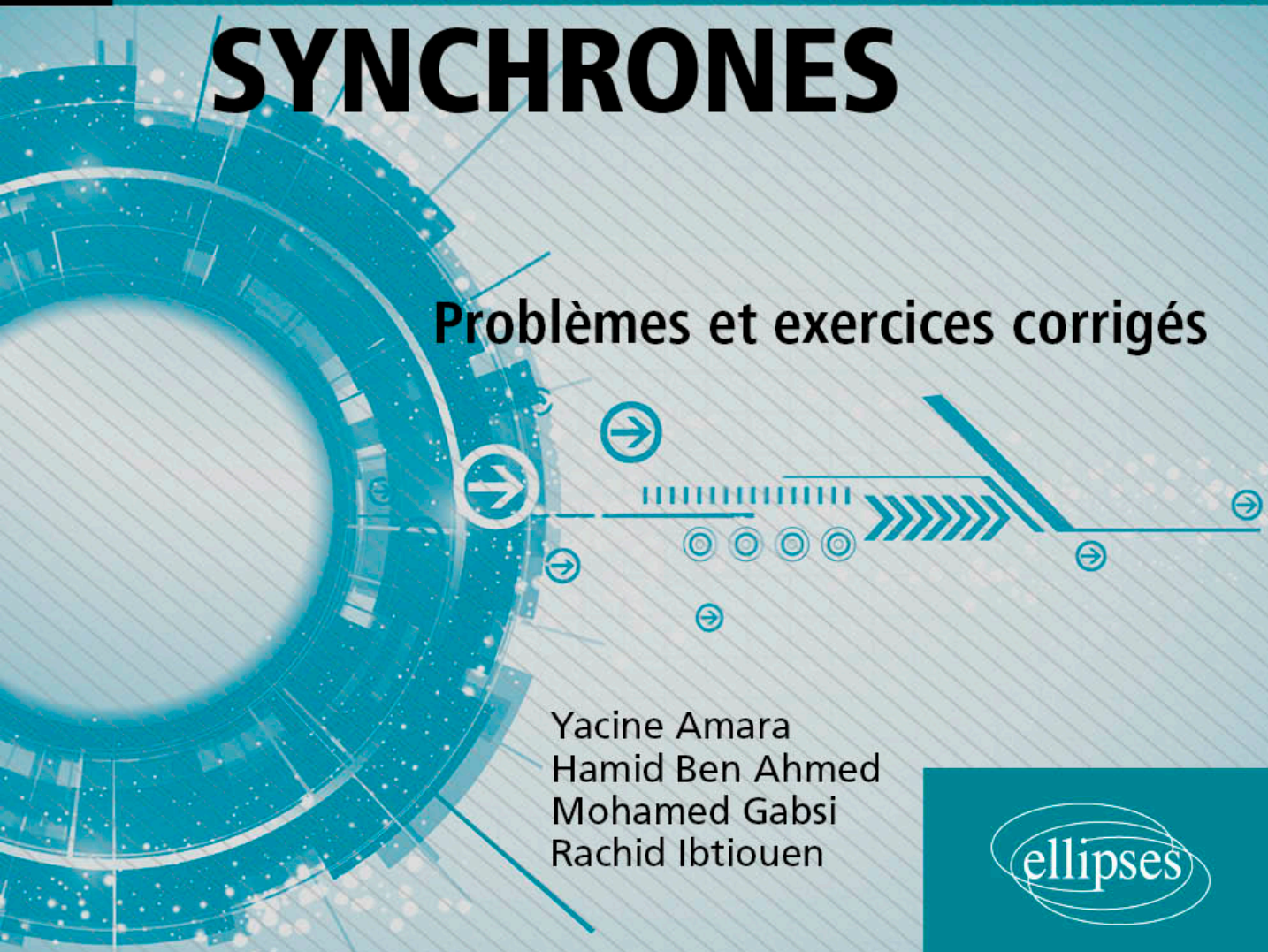
Formations & Techniques

LOIS DE COMMANDE, EN RÉGIME PERMANENT, DES MOTEURS SYNCHRONES

Problèmes et exercices corrigés



Yacine Amara
Hamid Ben Ahmed
Mohamed Gabsi
Rachid Ibtiouen

ellipses

Formations & Techniques

LOIS DE COMMANDE, EN RÉGIME PERMANENT, DES MOTEURS SYNCHRONES

Problèmes et exercices corrigés

Yacine Amara
Hamid Ben Ahmed
Mohamed Gabsi
Rachid Ibtiouen

ellipses

Collection Formations & Techniques

dirigée par Paul de Laboulaye

paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr



ISBN 9782340-104778

Dépôt légal : octobre 2025

©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Remerciements

À mes collègues, chercheurs confirmés ou plus jeunes, qui ont contribué de près ou de loin à l'effort de recherche sur les machines synchrones à double excitation.

À ma famille des deux côtés de la Méditerranée.

À mes beaux-parents. Une pensée particulière à mon beau-père décédé. Paix à son âme.

À mes parents, ces amoureux des livres.

À ma sœur et à mon frère, ainsi qu'à leurs proches.

À ma femme et à mes enfants.

Merci !

Yacine Amara

Aux chercheurs qui m'ont transmis leur savoir et leur passion pour la conception de machines électriques non conventionnelles : Jean Lucidarme, Mohamed El Hadi Zaim, Bernard Multon, Christian Rioux, Rachid Ibtiouen, et bien d'autres en France et ailleurs.

Hamid Ben Ahmed

Je voudrais dédicacer ce livre à toute l'équipe qui a travaillé avec moi sur ce sujet passionnant. Une mention spéciale à Michel Lécrivain, Emmanuel Hoang, Sami Hlioui, Franck Chabot et Cédric Plasse.

Mohamed Gabsi

À ceux qui m'ont montré mes erreurs, me permettant ainsi de continuellement apprendre et me corriger. Une pensée à mon père décédé, paix à son âme. A mon frère du GREAHavre, à mes ami(e)s du GREENancy, de l'ENP Alger, de l'ENS Cachan, et de l'USTHB (Alger).

Rachid Ibtiouen

Avant-propos

Parmi les différentes familles de machines électriques, les machines synchrones, et plus particulièrement les machines synchrones à aimants permanents, sont celles permettant d'optimiser les densités de couple (machines rotatives) / force (machines linéaires), et de puissance.

C'est à cause de ce facteur qu'on les retrouve dans les nouvelles applications liées à la transition énergétique. Elles sont ainsi utilisées comme alternateurs dans les éoliennes, et comme moteurs dans les véhicules électriques.

Ces machines permettent de dimensionner des systèmes sobres énergétiquement, et l'ingénieur se doit de maitriser les paramètres influents leurs performances statiques et dynamiques.

Cet ouvrage fournit aux étudiants de Master, à ceux des écoles d'ingénieurs, et aux ingénieurs, en poste dans les services R&D dans l'industrie, les fondamentaux indispensables à la compréhension, et à l'implémentation des stratégies de commande des machines synchrones, sur l'ensemble de leurs plans de fonctionnement.

La qualité d'un ouvrage est en grande partie déterminée par la manière dont sa structure aide le lecteur à maîtriser la profondeur, et l'étendue du sujet traité. Ainsi, ce document propose une structure pédagogique qui permet d'atteindre cet objectif, pour les ingénieurs cherchant à maîtriser la commande des entraînements électriques à base de machines synchrones.

Il est découpé en deux parties. Alors que le lecteur est guidé dans les développements mathématiques, par les questions posées, dans les problèmes de la première partie, il l'est moins dans ceux de la seconde partie. Les problèmes de la première partie permettent de poser des bases, qui sont exploitées dans ceux de la seconde partie. Les solutions proposées ne sont pas uniques, et peuvent paraitre compliquées, et le lecteur est encouragé à en chercher d'autres plus simples, et plus élégantes, le cas échéant.

Le contenu est enrichi par la fourniture des scripts numériques MATLAB utilisés pour générer les différentes figures, et pour effectuer certaines démonstrations. Ces fichiers, aisni qu'une troisième partie, sont disponibles en téléchargement via le lien suivant :

https://www.editions-ellipses.fr/accueil/16190-30557-lois-de-commande-en-regime-permanent-des-moteurs-synchrones-problemes-et-exercices-corriges-9782340104778.html#/1-format_disponible-broche



Cette troisième partie aborde le fonctionnement des machines synchrones sur l'ensemble de leur plan (Couple, Vitesse), avec la considération des pertes.

Nous espérons que la structuration de cet ouvrage, et les fichiers fournis, permettront aux lecteurs une meilleure compréhension du fonctionnement des machines synchrones, et de leurs contrôles sur l'ensemble de leur plan d'opération.

Table des matières

Avant-propos *5*

PARTIE 1

Fonctionnement à basse vitesse (enveloppe)

PROBLÈME 1 Machines synchrones excitées (MSE) :
Grandeurs électromécaniques globales 11

PROBLÈME 2 Machines synchrones à réluctance variable (MSRV) :
Grandeurs électromécaniques globales 17

PROBLÈME 3 Machines synchrones excitées (MSE) :
Loi de commande couple maximal par ampère / Grandeurs normalisées 21

PROBLÈME 4 Machines synchrones à réluctance variable (MSRV) :
Loi de commande couple maximal par ampère / Grandeurs normalisées 37

PROBLÈME 5 Machines synchrones excitées (MSE) :
Loi de commande couple maximal par volt (CMPV) 43

PROBLÈME 6 Machines synchrones à réluctance variable (MSRV) :
Loi de commande couple maximal par volt (CMPV) 75

PROBLÈME 7 Machines synchrones excitées (MSE) :
Loi de commande facteur de puissance unitaire 79

PROBLÈME 8 Machines synchrones excitées (MSE) :
Contrôle en boucle ouverte et notion de stabilité 93

PROBLÈME 9 Machines synchrones à réluctance variable (MSRV) :
Contrôle en boucle ouverte et notion de stabilité 157

PROBLÈME 10 Machines synchrones excitées (MSE) :
Fonctionnement en surcharge temporaire / Comparaison des lois de commande 161

PROBLÈME 11 Machines synchrones à réluctance variable (MSRV) :
Fonctionnement en surcharge temporaire / Comparaison des lois de commande 187

PARTIE 2

Fonctionnement au-delà de la vitesse de base (enveloppe)

PROBLÈME 12 Machines synchrones excitées (MSE) :
Représentation des lieux de fonctionnement dans le plan (i_{dn}, i_{qn}) 197

PROBLÈME 13 Machines synchrones à réductance variable (MSRV) :
Représentation des lieux de fonctionnement dans le plan (i_{dn}, i_{qn}) 207

PROBLÈME 14 Commande des machines synchrones à flux d'excitation constant 213

PROBLÈME 15 Commande des machines synchrones à flux d'excitation variable 393

PROBLÈME 16 Commande des machines synchrones à réluctance variable 421

Références bibliograhiques *439*

Index *441*

PARTIE 1

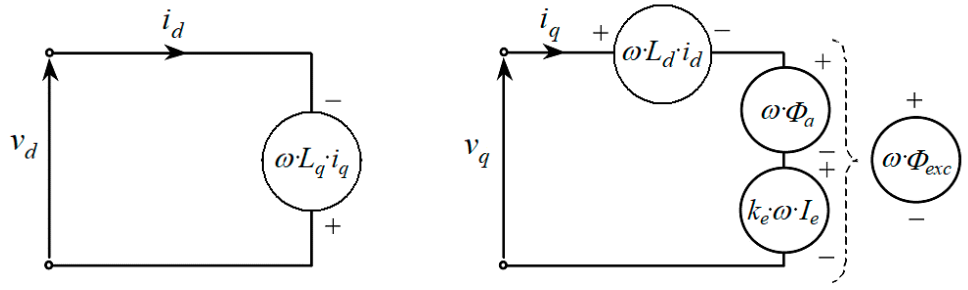
Fonctionnement à basse vitesse (enveloppe)

PROBLÈME 1

Machines synchrones excitées (MSE) : Grandeurs électromécaniques globales

I. Énoncé

La Figure 1.1 présente les circuits électriques équivalents, dans le repère de Park, des machines synchrones excitées, où les pertes sont négligées [1–3]. Ces circuits représentent le modèle équivalent en régime permanent des machines synchrones excitées dans le repère de Park [4]. La Figure 1.2 présente le diagramme de Fresnel correspondant à ce modèle, dans le repère de Park [repère (d, q)] [5], [6].



(a) Circuit électrique équivalent dans l'axe d

(b) Circuit électrique équivalent dans l'axe q

Figure 1.1. Modèle en régime permanent des machines synchrones excitées dans le repère de Park.

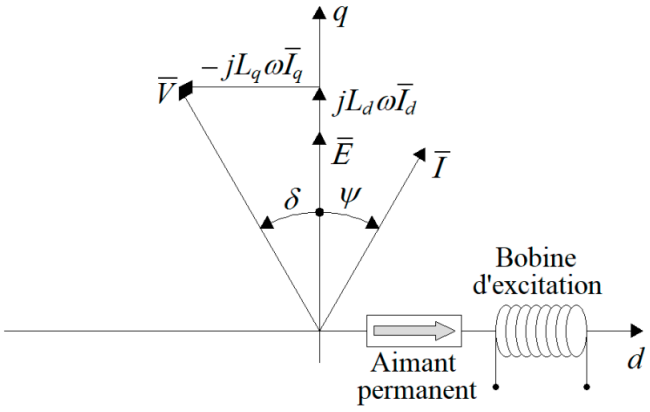


Figure 1.2. Diagramme vectoriel dans le repère (d, q) (référentiel de Park) des machines synchrones.

Le Tableau 1.1 liste les grandeurs et paramètres associés à ce modèle. Ce dernier est général dans le sens où il couvre tous les types de machines synchrones excitées ou pas [5], [6] :

- Les machines synchrones à excitation bobinée ;
- Les machines synchrones à aimants permanents ;
- Les machines synchrones à double excitation ;
- Les machines synchrones à réluctance variable.

Le Tableau 1.2 présente les paramètres spécifiques aux différents types de machines.

Symboles	Significations et unités
i_d, i_q	Composantes du courant d'induit dans les axes d et q (A)
I	Module du courant d'induit dans le repère (d, q) (A)
I_e	Courant d'excitation (A)
v_d, v_q	Composantes de la tension d'induit dans les axes d et q (V)
V	Module de la tension simple d'induit dans le repère (d, q) (V)
E	Module de la FEM dans le repère (d, q) (V)
Φ_a	Flux d'excitation des aimants permanents (Wb)
Φ_{exc}	Flux d'excitation total (Wb)
k_e	Inductance mutuelle « induit/inducteur bobiné » (H)
L_d, L_q	Inductances de l'induit dans les axes d et q (H)
ω	Pulsation électrique (rad/s)
ψ	Déphasage « FEM/courant d'induit » (rad)
δ	Déphasage « FEM/tension d'induit » (angle interne) (rad)

Tableau 1.1. Grandeurs et paramètres des circuits électriques équivalents.

Type de machines synchrones	Valeurs des grandeurs et paramètres
Machines à excitation bobinée	$\Phi_a = 0$ Wb
Machines à aimants permanents	$k_e = 0$ H et pas de circuit inducteur bobiné
Machines à double excitation	$\Phi_a \neq 0$ Wb et $k_e \neq 0$ H
Machines synchrones à réluctance variable	$\Phi_a = 0$ Wb, $k_e = 0$ H et pas de circuit inducteur bobiné

Tableau 1.2. Valeurs des grandeurs et des paramètres pour les différents types de machines synchrones.

Pour les angles, les conventions suivantes sont adoptées [5], [6] :

- L'axe q [axe portant la FEM (force électromotrice)] est considéré comme origine des phases ;
- Les angles sont comptés positifs dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre), et négatifs en sens inverse.

En adoptant ces conventions, l'angle ψ a une valeur négative et l'angle δ a une valeur positive, sur la Figure1.2. Les composantes $\bar{I}_d$ et $\bar{I}_q$, du courant d'induit (Figure 1.2), dans le plan complexe, sont alors définis par :

$$\begin{cases} \bar{I}_d = i_d = -I \cdot \sin(\psi) \\ \bar{I}_q = j \cdot i_q = j \cdot I \cdot \cos(\psi) \end{cases}. \tag{1.1}$$

1/ Exprimer les composantes v_d et v_q en fonction du module V et de l'angle δ.

2/ À l'aide des schémas électriques équivalents, exprimer les composantes v_d et v_q en fonction des composantes i_d et i_q.

3/ Exprimer les composantes i_d et i_q en fonction des composantes v_d et v_q.

4/ Sachant que :

$$\begin{cases} V = \sqrt{v_d^2 + v_q^2} \\ I = \sqrt{i_d^2 + i_q^2} \end{cases}, \tag{1.2}$$

déduire les relations entre les modules V et I.

5/ Déduire les relations entre les angles ψ et δ. On montrera ainsi que :

$$\begin{cases} \mathrm{tg}(\delta) = \dfrac{L_q \cdot I \cdot \cos(\psi)}{\Phi_{exc} - L_d \cdot I \cdot \sin(\psi)} \\ \mathrm{tg}(\psi) = \rho \cdot \left(\dfrac{\Phi_{exc} \cdot p \cdot \Omega - V \cdot \cos(\delta)}{V \cdot \sin(\delta)} \right) \end{cases}, \tag{1.3}$$

où ρ représente le rapport de saillance défini comme suit :

$$\rho = \frac{L_q}{L_d}. \tag{1.4}$$

6/ Donner les expressions de la puissance active absorbée en fonction des composantes de la tension et du courant d'induit, et en fonction des paramètres du modèle.

7/ Les pertes étant négligées, donner les expressions de la puissance mécanique, et en déduire les expressions du couple.

8/ Identifier les différentes composantes du couple.

II. Réponses

1/ Compte tenu des conventions adoptées, les composantes v_d et v_q sont données par :

$$\begin{cases} v_d = -V \cdot \sin(\delta) \\ v_q = V \cdot \cos(\delta) \end{cases}. \tag{1.5}$$

2/ À partir des schémas électriques de la Figure 1.1, les composantes v_d et v_q peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{cases} v_d = j \cdot L_q \cdot \omega \cdot \bar{I}_q = -L_q \cdot \omega \cdot i_q = -L_q \cdot \omega \cdot I \cdot \cos(\psi) \\ v_q = \dfrac{\left(\bar{E} + j \cdot L_d \cdot \omega \cdot \bar{I}_d\right)}{j} = E + L_d \cdot \omega \cdot i_d = E - L_d \cdot \omega \cdot I \cdot \sin(\psi) \end{cases}. \quad (1.6)$$

Il faut noter que : $E = \Phi_{exc} \cdot \omega = \Phi_{exc} \cdot p \cdot \Omega$,

où, p et Ω sont, respectivement, le nombre de paires de pôles, et la vitesse de rotation mécanique.

3/ À partir de l'équation (1.6), il est possible d'exprimer les composantes i_d et i_q en fonction des composantes v_d et v_q, comme suit :

$$\begin{cases} i_d = \dfrac{\left(v_q - \Phi_{exc} \cdot \omega\right)}{L_d \cdot \omega} = \dfrac{V}{L_d \cdot \omega} \cdot \cos(\delta) + \dfrac{\Phi_{exc}}{L_d} \\ i_q = \dfrac{-v_d}{L_q \cdot \omega} = \dfrac{V}{L_q \cdot \omega} \cdot \sin(\delta) \end{cases}. \quad (1.7)$$

4/ À partir de l'équation (1.6), on déduit que :

$$V = \omega \cdot \sqrt{\left(L_q \cdot I \cdot \cos(\psi)\right)^2 + \left(\Phi_{exc} - L_d \cdot I \cdot \sin(\psi)\right)^2}. \quad (1.8)$$

Toujours à partir de l'équation (1.6), on déduit que :

$$I = \sqrt{\left(\frac{V}{L_d \cdot \omega}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{\sin(\delta)}{\rho}\right)^2 + \cos^2(\delta)\right) + \left(\frac{\Phi_{exc}}{L_d}\right)^2 - \frac{2 \cdot \Phi_{exc} \cdot V \cdot \cos(\delta)}{L_d^2 \cdot \omega}}. \quad (1.9)$$

5/ En réécrivant l'équation (1.6) avec explicitation des expressions des composantes v_d et v_q, on aboutit aux expressions suivantes :

$$\begin{cases} v_d = -V \cdot \sin(\delta) = -L_q \cdot \omega \cdot I \cdot \cos(\psi) \\ v_q = V \cdot \cos(\delta) = E - L_d \cdot \omega \cdot I \cdot \sin(\psi) \end{cases},$$

qui permettent de déduire que :

$$\mathrm{tg}(\delta) = \frac{L_q \cdot I \cdot \cos(\psi)}{\Phi_{exc} - L_d \cdot I \cdot \sin(\psi)}. \quad (1.10)$$

En faisant de même pour l'équation (1.7), on peut écrire :

$$\begin{cases} i_d = -I \cdot \sin(\psi) = \dfrac{\left(v_q - \Phi_{exc} \cdot \omega\right)}{L_d \cdot \omega} = \dfrac{V}{L_d \cdot \omega} \cdot \cos(\delta) - \dfrac{\Phi_{exc}}{L_d} \\ i_q = I \cdot \cos(\psi) = \dfrac{-v_d}{L_q \cdot \omega} = \dfrac{V}{L_q \cdot \omega} \cdot \sin(\delta) \end{cases},$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\mathrm{tg}(\psi) = \rho \cdot \left(\frac{\Phi_{exc} \cdot p \cdot \Omega - V \cdot \cos(\delta)}{V \cdot \sin(\delta)} \right). \tag{1.11}$$

6/ La puissance active absorbée est donnée par :

$$P = v_d \cdot i_d + v_q \cdot i_q \,. \tag{1.12}$$

Ce qui nous permet de déduire les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} P &= I \cdot \cos(\psi) \cdot \omega \cdot \left(\Phi_{exc} - \left(L_d - L_q \right) \cdot I \cdot \sin(\psi) \right) \\ &= \frac{V \cdot \sin(\delta)}{L_q} \cdot \left(\Phi_{exc} \cdot \rho + \left(L_d - L_q \right) \cdot \frac{V \cdot \cos(\delta)}{L_d \cdot \omega} \right) \end{aligned} \cdot \tag{1.13}$$

7/ Si les pertes sont négligées, toute la puissance active absorbée est convertie en puissance mécanique, et il est alors possible d'écrire :

$$\begin{aligned} P_{méc.} = P &= I \cdot \cos(\psi) \cdot \omega \cdot \left(\Phi_{exc} - \left(L_d - L_q \right) \cdot I \cdot \sin(\psi) \right) \\ &= \frac{V \cdot \sin(\delta)}{L_q} \cdot \left(\Phi_{exc} \cdot \rho + \left(L_d - L_q \right) \cdot \frac{V \cdot \cos(\delta)}{L_d \cdot \omega} \right) \end{aligned} \quad \cdot \tag{1.14}$$

Étant donné que la puissance mécanique s'exprime également comme suit :

$$P_{méc.} = \Gamma \cdot \Omega \,, \tag{1.15}$$

on en déduit les expressions suivantes pour le couple :

$$\Gamma = p \cdot I \cdot \cos(\psi) \cdot \Phi_{exc} - p \cdot \left(L_d - L_q \right) \cdot I^2 \cdot \frac{\sin(2 \cdot \psi)}{2} \,, \tag{1.16}$$

$$\Gamma = p \cdot \left(\frac{V \cdot \Phi_{exc} \cdot \rho}{L_q \cdot \omega} \right) \cdot \sin(\delta) + p \cdot \frac{\left(L_d - L_q \right)}{L_d \cdot L_q} \cdot \left(\frac{V}{\omega} \right)^2 \cdot \frac{\sin(2 \cdot \delta)}{2} \,. \tag{1.17}$$

8/ Trois composantes sont généralement présentes dans l'expression du couple en régime permanent dans le cadre de l'hypothèse du premier harmonique :

1) Le couple d'interaction « induit/inducteur » ;
2) Le couple réluctant ;
3) Le couple de détente.

Le couple de détente possède une moyenne nulle. Sa fréquence mécanique angulaire dépend de paramètres géométriques et électromagnétiques (nombre de pôles). Pour les machines synchrones « classiques » (induit et inducteur séparés, avec un induit et un inducteur uniformément répartis), cette fréquence dépend du nombre de pôles magnétiques N_P et du nombre d'encoches de l'induit N_S :

$$\text{Fréquence mécanique angulaire du couple de détente} \;=\; \frac{2 \cdot \pi}{\mathrm{PPCM}\left(N_S, N_P \right)} \,. \tag{1.18}$$

Le couple de détente n'apparait pas dans les expressions du couple (1.16) et (1.17), parce que sa fréquence est supérieure à la fréquence fondamentale magnétique :

$$\text{Fréquence fondamentale magnétique} = \frac{2 \cdot \pi}{N_{PP}}, \tag{1.19}$$

où N_{PP} est le nombre de pôles magnétiques de même polarité ($N_P \geq N_{PP}$).

Le couple réluctant est dû à la variation de réluctance vue par le bobinage de l'induit à la fréquence magnétique fondamentale. Les termes correspondants à ce couple dans les expressions (1.16) et (1.17) sont ceux incluant la quantité ($L_d - L_q$). Pour les machines synchrones à réluctance variable, le couple moteur est égal au couple réluctant ; les deux autres termes (couple d'interaction « induit/inducteur », et couple de détente) sont absents.

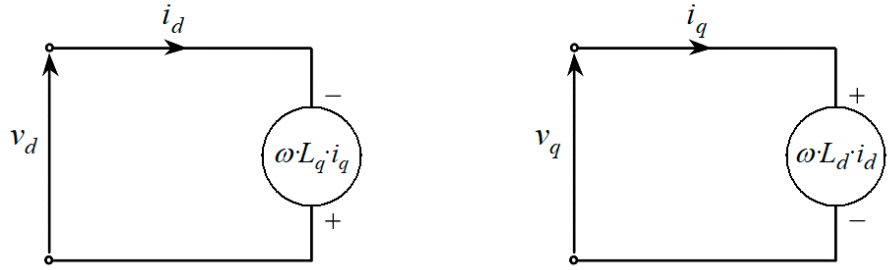
Les termes correspondants au couple d'interaction « induit/inducteur » sont ceux incluant la quantité Φ_{exc}.

PROBLÈME 2

Machines synchrones à réluctance variable (MSRV) : Grandeurs électromécaniques globales

I. Énoncé

La figure suivante (Figure 1.3) présente les circuits électriques équivalents, dans le repère de Park, des machines synchrones à réluctance variable, où les pertes sont négligées. Ces circuits représentent le modèle équivalent en régime permanent de ces machines dans le repère de Park. La Figure 1.4 présente le diagramme de Fresnel correspondant à ce modèle, dans le repère de Park [repère (d, q)] [5], [6].



(a) Circuit électrique équivalent dans l'axe d

(b) Circuit électrique équivalent dans l'axe q

Figure 1.3. Modèle en régime permanent des machines synchrones excitées dans le repère de Park.

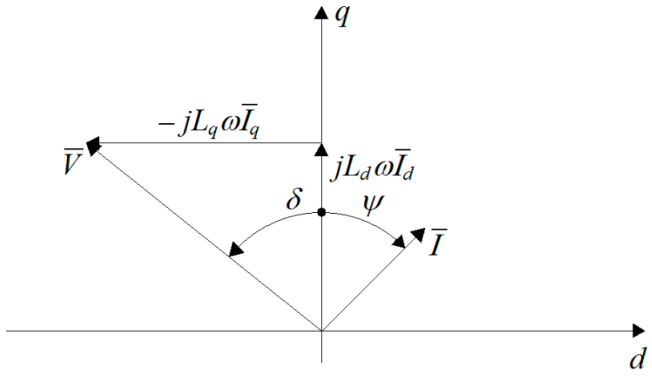


Figure 1.4. Diagramme vectoriel dans le repère (d, q) (référentiel de Park) des machines synchrones à réluctance variable.

Pour les machines synchrones excitées, l'axe direct est celui du flux inducteur maximal. Pour les machines synchrones à réluctance variable, l'absence d'un flux inducteur ne permet pas de définir un axe direct privilégié. Nous faisons le choix, pour nos développements, de définir l'axe direct comme étant celui pour lequel l'inductance est minimale, pour le modèle premier harmonique ($\rho > 1$) [5], [6].

Pour les angles, la même convention définie précédemment est maintenue (l'axe q est considéré comme origine des phases). L'équation (1.1) reste valable.

1/ Exprimer les composantes v_d et v_q en fonction du module V et de l'angle δ.

2/ Exprimer les composantes v_d et v_q en fonction des composantes i_d et i_q.

3/ Exprimer les composantes i_d et i_q en fonction des composantes v_d et v_q.

4/ En déduire les relations entre les modules V et I, et entre les angles ψ et δ.

5/ Donner les expressions de la puissance active absorbée en fonction des composantes de la tension et du courant d'induit, et en fonction des paramètres du modèle.

6/ Les pertes étant négligées, donner les expressions de la puissance mécanique, et en déduire les expressions du couple.

II. Réponses

1/ Compte tenu des conventions adoptées, les composantes v_d et v_q sont données par :

$$\begin{cases} v_d = -V \cdot \sin(\delta) \\ v_q = V \cdot \cos(\delta) \end{cases}. \tag{1.20}$$

2/ À partir des schémas électriques de la Figure 1.3, les composantes v_d et v_q peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{cases} v_d = j \cdot L_q \cdot \omega \cdot \bar{I}_q = -L_q \cdot \omega \cdot i_q = -L_q \cdot \omega \cdot I \cdot \cos(\psi) \\ v_q = \dfrac{j \cdot L_d \cdot \omega \cdot \bar{I}_d}{j} = L_d \cdot \omega \cdot i_d = -L_d \cdot \omega \cdot I \cdot \sin(\psi) \end{cases}. \tag{1.21}$$

3/ À partir de l'équation (1.21), il est possible d'exprimer les composantes i_d et i_q en fonction des composantes v_d et v_q, comme suit :

$$\begin{cases} i_d = \dfrac{v_q}{L_d \cdot \omega} = \dfrac{V}{L_d \cdot \omega} \cdot \cos(\delta) \\ i_q = \dfrac{-v_d}{L_q \cdot \omega} = \dfrac{V}{L_q \cdot \omega} \cdot \sin(\delta) \end{cases}. \tag{1.22}$$

4/ À partir de l'équation (1.21), et sachant que :

$$V = \sqrt{v_d^2 + v_q^2}\ , \tag{1.23}$$

on en déduit que :

$$V = I \cdot L_d \cdot \omega \cdot \sqrt{\left(\rho \cdot \cos(\psi)\right)^2 + \left(\sin(\psi)\right)^2} \,. \qquad (1.24)$$

A partir de l'équation (1.21), et sachant que :

$$I = \sqrt{i_d^2 + i_q^2} \,, \qquad (1.25)$$

on en déduit que :

$$I = \sqrt{\left(\frac{v_q}{L_d \cdot \omega}\right)^2 + \left(\frac{v_d}{L_q \cdot \omega}\right)^2} = \left(\frac{V}{L_d \cdot \omega}\right) \cdot \sqrt{\left(\left(\frac{\sin(\delta)}{\rho}\right)^2 + \cos^2(\delta)\right)} \,. \qquad (1.26)$$

En réécrivant l'équation (1.21) avec explicitation des expressions des composantes v_d et v_q, on aboutit aux expressions suivantes :

$$\begin{cases} v_d = -V \cdot \sin(\delta) = -L_q \cdot \omega \cdot I \cdot \cos(\psi) \\ v_q = V \cdot \cos(\delta) = L_d \cdot \omega \cdot i_d = -L_d \cdot \omega \cdot I \cdot \sin(\psi) \end{cases},$$

qui nous permettent de déduire :

$$\mathrm{tg}(\delta) = \frac{L_q \cdot I \cdot \cos(\psi)}{-L_d \cdot I \cdot \sin(\psi)} = -\frac{\rho}{\mathrm{tg}(\psi)} \,. \qquad (1.27)$$

En faisant de même pour l'équation (1.22), on peut écrire :

$$\begin{cases} i_d = -I \cdot \sin(\psi) = \dfrac{v_q}{L_d \cdot \omega} = \dfrac{V}{L_d \cdot \omega} \cdot \cos(\delta) \\ i_q = I \cdot \cos(\psi) = \dfrac{-v_d}{L_q \cdot \omega} = \dfrac{V}{L_q \cdot \omega} \cdot \sin(\delta) \end{cases},$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\mathrm{tg}(\psi) = -\rho \cdot \left(\frac{V \cdot \cos(\delta)}{V \cdot \sin(\delta)}\right) = -\frac{\rho}{\mathrm{tg}(\delta)} \,. \qquad (1.28)$$

5/ La puissance active absorbée est donnée par :

$$P = v_d \cdot i_d + v_q \cdot i_q \,. \qquad (1.29)$$

Ce qui nous permet de déduire les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} P &= -I^2 \cdot \omega \cdot \left(L_d - L_q\right) \cdot \cos(\psi) \cdot \sin(\psi) \\ &= \frac{V^2}{L_q \cdot L_d \cdot \omega} \cdot \left(L_d - L_q\right) \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(\delta) \end{aligned} \,. \qquad (1.30)$$

6/ Si les pertes sont négligées, toute la puissance absorbée est convertie en puissance mécanique, et il est alors possible d'écrire :

$$\begin{aligned} P_{méc.} = P &= -I^2 \cdot \omega \cdot \left(L_d - L_q\right) \cdot \cos\left(\psi\right) \cdot \sin\left(\psi\right) \\ &= \frac{V^2}{L_q \cdot L_d \cdot \omega} \cdot \left(L_d - L_q\right) \cdot \cos\left(\delta\right) \cdot \sin\left(\delta\right) \end{aligned} . \tag{1.31}$$

Étant donné que la puissance mécanique s'exprime également comme suit :

$$P_{méc.} = \Gamma \cdot \Omega , \tag{1.32}$$

on en déduit les expressions suivantes pour le couple :

$$\begin{aligned} \Gamma &= -p \cdot \left(L_d - L_q\right) \cdot I^2 \cdot \sin\left(\psi\right) \cdot \cos\left(\psi\right) \\ &= -p \cdot \left(L_d - L_q\right) \cdot I^2 \cdot \frac{\sin\left(2 \cdot \psi\right)}{2} \end{aligned} , \tag{1.33}$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= p \cdot \frac{\left(L_d - L_q\right)}{L_d \cdot L_q} \cdot \left(\frac{V}{\omega}\right)^2 \cdot \cos\left(\delta\right) \cdot \sin\left(\delta\right) \\ &= p \cdot \frac{\left(L_d - L_q\right)}{L_d \cdot L_q} \cdot \left(\frac{V}{\omega}\right)^2 \cdot \frac{\sin\left(2 \cdot \delta\right)}{2} \end{aligned} . \tag{1.34}$$

PROBLÈME 3

Machines synchrones excitées (MSE) : Loi de commande couple maximal par ampère / Grandeurs normalisées

I. Énoncé

1/ On notera l'angle ψ permettant de maximiser le couple, pour un couple (I, Φ_{exc}) donné, ψ_{Opt}. À partir de l'expression du couple (1.16), montrer que « sin(ψ_{Opt}) » doit obéir à une équation du second degré.

2/ Déterminer l'expression de l'angle ψ_{Opt}. On distinguera les machines synchrones à pôles lisses, et celles à pôles saillants. On montrera ainsi que [7] :

$$\psi_{Opt} = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho = 1 \\ Arc\sin\left(\dfrac{\Phi_{exc} - \sqrt{\Phi_{exc}^2 + 8 \cdot \left(L_d - L_q\right)^2 \cdot I^2}}{4 \cdot \left(L_d - L_q\right) \cdot I} \right) & \text{si } \rho \neq 1 \end{cases}. \qquad (1.35)$$

3/ Pour l'angle ψ_{Opt}, déterminer la valeur du couple (I, Φ_{exc}) permettant de maximiser le couple.

4/ Dans les conditions permettant de maximiser le couple, trouver la relation entre la vitesse mécanique Ω et le module de la tension V.

5/ Si le module de la tension d'induit est limité ($V = V_{max}$), déterminer la vitesse maximale de fonctionnement, dans ces conditions. On appellera cette vitesse la vitesse de base.

6/ Déterminer l'expression du facteur de puissance dans les conditions permettant de maximiser le couple.

7/ Définir un système de grandeurs normalisées, si les bases de normalisation sont celles définies dans le Tableau 1.3 [5], [6].

8/ Réécrire les relations entre les modules V_n et I_n, et entre les angles ψ et δ, en utilisant les grandeurs et paramètres normalisés (équations (1.6), (1.8), (1.10) et (1.11) du premier problème).

9/ Réécrire les expressions de la puissance active (puissance mécanique) et du couple normalisés, en utilisant les grandeurs et paramètres normalisés (équations (1.13), (1.16) et (1.17) du premier problème).

10/ Tracer les iso-valeurs de ψ_{Opt}, V_{nmax} (valeur normalisée du module maximal de la tension d'induit) et du facteur de puissance à la vitesse de base, dans le plan [L_{dn}

(valeur normalisée de l'inductance L_d), ρ (rapport de saillance)], dans les conditions permettant de maximiser le couple.

11/ Montrer que $V_{n\max} > 1$.

Grandeur	Base de normalisation
Courant de l'induit	Module maximal du courant de l'induit $I_{\max}$
Courant d'excitation	Module maximal du courant d'excitation $I_{e\,\max}$
Flux magnétiques	Flux magnétique d'excitation maximal $\Phi_{exc\,\max}$
Tensions de l'induit	FEM maximale à la vitesse de base
Puissances	Puissance apparente maximale de l'induit
Vitesse mécanique	Vitesse de base Ω_b
Couple	Puissance apparente maximale / Vitesse de base

Tableau 1.3. Bases de normalisation des grandeurs des machines synchrones excitées.

II. Réponses

1/ Pour trouver l'angle ψ_{Opt} permettant de maximiser le couple pour un couple (I, Φ_{exc}) donné, il est nécessaire de résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \psi} = -p \cdot I \cdot \sin(\psi) \cdot \Phi_{exc} - p \cdot \left(L_d - L_q\right) \cdot I^2 \cdot \cos(2 \cdot \psi) = 0\,, \quad (1.36)$$

Sachant que : $\cos(2 \cdot \psi) = 1 - 2 \cdot \sin^2(\psi)$,

l'équation (1.36) peut être réécrite comme suit :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \psi} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \left(L_d - L_q\right) \cdot I \cdot \sin^2(\psi) - \Phi_{exc} \cdot \sin(\psi) - \left(L_d - L_q\right) \cdot I = 0\,, \quad (1.37)$$

On pose $x = \sin(\psi)$, ce qui nous permet d'écrire:

$$2 \cdot \left(L_d - L_q\right) \cdot I \cdot x^2 - \Phi_{exc} \cdot x - \left(L_d - L_q\right) \cdot I = 0\,,$$

qui est une équation du second degré en x.

2/ Deux cas se présentent selon que la machine synchrone est à pôles lisses ($\rho = 1$), ou à pôles saillants ($\rho \neq 1$). Nous allons étudier les deux cas.

2.a/ Machines synchrones à pôles lisses ($\rho = 1$)

Pour les machines synchrones à pôles lisses, on a :

$$\rho = 1 \Leftrightarrow L_q = L_d\,. \quad (1.38)$$

L'équation (1.37) devient : $\Phi_{exc} \cdot x = 0$.

Étant donné que le flux d'excitation Φ_{exc} ne peut être nul $\Rightarrow x = \sin(\psi) = 0$.

On a alors deux solutions pour l'angle ψ sur l'ensemble [0, 2·π] : $\psi = 0$ ou $\psi = \pi$.

Le couple des machines synchrones à pôles lisses étant donné par : $\Gamma = p \cdot I \cdot \cos(\psi) \cdot \Phi_{exc}$,

la solution à retenir, pour le fonctionnement moteur ($\Gamma > 0$ N·m), est :

$$\psi_{\text{Opt}} = 0. \tag{1.39}$$

2.b/ Machines synchrones à pôles saillants ($\rho \neq 1$)

Pour les machines synchrones à pôles saillants, tous les coefficients de l'équation de second degré en x sont non-nuls. Le discriminant de cette équation est donné par :

$$\left(\Delta = \Phi_{exc}^2 + 8 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 \right) > 0.$$

Ce discriminant est toujours positif, nous avons donc deux solutions :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Phi_{exc} - \sqrt{\Delta}}{4 \cdot \left(L_d - L_q \right) \cdot I} \\ x_2 = \dfrac{\Phi_{exc} + \sqrt{\Delta}}{4 \cdot \left(L_d - L_q \right) \cdot I} \end{cases}. \tag{1.40}$$

Nous devons étudier l'existence de ces solutions, et retenir celles permettant de maximiser le couple.

L'étude de l'existence passe par la vérification que :

$$|x_1| \leq 1 \text{ et } |x_2| \leq 1. \tag{1.41}$$

En effet, il ne faut pas oublier que : $x = \sin(\psi)$.

2.b.1/ $|x_1| \leq 1$

Supposons que $|x_1| > 1$:

$$\Rightarrow x_1^2 > 1 \Rightarrow \left(\frac{\left(\Phi_{exc} - \sqrt{\Delta} \right)^2}{16 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2} \right) > 1 \Rightarrow \left[\left(\Phi_{exc} - \sqrt{\Delta} \right)^2 \right] > \left[16 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 \right]$$

$$\Rightarrow \left[\Phi_{exc}^2 - 4 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 \right] > \left[\Phi_{exc} \cdot \sqrt{\Delta} \right].$$

Deux cas sont alors possibles.

2.b.1.a/ $\left[\Phi_{exc}^2 - 4 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 \right] \leq 0$

$$\left[\Phi_{exc}^2 - 4 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 \right] \leq 0 \Rightarrow \Phi_{exc}^2 \leq \left[4 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 \right]$$

$$\Rightarrow \Phi_{exc} \le \left[2 \cdot \left| L_d - L_q \right| \cdot I \right] \Rightarrow \left(\frac{2 \cdot \left| L_d - L_q \right| \cdot I}{\Phi_{exc}} \right) \ge 1$$

$\Rightarrow \left[\Phi_{exc}^2 - 4 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 \right] > \left[\Phi_{exc} \cdot \sqrt{\Delta} \right]$, n'est pas vérifiée, puisque $\left[\Phi_{exc} \cdot \sqrt{\Delta} \right] > 0$.

$\left(|x_1| > 1 \right)$ est donc impossible $\Rightarrow \left(|x_1| \le 1 \right)$.

2.b.1.b/ $\left[\Phi_{exc}^2 - 4 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 \right] > 0$

$$\left[\Phi_{exc}^2 - 4 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 \right] > 0 \Rightarrow \left(\frac{2 \cdot \left| L_d - L_q \right| \cdot I}{\Phi_{exc}} \right) < 1$$

Redémarrons de l'inégalité : $\left[\Phi_{exc}^2 - 4 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 \right] > \left[\Phi_{exc} \cdot \sqrt{\Delta} \right]$

$$\Rightarrow \left[\Phi_{exc}^2 - 4 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 \right]^2 > \left[\Phi_{exc} \cdot \sqrt{\Delta} \right]^2$$

$$\Rightarrow \left[16 \cdot \left(L_d - L_q \right)^4 \cdot I^4 - 16 \cdot \Phi_{exc}^2 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 \right] > 0$$

$$\Rightarrow \left[\left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 \right] > \Phi_{exc}^2 \Rightarrow \left[\left| L_d - L_q \right| \cdot I \right] > \Phi_{exc} \Rightarrow \left(\frac{\left| L_d - L_q \right| \cdot I}{\Phi_{exc}} \right) > 1 .$$

Nous devons vérifier que les deux conditions suivantes sont compatibles :

$$\left(\frac{2 \cdot \left| L_d - L_q \right| \cdot I}{\Phi_{exc}} \right) < 1 \text{ et } \left(\frac{\left| L_d - L_q \right| \cdot I}{\Phi_{exc}} \right) > 1 .$$

Si $\left(\frac{2 \cdot \left| L_d - L_q \right| \cdot I}{\Phi_{exc}} \right) < 1 \Rightarrow \left(\frac{\left| L_d - L_q \right| \cdot I}{\Phi_{exc}} \right) < \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{\left| L_d - L_q \right| \cdot I}{\Phi_{exc}} \right) > 1 \text{ est impossible} \right],$$

$\Rightarrow \left(|x_1| > 1 \right)$ est impossible $\Rightarrow \left(|x_1| \le 1 \right)$.

Nous pouvons conclure que la condition $\left(|x_1| \le 1 \right)$ est toujours vérifiée.

Nous allons réaliser la même étude pour la seconde solution x_2.

2.b.2/ $|x_2| \leq 1$

Supposons que $|x_2| > 1$:

$$\Rightarrow x_2^2 > 1 \Rightarrow \left(\frac{\left(\Phi_{exc} + \sqrt{\Delta} \right)^2}{16 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2} \right) > 1 \Rightarrow \left[\left(\Phi_{exc} + \sqrt{\Delta} \right)^2 \right] > \left[16 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 \right]$$

$$\Rightarrow \left[2 \cdot \Phi_{exc}^2 - 8 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 + 2 \cdot \Phi_{exc} \cdot \sqrt{\Delta} \right] > 0$$

$$\Rightarrow \left[\Phi_{exc}^2 - 4 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 \right] > -\left[\Phi_{exc} \cdot \sqrt{\Delta} \right].$$

Deux cas sont alors possibles.

2.b.2.a/ $\left[\Phi_{exc}^2 - 4 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 \right] \geq 0$

$$\Rightarrow \Phi_{exc}^2 \geq \left[4 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 \right] \Rightarrow \Phi_{exc} \geq \left[2 \cdot \left| L_d - L_q \right| \cdot I \right] \Rightarrow \left(\frac{2 \cdot \left| L_d - L_q \right| \cdot I}{\Phi_{exc}} \right) \leq 1$$

Dans ce cas, $\left[\Phi_{exc}^2 - 4 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 \right] \geq 0 > -\left(\Phi_{exc} \cdot \sqrt{\Delta} \right)$,

ce qui signifie que : $x_2^2 > 1 \Rightarrow |x_2| > 1$

2.b.2.b/ $\left[\Phi_{exc}^2 - 4 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 \right] < 0$

$$\Rightarrow \Phi_{exc}^2 < \left[4 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 \right] \Rightarrow \Phi_{exc} < \left[2 \cdot \left| L_d - L_q \right| \cdot I \right] \Rightarrow \left(\frac{2 \cdot \left| L_d - L_q \right| \cdot I}{\Phi_{exc}} \right) > 1$$

Redémarrons de l'inégalité : $\left[\Phi_{exc}^2 - 4 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 \right] > -\left(\Phi_{exc} \cdot \sqrt{\Delta} \right)$

$\Rightarrow \left[\Phi_{exc}^2 - 4 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 \right]^2 < \left(\Phi_{exc} \cdot \sqrt{\Delta} \right)^2$ (les deux côtés étant négatifs, le sens de l'inégalité doit être inversé) ;

$$\Rightarrow \left[16 \cdot \left(L_d - L_q \right)^4 \cdot I^4 - 16 \cdot \Phi_{exc}^2 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 \right] < 0$$

$$\Rightarrow \left[\left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 - \Phi_{exc}^2 \right] < 0 \Rightarrow \left[\left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 \right] < \Phi_{exc}^2$$

$$\Rightarrow \left[\left| L_d - L_q \right| \cdot I \right] < \Phi_{exc} \Rightarrow \left(\frac{\left| L_d - L_q \right| \cdot I}{\Phi_{exc}} \right) < 1$$

$$\Rightarrow x_2^2 > 1 \Rightarrow |x_2| > 1 .$$

Faisons le point sur les différents cas :

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{2 \cdot \left| L_d - L_q \right| \cdot I}{\Phi_{exc}} \right) \le 1 \right] \Rightarrow |x_2| > 1 \\ \left[\left(\frac{2 \cdot \left| L_d - L_q \right| \cdot I}{\Phi_{exc}} \right) > 1 \text{ et } \left(\frac{\left| L_d - L_q \right| \cdot I}{\Phi_{exc}} \right) < 1 \right] \Rightarrow |x_2| > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\left| L_d - L_q \right| \cdot I}{\Phi_{exc}} \right) \le \frac{1}{2} \Rightarrow |x_2| > 1 \\ 1 > \left(\frac{\left| L_d - L_q \right| \cdot I}{\Phi_{exc}} \right) > \frac{1}{2} \Rightarrow |x_2| > 1 \end{cases} \Rightarrow 1 > \left(\frac{\left| L_d - L_q \right| \cdot I}{\Phi_{exc}} \right) \Rightarrow |x_2| > 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\left| L_d - L_q \right| \cdot I}{\Phi_{exc}} \right) \ge 1 \Rightarrow |x_2| \le 1 .$$

2.b.3/ Quelle solution choisir ?

Dans le cas où les conditions (1.41) sont remplies, à chaque solution correspondront deux angles. Un angle correspond au fonctionnement en mode moteur, et l'autre au mode générateur. Déterminons quelle solution donne la valeur de couple la plus élevée.

Rappelons que :

$$\Gamma = p \cdot I \cdot \cos(\psi) \cdot \left(\Phi_{exc} - \left(L_d - L_q \right) \cdot I \cdot \sin(\psi) \right),$$

$$\text{et } \begin{cases} x_1 = \sin(\psi_1) = \frac{\Phi_{exc} - \sqrt{\Delta}}{4 \cdot \left(L_d - L_q \right) \cdot I} \\ x_2 = \sin(\psi_2) = \frac{\Phi_{exc} + \sqrt{\Delta}}{4 \cdot \left(L_d - L_q \right) \cdot I} \end{cases}$$

Pour commencer nous allons déterminer les expressions des couples pour chaque solution.

$$\Gamma_1 = \Gamma\left(x = x_1\right) = p \cdot I \cdot \cos\left(\psi_1\right) \cdot \left(\Phi_{exc} - \left(L_d - L_q\right) \cdot I \cdot \left(\frac{\Phi_{exc} - \sqrt{\Delta}}{4 \cdot \left(L_d - L_q\right) \cdot I} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \Gamma_1 = p \cdot I \cdot \cos\left(\psi_1\right) \cdot \left(\frac{3 \cdot \Phi_{exc} + \sqrt{\Delta}}{4} \right).$$

$$\Gamma_2 = \Gamma\left(x = x_2\right) = p \cdot I \cdot \cos\left(\psi_2\right) \cdot \left(\Phi_{exc} - \left(L_d - L_q\right) \cdot I \cdot \left(\frac{\Phi_{exc} + \sqrt{\Delta}}{4 \cdot \left(L_d - L_q\right) \cdot I} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \Gamma_2 = p \cdot I \cdot \cos\left(\psi_2\right) \cdot \left(\frac{3 \cdot \Phi_{exc} - \sqrt{\Delta}}{4} \right).$$

Notez que les angles ψ_1 et ψ_2 ont deux valeurs chacun. Pour l'une des valeurs, le cosinus sera positif, et pour l'autre, il sera négatif. Pour une valeur, le mode de fonctionnement correspondra à un mode moteur, et pour l'autre, à un mode générateur. Ce qu'il faut alors comparer, ce sont les valeurs absolues de Γ_1 et Γ_2.

$$\begin{cases} \left|\Gamma_1\right| = p \cdot I \cdot \left|\cos\left(\psi_1\right)\right| \cdot \left| \frac{3 \cdot \Phi_{exc} + \sqrt{\Delta}}{4} \right| = p \cdot I \cdot \left|\cos\left(\psi_1\right)\right| \cdot \left(\frac{3 \cdot \Phi_{exc} + \sqrt{\Delta}}{4} \right) \\ \left|\Gamma_2\right| = p \cdot I \cdot \left|\cos\left(\psi_2\right)\right| \cdot \left| \frac{3 \cdot \Phi_{exc} - \sqrt{\Delta}}{4} \right| \end{cases}.$$

A ce stade, il faut remarquer que : $\left(\frac{3 \cdot \Phi_{exc} + \sqrt{\Delta}}{4} \right) > \left| \frac{3 \cdot \Phi_{exc} - \sqrt{\Delta}}{4} \right|$.

Il suffit donc de montrer que: $\left|\cos\left(\psi_1\right)\right| > \left|\cos\left(\psi_2\right)\right| \Rightarrow \left|\Gamma_1\right| > \left|\Gamma_2\right|$.

$$\left|\cos\left(\psi_1\right)\right| > \left|\cos\left(\psi_2\right)\right| \Rightarrow \cos^2\left(\psi_1\right) > \cos^2\left(\psi_2\right)$$

$$\Rightarrow \left[1 - \cos^2\left(\psi_1\right)\right] < \left[1 - \cos^2\left(\psi_2\right)\right]$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(\psi_1\right) < \sin^2\left(\psi_2\right) \Rightarrow \left|\sin\left(\psi_2\right)\right| > \left|\sin\left(\psi_1\right)\right| \Rightarrow \left|x_2\right| > \left|x_1\right|$$

$$\left.\begin{cases} \left|x_1\right| = \frac{\left|\Phi_{exc} - \sqrt{\Delta}\right|}{4 \cdot \left|L_d - L_q\right| \cdot I} \\ \left|x_2\right| = \frac{\Phi_{exc} + \sqrt{\Delta}}{4 \cdot \left|L_d - L_q\right| \cdot I} \end{cases}\right\} \Rightarrow \left|x_2\right| > \left|x_1\right| \Rightarrow \left|\cos\left(\psi_1\right)\right| > \left|\cos\left(\psi_2\right)\right| \Rightarrow \left|\Gamma_1\right| > \left|\Gamma_2\right|.$$

Dans tous les cas, la solution à choisir est x_1, et l'angle correspondant pour le mode moteur :

$$\psi_{\text{Opt}} = Arc\sin\left(\frac{\Phi_{exc} - \sqrt{\Phi_{exc}^2 + 8\cdot\left(L_d - L_q\right)^2\cdot I^2}}{4\cdot\left(L_d - L_q\right)\cdot I}\right). \qquad (1.42)$$

Finalement, nous pouvons écrire :

$$\psi_{\text{Opt}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho = 1 \\ Arc\sin\left(\dfrac{\Phi_{exc} - \sqrt{\Phi_{exc}^2 + 8\cdot\left(L_d - L_q\right)^2\cdot I^2}}{4\cdot\left(L_d - L_q\right)\cdot I}\right) & \text{si } \rho \neq 1 \end{cases}.$$

3/ Comme pour la question précédente, nous distinguerons les deux cas correspondants aux machines synchrones à pôles lisses, et aux machines à pôles saillants.

3.a/ Machines synchrones à pôles lisses ($\rho = 1$)

Le couple pour l'angle ψ_{Opt} est donné par :

$$\Gamma = p\cdot\Phi_{exc}\cdot I\cdot\cos\left(\psi_{\text{Opt}}\right) = p\cdot\Phi_{exc}\cdot I\,.$$

Le couple maximal est obtenu pour les valeurs maximales du module du courant d'induit I et du flux d'excitation Φ_{exc} respectivement.

3.b/ Machines synchrones à pôles saillants ($\rho \neq 1$)

Le couple moteur pour l'angle ψ_{Opt} est donné par :

$$\Gamma = p\cdot I\cdot\cos\left(\psi_{\text{Opt}}\right)\cdot\left(\Phi_{exc} - \left(L_d - L_q\right)\cdot I\cdot\sin\left(\psi_{\text{Opt}}\right)\right)$$

$$= p\cdot I\cdot\left|\cos\left(\psi_{\text{Opt}}\right)\right|\cdot\left|\left(\Phi_{exc} - \left(L_d - L_q\right)\cdot I\cdot\sin\left(\psi_{\text{Opt}}\right)\right)\right|.$$

Sachant que :

$$\sin\left(\psi_{\text{Opt}}\right) = \left(\frac{\Phi_{exc} - \sqrt{\Phi_{exc}^2 + 8\cdot\left(L_d - L_q\right)^2\cdot I^2}}{4\cdot\left(L_d - L_q\right)\cdot I}\right)$$

$$\Rightarrow\left|\cos\left(\psi_{\text{Opt}}\right)\right| = \sqrt{1 - \sin^2\left(\psi_{\text{Opt}}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{\Phi_{exc} - \sqrt{\Phi_{exc}^2 + 8\cdot\left(L_d - L_q\right)^2\cdot I^2}}{4\cdot\left(L_d - L_q\right)\cdot I}\right)^2}$$

$$\Rightarrow\left|\cos\left(\psi_{\text{Opt}}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{4\cdot\left(L_d - L_q\right)^2\cdot I^2 - \Phi_{exc}^2 + \Phi_{exc}\cdot\sqrt{\Phi_{exc}^2 + 8\cdot\left(L_d - L_q\right)^2\cdot I^2}}{8\cdot\left(L_d - L_q\right)^2\cdot I^2}\right)}$$

$$\Rightarrow \Gamma = \left[p \cdot I \cdot \sqrt{\left(\frac{4 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 - \Phi_{exc}^2 + \Phi_{exc} \cdot \sqrt{\Phi_{exc}^2 + 8 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2}}{8 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2} \right)} \times \left| \left(\Phi_{exc} - \left(L_d - L_q \right) \cdot I \cdot \left(\frac{\Phi_{exc} - \sqrt{\Phi_{exc}^2 + 8 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2}}{4 \cdot \left(L_d - L_q \right) \cdot I} \right) \right) \right| \right]$$

$$\Rightarrow \Gamma = \left[p \cdot \sqrt{\left(\frac{\left(4 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 - \Phi_{exc}^2 + \Phi_{exc} \cdot \sqrt{\Phi_{exc}^2 + 8 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2} \right)}{8 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2} \right)} \times \left(\frac{3 \cdot \Phi_{exc} + \sqrt{\Phi_{exc}^2 + 8 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2}}{4} \right) \right]. \quad (1.43)$$

A partir de l'expression du couple (1.43), on peut voir que le couple maximal est obtenu pour la valeur maximale du module du courant d'induit $I_{\max}$ (valeur nominale du courant). Cette valeur est limitée soit par les contraintes thermiques du système d'entraînement (convertisseur et/ou machine), soit par la contrainte de démagnétisation des aimants permanents, s'il s'agit d'une machines contenant des aimants permanents.
Pour déterminer la valeur du flux d'excitation Φ_{exc} permettant de maximiser le couple, il suffit d'étudier le comportement de la fonction suivante :

$$f = \left[4 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 - \Phi_{exc}^2 + \Phi_{exc} \cdot \sqrt{\Phi_{exc}^2 + 8 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2} \right].$$

Calculons sa dérivée par rapport au flux d'excitation Φ_{exc}. On montre que :

$$\frac{\partial f}{\partial \Phi_{exc}} = 2 \cdot \left(\frac{\Phi_{exc}^2 + 4 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 - \Phi_{exc} \cdot \sqrt{\Phi_{exc}^2 + 8 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2}}{\sqrt{\Phi_{exc}^2 + 8 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2}} \right).$$

Etudions le signe de cette dérivée, qui est équivalent au signe de :

$$\left(\Phi_{exc}^2 + 4 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2 - \Phi_{exc} \cdot \sqrt{\Phi_{exc}^2 + 8 \cdot \left(L_d - L_q \right)^2 \cdot I^2} \right).$$

$$\left(\Phi_{exc}^2+4\cdot\left(L_d-L_q\right)^2\cdot I^2-\Phi_{exc}\cdot\sqrt{\Phi_{exc}^2+8\cdot\left(L_d-L_q\right)^2\cdot I^2}\right)>0$$

$$\Rightarrow\left(\Phi_{exc}^2+4\cdot\left(L_d-L_q\right)^2\cdot I^2\right)>\left[\Phi_{exc}\cdot\sqrt{\Phi_{exc}^2+8\cdot\left(L_d-L_q\right)^2\cdot I^2}\right]$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\Phi_{exc}^4+16\cdot\left(L_d-L_q\right)^4\cdot I^4\\ \quad+8\cdot\Phi_{exc}^2\cdot\left(L_d-L_q\right)^2\cdot I^2\end{array}\right]>\left[\Phi_{exc}^4+8\cdot\Phi_{exc}^2\cdot\left(L_d-L_q\right)^2\cdot I^2\right]$$

$$\Rightarrow\left[16\cdot\left(L_d-L_q\right)^4\cdot I^4\right]>0\text{, ce qui est toujours vrai}\Rightarrow\left(\frac{\partial f}{\partial\Phi_{exc}}\right)>0\,.$$

Le couple est une fonction monotone croissante en fonction du flux d'excitation Φ_{exc}. Le couple maximal est alors obtenu pour la valeur maximale du flux d'excitation.
Le couple maximal est obtenu dans les conditions suivantes :

$$\begin{cases}I=I_{\max}\\ \Phi_{exc}=\Phi_{exc\max}\\ \psi=\psi_{\mathrm{Opt}}\left[\text{équation (1.42)}\right]\end{cases}\,. \tag{1.44}$$

4/ Dans les conditions décrites par l'équation (1.44), le module de la tension est donné par :

$$V=\omega\cdot\sqrt{\left(L_q\cdot I_{\max}\cdot\cos\left(\psi_{\mathrm{Opt}}\right)\right)^2+\left(\Phi_{exc\max}-L_d\cdot I_{\max}\cdot\sin\left(\psi_{\mathrm{Opt}}\right)\right)^2}\,. \tag{1.45}$$

Sachant que pour les machines synchrones : $\omega=p\cdot\Omega$, la vitesse est alors donnée par :

$$\Omega=\frac{V}{p\cdot\sqrt{\left(L_q\cdot I_{\max}\cdot\cos\left(\psi_{\mathrm{Opt}}\right)\right)^2+\left(\Phi_{exc\max}-L_d\cdot I_{\max}\cdot\sin\left(\psi_{\mathrm{Opt}}\right)\right)^2}}\,. \tag{1.46}$$

5/ Telle que définie dans l'énoncé, la vitesse de base, notée Ω_b, est donnée par :

$$\Omega_b=\frac{V_{\max}}{p\cdot\sqrt{\left(L_q\cdot I_{\max}\cdot\cos\left(\psi_{\mathrm{Opt}}\right)\right)^2+\left(\Phi_{exc\max}-L_d\cdot I_{\max}\cdot\sin\left(\psi_{\mathrm{Opt}}\right)\right)^2}}\,. \tag{1.47}$$

6/ Le facteur de puissance, dans les conditions décrites par l'équation (1.44), est donné par :

$$FP=\frac{\cos\left(\psi_{\mathrm{Opt}}\right)\cdot\left(\Phi_{exc\max}-\left(L_d-L_q\right)\cdot I_{\max}\cdot\sin\left(\psi_{\mathrm{Opt}}\right)\right)}{\sqrt{\left(L_q\cdot I_{\max}\cdot\cos\left(\psi_{\mathrm{Opt}}\right)\right)^2+\left(\Phi_{exc\max}-L_d\cdot I_{\max}\cdot\sin\left(\psi_{\mathrm{Opt}}\right)\right)^2}}\,. \tag{1.48}$$

7/ L'utilisation des grandeurs normalisées permet d'identifier les principaux paramètres caractéristiques influençant les performances des machines synchrones. À noter que l'indice « *n* » est utilisé pour certains paramètres et grandeurs normalisés.

Pour commencer, nous définissons les valeurs normalisées des courants d'induit et d'excitation :

$$I_n = \frac{I}{I_{\max}} = \frac{\sqrt{i_d^2 + i_q^2}}{I_{\max}} = \sqrt{i_{dn}^2 + i_{qn}^2} \text{ et } I_{en} = \frac{I_e}{I_{e\max}}. \quad (1.49)$$

On distingue souvent deux types de flux magnétiques, dans les machines synchrones excitées :

- Le flux magnétique d'excitation ;
- Le flux de réaction magnétique d'induit.

L'expression générale du flux d'excitation est donnée par :

$$\Phi_{exc} = \Phi_a + k_e \cdot I_e. \quad (1.50)$$

L'adaptation des valeurs des grandeurs, dans cette expression, selon le type de machines synchrones excitées se fait selon les données du Tableau 1.2. Pour les machines à double excitation, le flux d'excitation total est la somme du flux des aimants permanents et de l'inducteur bobiné. En adoptant le flux magnétique d'excitation maximal comme base de normalisation on a :

$$k_f = \frac{\Phi_{exc}}{\Phi_{exc\max}} = \frac{\Phi_a}{\Phi_{exc\max}} + \frac{k_e \cdot I_e}{\Phi_{exc\max}} = \alpha + \frac{k_e \cdot I_e}{\Phi_{exc\max}},$$

que l'on peut réécrire comme suit :

$$k_f = \alpha + \left(\frac{k_e \cdot I_{e\max}}{\Phi_{exc\max}}\right) \cdot \left(\frac{I_e}{I_{e\max}}\right) = \alpha + \left(\frac{k_e \cdot I_{e\max}}{\Phi_{exc\max}}\right) \cdot I_{en}. \quad (1.51)$$

k_f et α sont respectivement nommés coefficient d'excitation, et taux d'hybridation. On définit également l'inductance mutuelle « induit/inducteur bobiné » normalisée :

$$k_{en} = \frac{k_e \cdot I_{e\max}}{\Phi_{exc\max}}. \quad (1.52)$$

Pour les machines synchrones excitées, pour lesquelles il est possible de faire varier le flux d'excitation entre 0 Wb et $\Phi_{exc\max}$, on a :

$$k_f \in [0,1]. \quad (1.53)$$

Le Tableau 1.2 défini précédemment pour différencier les différents types de machines synchrones, et redéfini ci-dessous en utilisant les grandeurs et paramètres normalisés.

Type de machines synchrones	Valeurs des grandeurs et paramètres normalisés
Machines à excitation bobinée	$\alpha = 0$
Machines à aimants permanents	$k_{en} = 0$ et pas de circuit inducteur bobiné
Machines à double excitation	$\alpha \neq 0$ et $k_{en} \neq 0$
Machines synchrones à réluctance variable	$\alpha = 0$, $k_{en} = 0$ et pas de circuit inducteur bobiné ($k_f = 0$)

Tableau 1.4. Valeurs des grandeurs et des paramètres normalisés pour les différents types de machines synchrones.

Le flux de la réaction magnétique d'induit, noté Φ_{rmi}, peut être décomposé selon les axes *d* et *q* comme suit :

$$\begin{cases} \Phi_{rmid} = L_d \cdot i_d \\ \Phi_{rmiq} = L_q \cdot i_q \end{cases}. \tag{1.54}$$

La valeur normalisée du flux du module de la réaction magnétique d'induit est donnée par :

$$\Phi_{rmi\ n} = \frac{\Phi_{rmi}}{\Phi_{exc\max}} = \frac{\sqrt{\Phi_{rmid}^2 + \Phi_{rmiq}^2}}{\Phi_{exc\max}} = \sqrt{\Phi_{rmidn}^2 + \Phi_{rmiqn}^2}\ , \tag{1.55}$$

où,

$$\begin{cases} \Phi_{rmidn} = \dfrac{L_d \cdot i_d}{\Phi_{exc\max}} = \left(\dfrac{L_d \cdot I_{\max}}{\Phi_{exc\max}}\right) \cdot \left(\dfrac{i_d}{I_{\max}}\right) = L_{dn} \cdot i_{dn} \\ \Phi_{rmiqn} = \dfrac{L_q \cdot i_q}{\Phi_{exc\max}} = \left(\dfrac{L_q \cdot I_{\max}}{\Phi_{exc\max}}\right) \cdot \left(\dfrac{i_q}{I_{\max}}\right) = L_{qn} \cdot i_{qn} \end{cases}. \tag{1.56}$$

Il faut retenir que :

$$\begin{cases} L_{dn} = \dfrac{L_d \cdot I_{\max}}{\Phi_{exc\max}} \\ L_{qn} = \dfrac{L_q \cdot I_{\max}}{\Phi_{exc\max}} = \rho \cdot L_{dn} \end{cases}. \tag{1.57}$$

Le module normalisé de la tension d'induit est donné par :

$$V_n = \frac{V}{p \cdot \Omega_b \cdot \Phi_{exc\max}}. \tag{1.58}$$

La puissance active absorbée (puissance mécanique) normalisée est donnée par :

$$P_n = \frac{P}{V_{\max} \cdot I_{\max}} = \frac{v_d \cdot i_d + v_q \cdot i_q}{V_{\max} \cdot I_{\max}} = v_{dn} \cdot i_{dn} + v_{qn} \cdot i_{qn}. \tag{1.59}$$

Puisque les pertes sont négligées, la puissance active absorbée est égale à la puissance mécanique. Telle que définie par l'équation (1.59), la puissance active normalisée à la vitesse de base est égale au facteur de puissance à cette vitesse.

La valeur normalisée de la vitesse de rotation est donnée par :

$$\Omega_n = \frac{\Omega}{\Omega_b}. \tag{1.60}$$

Enfin, la valeur normalisée du couple est donnée par :

$$\Gamma_n = \frac{\Gamma}{\left(\dfrac{V_{\max} \cdot I_{\max}}{\Omega_b}\right)} = \frac{P_n}{\Omega_n}. \tag{1.61}$$

8/ Les équations (1.8), (1.9), (1.10) et (1.11), du premier problème, peuvent être réécrites, en utilisant les grandeurs et paramètres normalisés, comme suit :

$$V_n = \Omega_n \cdot \sqrt{\left(L_{qn} \cdot I_n \cdot \cos(\psi)\right)^2 + \left(k_f - L_{dn} \cdot I_n \cdot \sin(\psi)\right)^2}\,, \qquad (1.62)$$

$$I_n = \sqrt{\left(\frac{V_n}{L_{dn} \cdot \Omega_n}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{\sin(\delta)}{\rho}\right)^2 + \cos^2(\delta)\right) + \left(\frac{k_f}{L_{dn}}\right)^2 - \frac{2 \cdot k_f \cdot V_n \cdot \cos(\delta)}{L_{dn}^2 \cdot \Omega_n}}\,, \qquad (1.63)$$

$$\mathrm{tg}(\delta) = \frac{L_{qn} \cdot I_n \cdot \cos(\psi)}{k_f - L_{dn} \cdot I_n \cdot \sin(\psi)}\,, \qquad (1.64)$$

$$\mathrm{tg}(\psi) = \rho \cdot \left(\frac{k_f \cdot \Omega_n - V_n \cdot \cos(\delta)}{V_n \cdot \sin(\delta)}\right). \qquad (1.65)$$

9/ Les équations (1.13), (1.16) et (1.17), du premier problème, peuvent être réécrites, en utilisant les grandeurs et paramètres normalisés, comme suit :

$$\begin{aligned} P_n &= I_n \cdot \cos(\psi) \cdot \frac{\Omega_n}{V_{n\max}} \cdot \left(k_f - \left(L_{dn} - L_{qn}\right) \cdot I_n \cdot \sin(\psi)\right) \\ &= \frac{V_n \cdot \sin(\delta)}{V_{n\max} \cdot L_{qn}} \cdot \left(k_f \cdot \rho + \left(L_{dn} - L_{qn}\right) \cdot \frac{V_n \cdot \cos(\delta)}{L_{dn} \cdot \Omega_n}\right) \end{aligned}\,, \qquad (1.66)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= \frac{I_n}{V_{n\max}} \cdot \cos(\psi) \cdot \left(k_f - \left(L_{dn} - L_{qn}\right) \cdot I_n \cdot \sin(\psi)\right) \\ &= \frac{1}{V_{n\max}} \cdot \left(I_n \cdot \cos(\psi) \cdot k_f - \left(L_{dn} - L_{qn}\right) \cdot I_n^2 \cdot \frac{\sin(2 \cdot \psi)}{2}\right) \end{aligned}\,, \qquad (1.67)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= \frac{V_n \cdot \sin(\delta)}{V_{n\max} \cdot L_{qn} \cdot \Omega_n} \cdot \left(k_f \cdot \rho + \left(L_{dn} - L_{qn}\right) \cdot \frac{V_n \cdot \cos(\delta)}{L_{dn} \cdot \Omega_n}\right) \\ &= \frac{1}{V_{n\max}} \cdot \left[\left(\frac{V_n \cdot k_f \cdot \rho}{L_{qn} \cdot \Omega_n}\right) \cdot \sin(\delta) + \frac{\left(L_{dn} - L_{qn}\right)}{L_{dn} \cdot L_{qn}} \cdot \left(\frac{V_n}{\Omega_n}\right)^2 \cdot \frac{\sin(2 \cdot \delta)}{2}\right] \end{aligned}\,. \qquad (1.68)$$

Dans ces équations :

$$V_{n\max} = \frac{V_{\max}}{p \cdot \Omega_b \cdot \Phi_{exc\max}} = \sqrt{\left(L_{qn} \cdot \cos\left(\psi_{\mathrm{Opt}}\right)\right)^2 + \left(1 - L_{dn} \cdot \sin\left(\psi_{\mathrm{Opt}}\right)\right)^2}\,,$$

avec,

$$\psi_{\mathrm{Opt}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho = 1 \\ Arc\sin\left(\dfrac{1 - \sqrt{1 + 8 \cdot L_{dn}^2 \cdot (1 - \rho)^2}}{4 \cdot L_{dn} \cdot (1 - \rho)}\right) & \text{si } \rho \neq 1 \end{cases}. \qquad (1.69)$$

10/ Les Figures 1.5, 1.6 et 1.7 montrent les iso-valeurs de ψ_{Opt}, $V_{n\max}$ (valeur normalisée du module maximal de la tension d'induit) et du facteur de puissance à la vitesse de base, dans le plan [L_{dn} (valeur normalisée de l'inductance L_d), ρ (rapport de saillance)], dans les conditions permettant de maximiser le couple.

> ⚠ Les scripts MATLAB utilisés pour tracer ces courbes sont disponibles *via* le lien indiqué en page 5.

11/ À partir de l'équation (1.69), on remarque que pour $\rho \le 1$, on a :

$$\sin\left(\psi_{\text{Opt}}\right) \le 0 \Rightarrow \left(1 - L_{dn} \cdot \sin\left(\psi_{\text{Opt}}\right)\right) \ge 1$$

$$\Rightarrow \left(V_{n\max} = \sqrt{\left(L_{qn} \cdot \cos\left(\psi_{\text{Opt}}\right)\right)^2 + \left(1 - L_{dn} \cdot \sin\left(\psi_{\text{Opt}}\right)\right)^2} \right) > 1 .$$

Démonstration

Pour les machines synchrones à pôles lisses ($\rho = 1$), on a :

$$\psi_{\text{Opt}} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \sin\left(\psi_{\text{Opt}}\right) = 0 \\ \cos\left(\psi_{\text{Opt}}\right) = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left(V_{n\max} = \sqrt{L_{dn}^2 + 1} \right) > 1 .$$

Pour les machines synchrones à pôles saillants avec $\rho < 1$, on a :

$$\rho < 1 \Rightarrow \left[\sin\left(\psi_{\text{Opt}}\right) = \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 8 \cdot L_{dn}^2 \cdot (1-\rho)^2}}{4 \cdot L_{dn} \cdot (1-\rho)} \right) \right] < 0$$

$$\Rightarrow \left(1 - L_{dn} \cdot \sin\left(\psi_{\text{Opt}}\right)\right) > 1$$

$$\Rightarrow \left(V_{n\max} = \sqrt{\left(L_{qn} \cdot \cos\left(\psi_{\text{Opt}}\right)\right)^2 + \left(1 - L_{dn} \cdot \sin\left(\psi_{\text{Opt}}\right)\right)^2} \right) > 1 .$$

Etudions maintenant le cas des machines synchrones à pôles saillants avec $\rho > 1$. On a :

$$V_{n\max} = \sqrt{\left(L_{qn} \cdot \cos\left(\psi_{\text{Opt}}\right)\right)^2 + \left(1 - L_{dn} \cdot \sin\left(\psi_{\text{Opt}}\right)\right)^2} ,$$

$$\Rightarrow V_{n\max}^2 = \left((\rho \cdot L_{dn})^2 + 1 + \left(1 - \rho^2\right) \cdot L_{dn}^2 \cdot \sin^2\left(\psi_{\text{Opt}}\right) - 2 \cdot L_{dn} \cdot \sin\left(\psi_{\text{Opt}}\right) \right),$$

$$\Rightarrow \left(V_{n\max}^2 - 1 \right) = \left((\rho \cdot L_{dn})^2 + \left(1 - \rho^2\right) \cdot L_{dn}^2 \cdot \sin^2\left(\psi_{\text{Opt}}\right) - 2 \cdot L_{dn} \cdot \sin\left(\psi_{\text{Opt}}\right) \right),$$

avec : $\sin\left(\psi_{\text{Opt}}\right) = \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 8 \cdot L_{dn}^2 \cdot (1-\rho)^2}}{4 \cdot L_{dn} \cdot (1-\rho)} \right)$.

Posons : $y = 1 - \sqrt{1 + 8 \cdot (1-\rho)^2 \cdot L_{dn}^2}$, et notons que : $y < 0$.

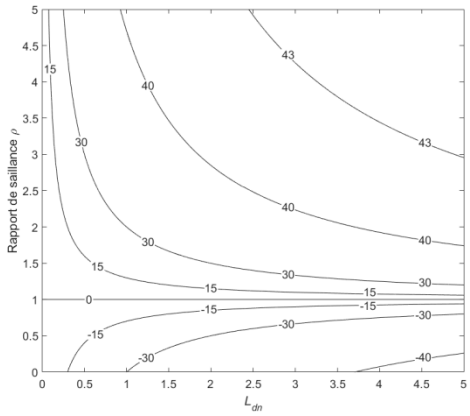


Figure 1.5. Iso-valeurs de ψ_{Opt} dans les conditions permettant de maximiser le couple (valeurs des angles en degré).

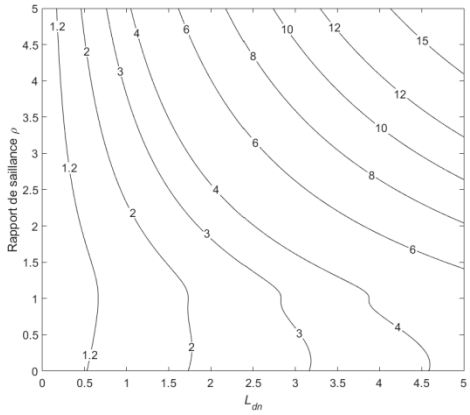


Figure 1.6. Iso-valeurs de $V_{n\max}$.

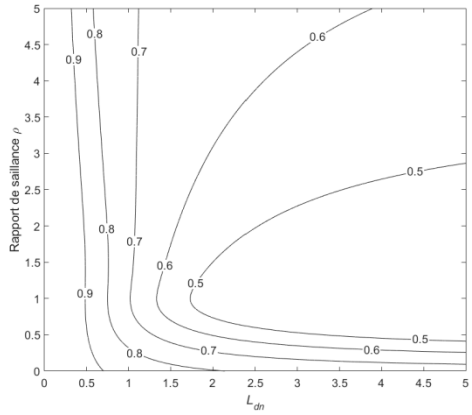


Figure 1.7. Iso-valeurs du facteur de puissance à la vitesse de base, dans les conditions permettant de maximiser le couple.

On peut alors écrire :

$$\begin{cases} \sin\left(\psi_{\text{Opt}}\right) = \left(\dfrac{y}{4\cdot(1-\rho)\cdot L_{dn}}\right) \\ L_{dn}^2 = \left(\dfrac{(y-1)^2-1}{8\cdot(1-\rho)^2}\right) \end{cases},$$

$$\Rightarrow \left(V_{n\max}^2 - 1\right) = \left(\begin{array}{l} (\rho\cdot L_{dn})^2 + \left(1-\rho^2\right)\cdot L_{dn}^2 \cdot \left(\dfrac{y}{4\cdot(1-\rho)\cdot L_{dn}}\right)^2 \\ \quad -2\cdot L_{dn}\cdot\left(\dfrac{y}{4\cdot(1-\rho)\cdot L_{dn}}\right) \end{array} \right),$$

$$\Rightarrow\left(V_{n\max}^2-1\right)=\left(\left(\rho^2\cdot\left(\frac{(y-1)^2-1}{8\cdot(1-\rho)^2}\right)\right)+\left(1-\rho^2\right)\cdot\left(\frac{y^2}{16\cdot(1-\rho)^2}\right)-\left(\frac{y}{2\cdot(1-\rho)}\right)\right),$$

$$\Rightarrow 16\cdot(1-\rho)^2\cdot\left(V_{n\max}^2-1\right)=y\cdot\left(\left(2\cdot\rho^2+\left(1-\rho^2\right)\right)\cdot y-4\cdot\rho^2-8\cdot(1-\rho)\right),$$

$$\Rightarrow 16\cdot(1-\rho)^2\cdot\left(V_{n\max}^2-1\right)=y\cdot\left(\left(\rho^2+1\right)\cdot y-\left(4\cdot\rho^2-8\cdot\rho+8\right)\right).$$

Etudions le signe de la partie droite de cette égalité :

$$f(y)=y\cdot\left(\left(\rho^2+1\right)\cdot y-\left(4\cdot\rho^2-8\cdot\rho+8\right)\right).$$

Il s'agit d'une équation du second degré en y, qui admet deux solutions. On a :

$$f(y)=0\Rightarrow\begin{cases}y_1=0\\ y_2=\dfrac{\left(4\cdot\rho^2-8\cdot\rho+8\right)}{\left(\rho^2+1\right)}\end{cases}.$$

Etudions le signe de y_2. Son signe est celui de : $h(\rho)=\left(4\cdot\rho^2-8\cdot\rho+8\right)$.

$h(\rho)$ est une équation du second degré en ρ. Calculons son discriminant :

$$\left(\Delta=64-128=-64\right)<0\Rightarrow h(\rho)=\left(4\cdot\rho^2-8\cdot\rho+8\right)>0$$

$$\Rightarrow\left(y_2=\frac{\left(4\cdot\rho^2-8\cdot\rho+8\right)}{\left(\rho^2+1\right)}\right)>0.$$

La Figure 1.8 montre le signe de $f(y)$.

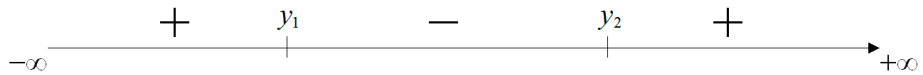


Figure 1.8. Signe de la fonction $f(y)$.

Sachant que $y < 0$, on en déduit que :

$$\left[16\cdot(1-\rho)^2\cdot\left(V_{n\max}^2-1\right)=y\cdot\left(\left(\rho^2+1\right)\cdot y-\left(4\cdot\rho^2-8\cdot\rho+8\right)\right)\right]>0,$$

$$\Rightarrow\left(V_{n\max}^2-1\right)>0\Rightarrow V_{n\max}^2>1\Rightarrow V_{n\max}>1.$$

On vérifie donc, pour toutes les machines synchrones excitées, que :

$$V_{n\max}>1. \qquad (1.70)$$

PROBLÈME 4

Machines synchrones à réluctance variable (MSRV) : Loi de commande couple maximal par ampère / Grandeurs normalisées

I. Énoncé

1/ À partir de l'expression du couple (1.33), déterminer l'angle ψ permettant de maximiser le couple, pour un module du courant d'induit I donné [5], [6], [8], [9]. On appellera cet angle ψ_{Opt}.

2/ Pour l'angle ψ_{Opt}, déterminer la valeur de I permettant de maximiser le couple.

3/ Dans les conditions permettant de maximiser le couple, trouver la relation entre la vitesse mécanique Ω et le module de la tension V.

4/ Si le module de la tension d'induit est limité ($V = V_{max}$), déterminer la vitesse maximale de fonctionnement. On appellera cette vitesse la vitesse de base.

5/ Déterminer l'expression du facteur de puissance dans les conditions permettant de maximiser le couple.

6/ Définir un système de grandeurs normalisées, quand les bases de normalisation sont celles définies dans le Tableau 1.5.

7/ Réécrire les relations entre les modules V_n et I_n, et entre les angles ψ et δ, en utilisant les grandeurs et paramètres normalisés (équations (1.24), (1.26), (1.27) et (1.28) du second problème).

Grandeur	Base de normalisation
Courants de l'induit	Module maximal du courant de l'induit I_{max}
Tensions de l'induit	Module maximal de la tension de l'induit V_{max}
Puissances	Puissance apparente maximale de l'induit
Vitesse mécanique	Vitesse de base Ω_b
Flux magnétiques	V_{max} / ω_b (avec $\omega_b = p \cdot \Omega_b$)
Couple	Puissance apparente maximale / Vitesse de base

Tableau 1.5. Bases de normalisation des grandeurs des machines synchrones à réluctance variable.

8/ Réécrire les expressions de la puissance active (puissance mécanique) et du couple normalisés, en utilisant les grandeurs et paramètres normalisés (équations (1.30), (1.33) et (1.34) du second problème).

9/ Déterminer l'expression du couple normalisé maximal. Comparer cette expression avec l'expression du facteur de puissance à la vitesse de base, dans les conditions permettant de maximiser le couple.

10/ Tracer les courbes de variation de L_{dn} (valeur normalisée de l'inductance L_d) et du facteur de puissance à la vitesse de base, en fonction de ρ (rapport de saillance), dans les conditions permettant de maximiser le couple.

II. Réponses

1/ Pour trouver l'angle ψ_{Opt} permettant de maximiser le couple pour un module du courant d'induit I donné, il est nécessaire de résoudre l'équation suivante :

$$\begin{cases} \left(\Gamma = -p \cdot \left(L_d - L_q \right) \cdot I^2 \cdot \dfrac{\sin\left(2 \cdot \psi\right)}{2} = p \cdot L_d \cdot \left(\rho - 1\right) \cdot I^2 \cdot \dfrac{\sin\left(2 \cdot \psi\right)}{2} \right) > 0 \\ \text{Max}\left(\sin\left(2 \cdot \psi\right)\right) \end{cases}. \quad (1.71)$$

Sachant que $\rho > 1$, la solution à cette équation est donnée par :

$$\sin\left(2 \cdot \psi\right) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \psi = \pi/4 \\ \psi = -3 \cdot \pi/4 \end{cases}. \quad (1.72)$$

Pour la suite de ce problème, nous choisissons la solution suivante :

$$\psi_{\text{Opt}} = \pi/4 . \quad (1.73)$$

Le choix de l'autre valeur ($\psi_{\text{Opt}} = -3 \cdot \pi/4$) donnerait des développements parfaitement symétriques.

2/ L'expression du couple pour ψ_{Opt} est donnée par :

$$\Gamma = p \cdot \frac{L_d}{2} \cdot \left(\rho - 1\right) \cdot I^2 . \quad (1.74)$$

Le couple maximal est obtenu pour la valeur maximale du module du courant d'induit I (I_{max}). Le couple maximal est obtenu dans les conditions suivantes :

$$\begin{cases} I = I_{\text{max}} \\ \psi = \psi_{\text{Opt}} \left[\text{equation (1.73)}\right] \end{cases}. \quad (1.75)$$

3/ Dans les conditions décrites par l'équation (1.75), le module de la tension est donné par :

$$V = \omega \cdot \frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \cdot L_d \cdot \sqrt{1 + \rho^2} . \quad (1.76)$$

Sachant que pour les machines synchrones : $\omega = p \cdot \Omega$, la vitesse est donnée par :

$$\Omega = \frac{\sqrt{2} \cdot V}{p \cdot I_{\text{max}} \cdot L_d \cdot \sqrt{1 + \rho^2}} . \quad (1.77)$$

4/ Telle que définie dans l'énoncé, la vitesse de base, notée Ω_b, est donnée par :

$$\Omega_b = \frac{\sqrt{2} \cdot V_{\max}}{p \cdot I_{\max} \cdot L_d \cdot \sqrt{1+\rho^2}} . \tag{1.78}$$

5/ Le facteur de puissance, dans les conditions décrites par l'équation (1.75), est donné par :

$$FP = \frac{\rho - 1}{\sqrt{2 \cdot \left(1+\rho^2\right)}} . \tag{1.79}$$

6/ L'utilisation des grandeurs normalisées permet d'identifier les principaux paramètres caractéristiques influençant les performances des machines synchrones. Comme pour le troisième problème l'indice « *n* » est utilisé pour certains paramètres et grandeurs normalisés. Pour commencer, nous définissons la valeur normalisée du module du courant d'induit :

$$I_n = \frac{I}{I_{\max}} = \frac{\sqrt{i_d^2 + i_q^2}}{I_{\max}} = \sqrt{i_{dn}^2 + i_{qn}^2} . \tag{1.80}$$

Le module normalisé de la tension d'induit est donné par :

$$V_n = V / V_{\max} . \tag{1.81}$$

La puissance active absorbée (puissance mécanique) normalisée est donnée par :

$$P_n = \frac{P}{V_{\max} \cdot I_{\max}} = \frac{v_d \cdot i_d + v_q \cdot i_q}{V_{\max} \cdot I_{\max}} = v_{dn} \cdot i_{dn} + v_{qn} \cdot i_{qn} . \tag{1.82}$$

Puisque les pertes sont négligées, la puissance active absorbée est égale à la puissance mécanique. Telle que définie par l'équation (1.82), la puissance active normalisée à la vitesse de base est égale au facteur de puissance à cette vitesse.

La valeur normalisée de la vitesse de rotation est donnée par :

$$\Omega_n = \Omega / \Omega_b . \tag{1.83}$$

Pour les machines synchrones à réluctance variable, il n'y a pas de flux d'excitation. Le flux magnétique dans ces machines est égal au flux de la réaction magnétique d'induit.

Le flux de la réaction magnétique d'induit, noté Φ_{rmi}, peut être décomposé selon les axes *d* et *q* comme suit :

$$\begin{cases} \Phi_{rmid} = L_d \cdot i_d \\ \Phi_{rmiq} = L_q \cdot i_q \end{cases} . \tag{1.84}$$

La valeur normalisée du module du flux de la réaction magnétique d'induit est donnée par :

$$\Phi_{rmi\ n} = \frac{\Phi_{rmi} \cdot \omega_b}{V_{\max}} = \frac{\omega_b \cdot \sqrt{\Phi_{rmid}^2 + \Phi_{rmiq}^2}}{V_{\max}} = \sqrt{\Phi_{rmidn}^2 + \Phi_{rmiqn}^2} , \tag{1.85}$$

où,

$$\begin{cases} \Phi_{rmidn} = \dfrac{L_d \cdot i_d \cdot \omega_b}{V_{\max}} = \left(\dfrac{L_d \cdot \omega_b \cdot I_{\max}}{V_{\max}} \right) \cdot \left(\dfrac{i_d}{I_{\max}} \right) = L_{dn} \cdot i_{dn} \\ \Phi_{rmiqn} = \dfrac{L_q \cdot i_q \cdot \omega_b}{V_{\max}} = \left(\dfrac{L_q \cdot \omega_b \cdot I_{\max}}{V_{\max}} \right) \cdot \left(\dfrac{i_q}{I_{\max}} \right) = L_{qn} \cdot i_{qn} \end{cases} . \quad (1.86)$$

Il faut retenir que :

$$\begin{cases} L_{dn} = \dfrac{L_d \cdot \omega_b \cdot I_{\max}}{V_{\max}} \\ L_{qn} = \dfrac{L_q \cdot \omega_b \cdot I_{\max}}{V_{\max}} = \rho \cdot L_{dn} \end{cases} . \quad (1.88)$$

Étant donné que l'équation (1.78) permet de lier la vitesse de base Ω_b, et donc la pulsation ω_b, à la tension V_{max}, il est possible d'exprimer L_{dn} comme suit :

$$L_{dn} = \frac{L_d \cdot \omega_b \cdot I_{\max}}{V_{\max}} = \sqrt{\frac{2}{1+\rho^2}} . \quad (1.89)$$

Enfin, la valeur normalisée du couple est donnée par :

$$\Gamma_n = \frac{\Gamma}{\left(\dfrac{V_{\max} \cdot I_{\max}}{\Omega_b} \right)} = \frac{P_n}{\Omega_n} . \quad (1.90)$$

7/ Les équations (1.24), (1.26), (1.27) et (1.28), du second problème, peuvent être réécrites, en utilisant les grandeurs et paramètres normalisés, comme suit :

$$V_n = \Omega_n \cdot L_{dn} \cdot I_n \cdot \sqrt{\left(\rho \cdot \cos(\psi)\right)^2 + \left(\sin(\psi)\right)^2} , \quad (1.91)$$

$$I_n = \left(\frac{V_n}{L_{dn} \cdot \Omega_n} \right) \cdot \sqrt{\left(\left(\frac{\sin(\delta)}{\rho} \right)^2 + \cos^2(\delta) \right)} , \quad (1.92)$$

$$\operatorname{tg}(\delta) = -\rho \cdot \frac{\cos(\psi)}{\sin(\psi)} = -\frac{\rho}{\operatorname{tg}(\psi)} , \quad (1.93)$$

$$\operatorname{tg}(\psi) = -\rho \cdot \frac{\cos(\delta)}{\sin(\delta)} = -\frac{\rho}{\operatorname{tg}(\delta)} . \quad (1.94)$$

8/ Les équations (1.30), (1.33) et (1.34), du second problème, peuvent être réécrites, en utilisant les grandeurs et paramètres normalisés, comme suit :

$$P_n = I_n^2 \cdot \Omega_n \cdot L_{dn} \cdot (\rho - 1) \cdot \frac{\sin(2 \cdot \psi)}{2} = \frac{V_n^2 \cdot (1-\rho)}{\rho \cdot L_{dn} \cdot \Omega_n} \cdot \frac{\sin(2 \cdot \delta)}{2} , \quad (1.95)$$

$$\Gamma_n = I_n^2 \cdot L_{dn} \cdot (\rho - 1) \cdot \frac{\sin(2 \cdot \psi)}{2}, \tag{1.96}$$

$$\Gamma_n = \frac{(1-\rho)}{\rho \cdot L_{dn}} \cdot \left(\frac{V_n}{\Omega_n} \right)^2 \cdot \frac{\sin(2 \cdot \delta)}{2}. \tag{1.97}$$

9/ Le couple, dans les conditions décrites par l'équation (1.75), est donné par :

$$\Gamma_{n\max} = \frac{L_{dn}}{2} \cdot (\rho - 1) = \frac{(\rho - 1)}{\sqrt{2 \cdot \left(1 + \rho^2\right)}}. \tag{1.98}$$

On notera que cette expression est identique à celle du facteur de puissance à la vitesse de base (1.79), dans les conditions permettant de maximiser le couple (1.75).

10/ Les Figures 1.9 et 1.10 montrent les courbes de variation de L_{dn} (valeur normalisée de l'inductance L_d) et du facteur de puissance à la vitesse de base, en fonction de ρ (rapport de saillance), dans les conditions permettant de maximiser le couple. Le facteur de puissance tend vers la valeur 0,7071 ($=1/\sqrt{2}$) lorsque le rapport de saillance ρ tend vers l'infini.

> ⚠ Les scripts MATLAB utilisés pour tracer ces courbes sont disponibles *via* le lien indiqué en page 5.

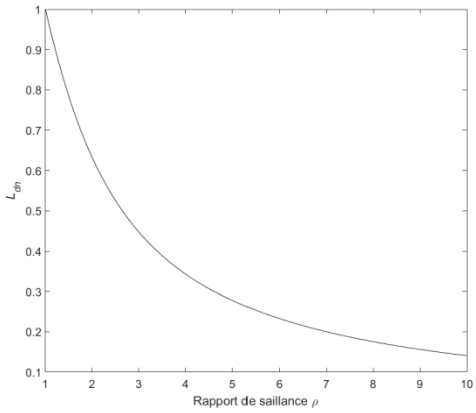


Figure 1.9. Variation de L_{dn} en fonction du rapport de saillance ρ.

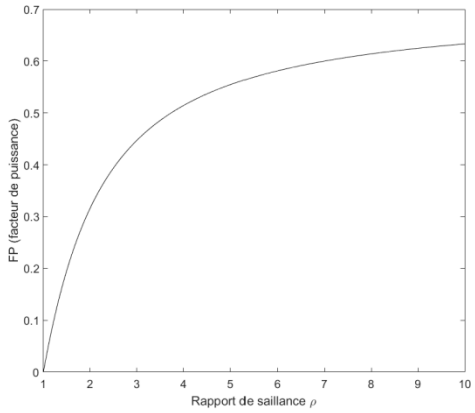


Figure 1.10. Variation du facteur de puissance à la vitesse de base, dans les conditions permettant de maximiser le couple, en fonction de ρ.

PROBLÈME 5

Machines synchrones excitées (MSE) : Loi de commande couple maximal par volt (CMPV)

I. Énoncé

1/ À partir de l'expression du couple (1.17), montrer que l'angle δ permettant de maximiser le couple, pour un couple (V, Φ_{exc}) donné, que l'on notera δ_{Opt}, est donné par [5−7] :

$$\delta_{\text{Opt}} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } \rho = 1 \\ Arc\cos\left(\dfrac{-\Phi_{exc}\cdot\rho + \sqrt{\left(\Phi_{exc}\cdot\rho\right)^2 + 8\cdot\left(1-\rho\right)^2\cdot\left(V/\omega\right)^2}}{4\cdot\left(1-\rho\right)\cdot\left(V/\omega\right)} \right) & \text{si } \rho \neq 1 \end{cases} \quad (1.99)$$

2/ Exprimer l'angle δ_{Opt} en utilisant les grandeurs normalisées définies précédemment. Les bases de normalisation sont celles définies dans le Tableau 1.3.

3/ Pour l'angle δ_{Opt}, déterminer la valeur du couple (V, Φ_{exc}) permettant de maximiser le couple.

4/ Dans les conditions permettant de maximiser le couple, calculer la valeur normalisée du courant d'induit, et montrer que c'est une fonction monotone décroissante en fonction de la vitesse normalisée Ω_n.

5/ Dans les conditions permettant de maximiser le couple, montrer que : $I_n > 1$ pour $\Omega_n \in]0, 1]$. I_n étant une fonction monotone décroissante en fonction de la vitesse normalisée Ω_n, il suffira de montrer que $I_n\left(\Omega_n = 1\right) > 1$. On discriminera entre les cas des machines à pôles lisses, et les machines à pôles saillants.

Pour les machines à pôles saillants, on montrera que l'équation $\left(I_n\left(\Omega_n = 1\right) - 1\right)$ aboutit à un polynôme du second degré en x, avec :

$$\left(x = \sqrt{1 + 8\cdot\left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)^2\cdot V_{n\max}^2} \right) > 1 .$$

Dans le cas où le discriminant de ce polynôme du second degré est négatif, déduire son signe. Que peut-on dire de l'inéquation $I_n\left(\Omega_n = 1\right) > 1$?

Dans le cas où le discriminant de ce polynôme du second degré est positif ou nul, montrer que les solutions sont données par :

$$\begin{cases} x_1 = \left(\dfrac{-(1-\rho)\cdot(1-3\cdot\rho) - 2\cdot\sqrt{\left(4\cdot(1-\rho)^2\cdot\left(1+\rho^2\right)\cdot L_{dn}^2 + 4\cdot\rho - 3\right)}}{\left(1+\rho^2\right)} \right) \\ x_2 = \left(\dfrac{-(1-\rho)\cdot(1-3\cdot\rho) + 2\cdot\sqrt{\left(4\cdot(1-\rho)^2\cdot\left(1+\rho^2\right)\cdot L_{dn}^2 + 4\cdot\rho - 3\right)}}{\left(1+\rho^2\right)} \right) \end{cases}.$$

Montrer que : $x_1 < 1$.

Pour $L_{dn} \leq 1$, montrer que $x_2 \leq 1$.

Pour $L_{dn} > 1$, exprimer $V_{n\max}$ en fonction de ρ et L_{dn}, et montrer que : $x_2 < \sqrt{1 + 8\cdot\left(\dfrac{1-\rho}{\rho}\right)^2 \cdot V_{n\max}^2}$.

En déduire le signe du polynôme.

Que peut-on dire de l'inéquation $I_n\left(\Omega_n = 1\right) > 1$?

Conclure.

6/ Déterminer les conditions pour lesquelles $I_n \leq 1$, montrer que l'expression de la vitesse normalisée, pour laquelle $I_n = 1$, que l'on notera $\Omega_{\lim n}$, est donnée par :

$$\Omega_{\lim n} = \begin{cases} \dfrac{V_{n\max}}{\sqrt{L_{dn}^2 - 1}} & \rho = 1 \\ \dfrac{V_{n\max}\cdot|1-\rho|\cdot 2\cdot\sqrt{2}}{\rho\cdot\sqrt{x^2-1}} & \rho \neq 1 \end{cases}, \qquad (1.100)$$

avec :

$$x = \frac{2\cdot\sqrt{(4\cdot\rho - 3) + 4\cdot\left(\rho^2+1\right)\cdot(1-\rho)^2\cdot L_{dn}^2} - \left(3\cdot\rho^2 - 4\cdot\rho + 1\right)}{\left(\rho^2+1\right)},$$

et montrer que : $\Omega_{\lim n} > 1$.

7/ Conclure sur l'applicabilité de cette loi de commande.