différence entre μ_d et μ_s. On note alors simplement μ le coefficient de frottement caractéristique du contact.

La composante de frottement en I s'oppose au mouvement : $\boxed{\overrightarrow{R_T} \cdot \overrightarrow{V_g} < 0}$ et elle a même support que la vitesse de glissement : $\boxed{\overrightarrow{R_T} \wedge \overrightarrow{V_g} = 0}$.

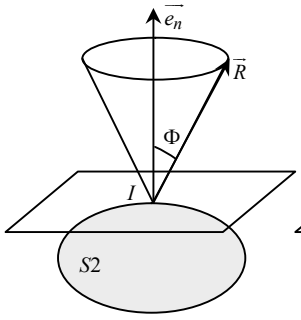
⇨ **Méthode 2.5. Comment simuler un collé-glissé d'un point matériel sur un plan horizontal ?**

❑ Cône de frottement

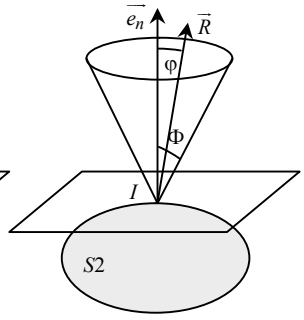
Si φ désigne l'angle entre la réaction $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$ en I et la normale en I au plan commun tangent, à la limite du glissement, on peut écrire $\varphi = \Phi$ où $\boxed{\dfrac{\left\|\overrightarrow{R_T}\right\|}{\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|} = \mu = \tan(\Phi)}$. Φ est l'angle de frottement qui, comme μ, est caractéristique de la nature des solides en contact.

→ En l'absence de glissement $\varphi < \Phi$ et $\dfrac{\left\|\overrightarrow{R_T}\right\|}{\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|} < \mu = \tan(\Phi)$, ainsi $\overrightarrow{V_g} = \vec{0}$, $\overrightarrow{R}$ est à l'intérieur du cône de frottement.

→ En cours de glissement $\boxed{\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = \mu_d \left\|\overrightarrow{R_N}\right\| \simeq \mu \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|}$ et $\overrightarrow{R}$ reste à la surface du cône de frottement.



Situation au glissement de $S1$ sur $S2$



Situation en l'absence de glissement de $S1$ sur $S2$

Ordre de grandeur

Nature du contact	Ordre de grandeur de μ
Acier sur acier	0,1
Bois sur bois	0,3
Plaquettes sur acier	0,45
Pneu sur bitume	0,6
Fer sur bois sec	0,6

Remarque

Le coefficient de frottement est indépendant de l'aire de la surface de contact et ne dépend en théorie que de la nature des matériaux en contact. Cependant, il est en fait fortement conditionné par l'état de surface et la présence d'impuretés.

■ Puissance des actions de contact

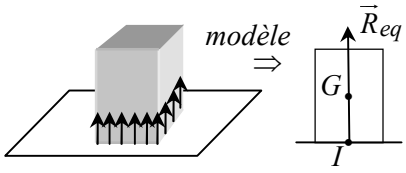
Dans le cas de deux solides $S1$ et $S2$ en contact, la puissance des actions de contact est intérieure au système formé par $S1 \cup S2$. On la décompose en $\boxed{P_{contact} = P_{S1\to S2} + P_{S2\to S1}}$.

On a : $\boxed{P_{contact} = \vec{R}_{T_{S1\to S2}} \cdot \overrightarrow{V_g}}$ où $\vec{R}_{T_{S1\to S2}}$ désigne la résultante des forces de frottement de $S1$ sur $S2$ et $\overrightarrow{V_g}$ la vitesse de glissement.

En l'absence de glissement $\overrightarrow{V_g} = \vec{0}$ et $P_{contact} = 0$. En présence de glissement $\overrightarrow{V_g} \neq \vec{0}$ et comme d'après les lois de coulomb $\vec{R}_{T_{S1\to S2}} \cdot \overrightarrow{V_g} < 0$ on a $P_{contact} < 0$. La composante de frottement est dissipatrice d'énergie mécanique.

■ Comment modéliser un contact surfacique ou linéique, et les actions de contact équivalentes ?

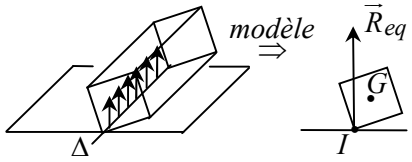
❑ Méthode 2.1. Comment modéliser un contact surfacique ?



Dans de nombreux exercices, le contact entre le solide étudié et le support sur lequel il repose se fait, de par leur géométrie, par l'intermédiaire d'une surface de contact. C'est par exemple le cas d'un bloc parallélépipédique reposant sur un plan. Les actions de contact s'exercent en tout point de cette surface et on les modélise par une unique action équivalente de résultante $\vec{R}_{eq}$ ramenée en un point de cette surface noté *I*. Il sera souvent possible, compte tenu des symétries du problème, de se ramener à une étude dans le plan de la feuille contenant le centre de masse *G* du bloc ainsi que le point *I*.

⇨ Exercices 2.1, 2.3, 2.4 et 2.5

❑ Méthode 2.2. Comment modéliser un contact linéique ?



Lorsque le contact entre le solide étudié et le support sur lequel il repose se fait, de par leur géométrie, par l'intermédiaire d'une génératrice Δ de contact linéaire, (c'est par exemple le cas d'un bloc parallélépipédique reposant sur une arrête), les actions de contact s'exercent en tout point de cette génératrice et on les modélise par une unique action équivalente de résultante $\vec{R}_{eq}$ ramenée en un point *I* de la génératrice. Tout se passe alors comme s'il s'agissait d'un contact ponctuel, le solide étant assujetti à se mouvoir dans le plan de la feuille contenant le centre de masse du solide ainsi que le point *I*.

⇨ Exercice 2.3

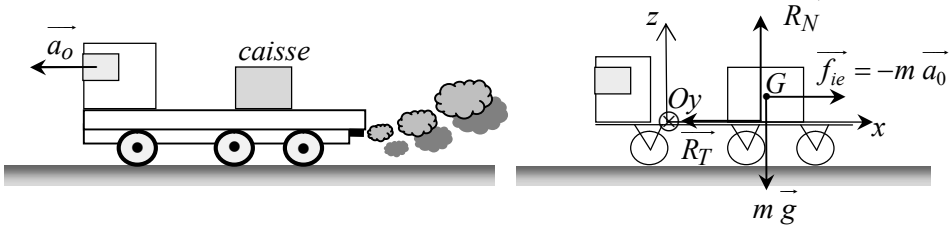
■ Comment traduire les conditions de glissement ou de basculement, d'un solide ?

❑ Méthode 2.3. Comment traduire les conditions de non-glissement et de début de glissement d'un solide initialement statique ?

→ On désigne par $\overrightarrow{R_N}$ et $\overrightarrow{R_T}$ les composantes normale et tangentielle de la réaction au support, ramenées en un point de la surface de contact et μ le coefficient de frottement (le plus souvent indifféremment statique ou dynamique).
→ On se place à la limite du glissement, en statique, ce qui permet d'expliciter $\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\|$ en utilisant le TRC en statique en projection sur les deux axes portant $\overrightarrow{R_N}$ et $\overrightarrow{R_T}$.
La condition de non-glissement du solide sur son support se traduit par l'inégalité $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| < \mu \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$. Au contraire à l'initiation du glissement on a : $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = \mu \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$.
→ Il est conseillé de faire un schéma clair respectant en particulier le sens de la composante de frottement $\overrightarrow{R_T}$ qui est opposée à la vitesse de glissement $\vec{V}_g$: $\overrightarrow{R_T} \cdot \overrightarrow{V_g} < 0$.

⇨ Tous les exercices du chapitre

Transport d'une caisse par camion. Une caisse cubique de masse m repose sur la plateforme d'un camion qui démarre. Il acquiert alors une accélération $\overrightarrow{a_0}$ par rapport au sol. On note μ le coefficient de frottement entre la caisse et le plateau. Dressons tout d'abord le bilan des forces s'exerçant sur la caisse dans le référentiel non-galiléen (R) du camion rapporté au repère cartésien (O,x,y,z) représenté ci-après :



La caisse est soumise à l'action de son poids $m\vec{g}$ s'exerçant en *G*, à la réaction du plateau $\vec{R} = \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$ rapportée en un point de la surface et, du fait du caractère non-galiléen du référentiel (R), à la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{f_{ie}} = -m\,\overrightarrow{a_0} = m\,a_0\,\overrightarrow{e_x}$ s'exerçant au centre de masse (en effet, l'accélération d'entraînement est ici égale à $\overrightarrow{a_0}$ et l'accélération de Coriolis est nulle puisque le camion est en translation par rapport au sol).

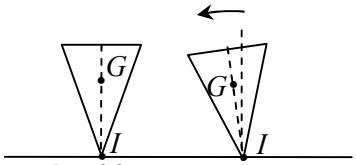
Notons que $\overrightarrow{R_N} = R_N \overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{R_T} = -R_T \overrightarrow{e_x}$ où $R_N > 0$ et $R_T > 0$, puisque si la caisse glisse, sa vitesse relative par rapport au plateau est suivant $\overrightarrow{e_x}$ et que, par définition, la composante de frottement $\overrightarrow{R_T}$ s'oppose au mouvement de la caisse.

La condition de non-glissement est $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| < \mu \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$. Il nous faut donc exprimer les composantes $\overrightarrow{R_N}$ et $\overrightarrow{R_T}$ de la réaction. En l'absence de glissement, la caisse étant immobile par rapport au plateau on a, d'après le TRC, dans (R) non-galiléen, en projection suivant (*Ox*) et (*Oy*) : $\begin{cases} 0 = f_{ie} - R_T \\ 0 = R_N - mg \end{cases}$, soit $\begin{cases} f_{ie} = R_T = m\,a_0 \\ R_N = mg \end{cases}$.

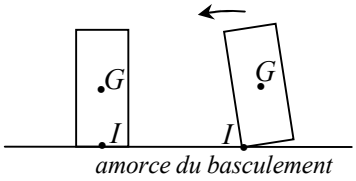
Ainsi, la condition de non-glissement s'écrit $\boxed{a_0 < \mu\, g}$. Au contraire, dés que $\boxed{a_0 = \mu\, g}$ le glissement s'initie.

❑ Méthode 2.4. Comment traduire la condition de basculement d'un solide sur son support ?

Deux cas sont à distinguer en fonction du contexte :



→ Le premier cas est celui d'un solide dont le contact avec le support est ponctuel (ou linéique se ramenant à ponctuel dans le plan de la feuille) au point *I* de par sa géométrie propre. Dans ce cas, le TMC en ce point (le moment de la réaction au support étant nul) entraîne la condition suivante : dès que le centre *G* de masse n'est plus à la verticale de *I*, le solide bascule. Condition qu'il faut ensuite traduire en fonction des données du problème.



→ Le second cas est celui d'un solide dont la géométrie impose un contact surfacique avec le support (armoire reposant sur le sol). Le basculement s'amorce lors de la transition du contact surfacique vers un contact linéique (ou ponctuel dans le plan de la feuille). Dans ce cas, le TMC en projection sur la génératrice de contact passant par *I* permet de traduire la condition d'amorce du basculement en fonction des données du problème.

⇨ **Exercice 2.3**

Déménageur poussant une armoire. On modélise une armoire de masse m par un parallélépipède rectangle de hauteur a et de largeur b. On note G son centre d'inertie. On néglige ici toute possibilité de glissement sur le sol. Un déménageur exerce, à une hauteur h du sol, une force de poussée horizontale $\vec{F} = -F\,\vec{e_x}$ contenue dans le plan vertical (O,x,y) contenant G de façon à faire basculer l'armoire autour de la génératrice de contact (Iz). On note J_{Iz} le moment d'inertie de l'armoire par rapport à l'axe (Iz). On cherche la condition sur h à l'amorce du basculement.

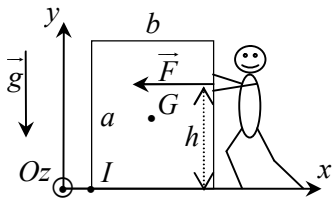


Figure 1

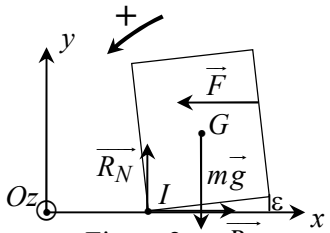


Figure 2

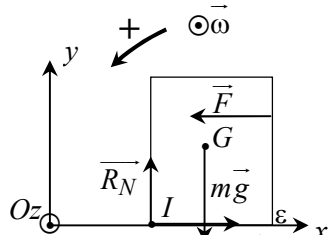


Figure 3

On note que le basculement correspond à un vecteur rotation $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e_z}$ positif en projection suivant (Oz), conformément à la règle du tire bouchon. Plaçons nous à l'amorce du basculement alors que le contact avec le sol ne se fait plus que par la génératrice de contact, c'est-à-dire l'axe (Iz). Ainsi, les réactions normale et tangentielle s'exercent au point I.

Attention, l'armoire venant juste de commencer à décoller, on néglige le petit angle ε que fait sa base avec le plan incliné. La figure 2 ci-dessus présente une vision très exagérée de la situation pour une meilleure visibilité. La réalité est plus proche de la figure 3.

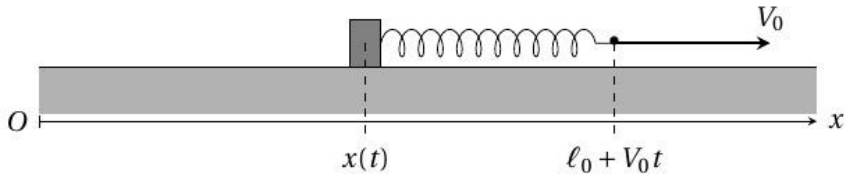
Appliquons le TMC en projection suivant l'axe (Iz), en utilisant la méthode des bras de levier (les moments suivant (Iz) des réactions normale et tangentielle étant alors nuls), il vient : $J_{Iz}\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = F\,h - m\,g\dfrac{b}{2}$. Au basculement, $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} > 0$, ce qui correspond à un moment de la force de poussée plus important que celui du poids : $F\,h - m\,g\dfrac{b}{2} > 0$. La hauteur minimum à laquelle doit s'exercer la poussée est : $\boxed{h > h_{min} = \dfrac{m\,g\,b}{2\,F}}$. Ce résultat traduit l'analyse intuitive du problème suivant laquelle l'armoire bascule d'autant plus facilement que l'on pousse haut.

❑ Méthode 2.5. Comment simuler un collé-glissé d'un point matériel sur un plan horizontal ?

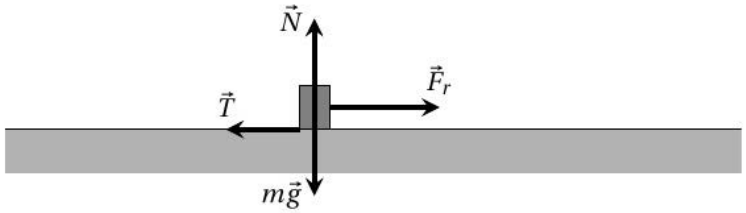
On modélise l'avancée d'un solide parallélépipédique sur un plan horizontal, qui peut glisser sans basculer, sous l'action d'un ressort tiré à vitesse constante à l'une de ses extrémités et des actions de contact décrites par la loi de Coulomb. Les actions de contact s'exercent en tous points de la surface de contact et on les modélise par une unique force équivalente ramenée en un point de la surface commune.

Le point important du calcul est de décrire correctement les conditions de glissement et d'en déduire les forces exercées puis le mouvement. On écrira qu'il y a **non glissement** si la force du ressort est inférieure à la valeur maximale de la force de frottement **et** si la vitesse est nulle. Dans le cas contraire, il y a glissement et donc mouvement de la masse. Ainsi, l'équation différentielle de mouvement contiendra une condition.

Soit une masse m pouvant se déplacer sur un sol plan horizontal. Elle est supposée liée à un ressort dont l'autre extrémité est entraîné à une vitesse constante. La masse est initialement au repos à l'origine du repère. Le ressort est caractérisé par sa raideur k et sa longueur à vide l_0. À l'instant initial, la position de l'extrémité droite du ressort est $l_0 + V_0 t$.



L'inventaire des forces est le suivant :
- la force $\vec{F}_r$ exercée par le ressort ;
- la force de frottement $\vec{T}$;
- la force de réaction du sol $\vec{N}$;
- le poids $m\vec{g}$.



Hypothèses simplificatrices :
- le mouvement a lieu vers la droite, la force de frottement est orientée vers la gauche (ou nulle) ;
- les coefficients de frottement statique et dynamique f_c sont confondus ;
- le ressort exerce toujours une force vers la droite.

Il n'y a aucun déplacement vertical, la masse reste en contact avec le sol, d'où $N = mg$. La condition de non glissement (repos) peut alors s'écrire : $\dot{x} = 0$ et $|T| < f_c\, m\, g$.

S'il y a repos, la résultante des forces est nulle d'où $|T| = F_r$. On peut donc encore écrire la condition de repos : $\dot{x} = 0$ et $F_r < f_c\, m\, g$.

Le principe de la fonction `odeint(F,x0,t)`, qui permet d'intégrer numériquement une équation différentielle, est d'évaluer les valeurs $x(t)$ de l'équation $\dot{x} = F(x,t)$ avec la condition

initiale `x(t[0])=x0` pour toutes les valeurs de la **liste** `t`. Il s'agit donc, a priori, d'intégrer une équation du premier ordre. Néanmoins, on peut s'en servir pour intégrer des équations différentielles d'ordre plus élevé en se servant de la propriété de **vectorialisation** de la fonction **`odeint`**. En effet, on peut écrire une fonction $F(X,t)$ s'appliquant sur une **liste** X et renvoyant une autre **liste représentant** $\dot{X}$. Si $X=[x,\dot{x}]$, la fonction F doit renvoyer la **liste** $[\dot{x},\ddot{x}]$, dérivée première des éléments de la liste X. La résolution de l'équation du second ordre $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=g(t)$ se code comme suit :

```
def F(X,t) :
   return [X[1],g(t)-a*X[1]-b*X[0]]
```

puisque `X[0]` représente x et `X[1]` représente $\dot{x}$, puis s'utilise selon :

```
s=odeint(F,[x0,xpoint0],t)
```

où `x0` et `xpoint0` représentent respectivement les conditions initiales.

```
#Importation des bibliothèques
import numpy as np #commandes de calculs numériques
import matplotlib.pyplot as plt #commandes de tracés
from scipy.integrate import odeint #commande de résolution numérique
#d'équations différentielles

#Paramètres
m=.3    #masse du système
fc=.8   #coefficient de frottement
g=9.81  #intensité de la pesanteur
k=.6    #constante de raideur du ressort
l0=1    #longueur à vide du ressort
V0=.5   #vitesse de l'extrémité droite du ressort

#Fonction qui renvoie la force exercée par le ressort en fonction du temps
#et de la position x de la masse
def ForceRessort(x,t):
      longueur=l0+V0*t-x #longueur du ressort entre les extrémités droite
                         #et gauche
      return k*(longueur-l0) #expression k*élongation du ressort

#Force de frottement dans le cas du glissement
T= fc*m*g
```

La première condition énonce le fait que si la force exercée par le ressort est inférieure à la force de frottement maximale et que s'il y a repos, le système reste au repos et son accélération est nulle, sinon il subit une accélération égale à $(F_r-T)/m$.

`X` est la liste contenant la position et la vitesse : $X=[x,\dot{x}]$. Ainsi `X[0]` est la position et `X[1]` la vitesse. La fonction doit renvoyer la liste vitesse-accélération $[\dot{x},\ddot{x}]$.

La condition de repos $\dot{x}=0$ ne peut être traduite en langage informatique par `X[1]==0` car le flottant `X[1]` ne peut avoir une valeur exacte. On choisit alors de considérer nulle toute vitesse inférieure à une valeur arbitraire suffisamment petite, par exemple $0,01 \ll V_0=0,5$, d'où l'écriture de la condition de vitesse nulle `np.abs(X[1]) < 0.01`. Le code est donc le suivant :