

Électro- magnétisme

Ondes et propagation guidée

Patrice Tchofo Dinda

Professeur à l'université de Bourgogne - Franche-Comté

Pierre Mathey

Maître de conférences à l'université de Bourgogne -
Franche-Comté

DUNOD

Tout le catalogue sur
www.dunod.com



Illustration de couverture : © David Evison, Shutterstock

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage. Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements		d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).
--	---	--

© Dunod, 2017
11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-076850-9

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

À la découverte de votre livre
Avant-propos

VIII
X

Partie 1

Électromagnétisme dans les milieux matériels

Chapitre 1	Notions mathématiques d'introduction à l'électromagnétisme	1
1.	Notion de champ	1
2.	Flux d'un champ vectoriel	2
3.	Divergence d'un vecteur	4
4.	Théorème de la divergence	4
5.	Circulation d'un champ de vecteur	4
6.	Rotationnel d'un vecteur	6
7.	Gradient d'une fonction	6
8.	Laplacien scalaire	7
9.	Laplacien vectoriel	7
10.	Opérateur nabla	7
11.	Angle solide	8
	L'essentiel	13
	Testez-vous	14
	Entraînez-vous	15
	Solutions	17
Chapitre 2	Les lois fondamentales de l'électromagnétisme	23
1.	La découverte de l'électromagnétisme	23
2.	Les lois fondamentales de l'électrostatique	24
3.	Rappel des lois fondamentales de la magnétostatique	27
4.	Passage en régime variable	29
5.	Équations de Maxwell	33

6. Méthode des potentiels scalaire et vecteur	34
7. Résolution directe des équations de Maxwell dans le vide	36
L'essentiel	40
Testez-vous	41
Entraînez-vous	42
Solutions	43
Chapitre 3 L'énergie électromagnétique	47
1. Bilan énergétique local	47
2. Vecteur de Poynting	49
3. Application aux ondes planes	50
4. Application aux ondes sphériques	52
5. Rayonnement dipolaire électrique	53
L'essentiel	58
Testez-vous	60
Entraînez-vous	61
Solutions	63
Chapitre 4 L'électromagnétisme dans la matière	67
1. État électrique d'un milieu matériel	68
2. État magnétique d'un milieu matériel	80
3. Équations de Maxwell dans un milieu matériel	85
4. Conditions aux limites du milieu	86
5. Relations constitutives pour les milieux LHI	90
6. Grandeurs énergétiques dans un milieu matériel	95
L'essentiel	97
Testez-vous	101
Entraînez-vous	102
Solutions	104
Chapitre 5 Les ondes dans les milieux diélectriques	114
1. Rappels	114
2. Mécanismes de polarisation	115

3. Polarisation en régime variable	122
L'essentiel	133
Testez-vous	135
Entraînez-vous	136
Solutions	140
Chapitre 6 Les ondes dans les milieux conducteurs	144
1. Effet de peau	145
2. Conductivité et permittivité diélectrique des métaux	148
3. Permittivité diélectrique généralisée	153
4. Ondes de rayonnement et plasmons de volume	158
5. Plasmons de surface	164
L'essentiel	175
Testez-vous	179
Entraînez-vous	180
Solutions	183
Chapitre 7 Introduction aux guides d'ondes	190
1. Équations générales des ondes guidées	192
2. Choix du système de coordonnées et expression des champs	194
3. Classification des modes de propagation	196
4. Le guide d'ondes rectangulaire	199
5. Modes TE	199
6. Modes TM	205
L'essentiel	206
Testez-vous	207
Entraînez-vous	208
Solutions	209
Chapitre 8 La fibre optique	212
1. Description physique de la fibre à saut d'indice	215
2. Équations de propagation	216
3. Expressions des champs en coordonnées cylindriques	217
4. Solutions de l'équation de propagation	219

5. Paramètre de fréquence normalisée V	222
6. Relation de dispersion	223
7. Classification générale des modes de propagation	227
8. Modes de propagation dans les fibres à faible guidage	231
L'essentiel	248
Testez-vous	249
Entraînez-vous	250
Solutions	252

Partie 2

Propagation des ondes dans les diélectriques anisotropes

Chapitre 9 Les états de polarisation de la lumière	256
1. Transversalité et nature vectorielle des vibrations lumineuses	257
2. États de polarisation des ondes électromagnétiques planes	257
3. Propagation des états de polarisation dans les dispositifs optiques : formalisme des matrices de Jones	266
L'essentiel	269
Testez-vous	270
Entraînez-vous	271
Solutions	273
Chapitre 10 Propagation selon un axe principal d'un milieu diélectrique anisotrope	286
1. Tenseur diélectrique, ellipsoïde des indices	288
2. Les différents types de milieux anisotropes	290
3. Propagation d'une onde plane progressive monochromatique le long d'un axe principal	291
4. Application : les lames optiques	293
5. Interférences en lumière polarisée	298
L'essentiel	301
Testez-vous	302

Entraînez-vous	303
Solutions	306
Chapitre 11 Propagation dans un diélectrique linéaire homogène anisotrope	313
1. Définitions	315
2. Modes propres de propagation, équation aux indices de Fresnel, surface des indices	315
L'essentiel	323
Testez-vous	324
Entraînez-vous	325
Solutions	327
Chapitre 12 Faisceaux lumineux dans les diélectriques anisotropes, double réfraction	336
1. Direction des faisceaux lumineux	337
2. Surface des vitesses radiales	338
3. Cas des milieux uniaxes	341
4. Double réfraction	343
5. Applications	347
6. Construction des rayons réfléchis	350
L'essentiel	352
Testez-vous	353
Entraînez-vous	354
Solutions	357
Bibliographie	370
Index	372

Avant-propos

Cet ouvrage est le fruit de plusieurs années d'enseignement dans le domaine de l'électromagnétisme, dispensé aux étudiants de la troisième de l'École supérieure d'ingénieurs en matériaux/développement durable et informatique/électronique (ESIREM), de la Licence de physique (niveaux II et III), du Master de physique (PLM-NANO), et du Master enseignement (MEEF), à l'Université de Bourgogne. Il regroupe les notions indispensables pour bien comprendre l'électromagnétisme, depuis les équations de Maxwell dans le vide, jusqu'à la propagation des ondes dans les milieux anisotropes, en passant par les ondes dans les milieux diélectriques, les milieux conducteurs, et les guides d'ondes.

L'ouvrage est constitué de douze chapitres. Les principaux outils mathématiques, nécessaires au traitement des notions qui y sont abordées, sont regroupés au sein du premier chapitre de l'ouvrage. Viennent ensuite les énoncés des lois de l'électromagnétisme classique, la notion d'onde plane puis les aspects énergétiques. La propagation des ondes dans les milieux matériels (diélectriques isotropes, milieux conducteurs) est abordée à partir du quatrième chapitre. La propagation en milieu confiné, c'est-à-dire dans les guides d'ondes, est ensuite traitée et détaillée dans diverses géométries. La notion de modes de propagation y est présentée. Un chapitre entier est consacré à la propagation des ondes dans la fibre optique. La nature vectorielle du champ électromagnétique est une des caractéristiques essentielles des ondes électromagnétiques, qui est pleinement mise en lumière dans l'ouvrage et utilisée dans les quatre derniers chapitres pour analyser la propagation des ondes dans les milieux diélectriques anisotropes. Ces derniers chapitres sont structurés de façon à faire évoluer progressivement la présentation des phénomènes de propagation, depuis la configuration la plus simple (propagation selon un axe principal d'un diélectrique anisotrope) jusqu'au cas le plus général (propagation dans une direction quelconque). La particularité des milieux anisotropes est également pointée dès lors qu'il s'agit de s'intéresser aux rayons lumineux présents dans ces matériaux.

Chaque chapitre de l'ouvrage est constitué d'un cours suivi de ses *points clefs* et d'une sélection de *questions de cours* et d'*exercices d'entraînement* entièrement corrigés. Les *questions de cours* et *exercices d'entraînement* ont été méticuleusement sélectionnés afin de consolider l'acquisition des notions essentielles abordées dans chaque chapitre, tout en donnant un aperçu de l'intérêt pratique de l'électromagnétisme.

De plus, quelques encarts bibliographiques ou à caractère didactique illustrent certaines applications quotidiennes de l'électromagnétisme (chauffage à induction, four à micro-ondes, communications par fibre optique...).

Nous saurons gré aux lecteurs de nous signaler toute erreur qui, malgré notre vigilance, se serait glissée dans cet ouvrage.

Les auteurs

Dijon, Juin 2017

Notions mathématiques d'introduction à l'électromagnétisme

Introduction

Un **champ de maïs** correspond à un domaine bien défini de l'espace qui contient des tiges de maïs. Notons que toutes les tiges de maïs ont rarement la même hauteur et qu'elles ne sont pas toutes parfaitement orientées à la verticale. Si on assimile la **tige de maïs** à un **vecteur**, on peut dire qu'un champ de vecteurs est un domaine qui contient beaucoup de vecteurs de longueurs et d'orientations différentes. En électromagnétisme, on utilise des opérateurs (divergence, rotationnel, gradient) pour caractériser l'état d'un champ vectoriel.

Objectifs

- Définir** la notion de **champ**, que l'on associe aux grandeurs physiques de l'électromagnétisme.
- Identifier** les outils mathématiques qui permettent de caractériser un **champ**.
- Connaître** les principaux opérateurs vectoriels utilisés dans l'expression des lois fondamentales de l'électromagnétisme : divergence, gradient, et rotationnel.

Plan

- 1 Notion de champ
- 2 Flux d'un champ vectoriel
- 3 Divergence d'un vecteur
- 4 Théorème de la divergence
- 5 Circulation d'un champ de vecteur
- 6 Rotationnel d'un vecteur
- 7 Gradient d'une fonction
- 8 Laplacien Scalaire
- 9 Laplacien vectoriel
- 10 Opérateur nabla
- 11 Angle solide

1 Notion de champ

Certaines grandeurs physiques couramment utilisées ne peuvent être définies de manière pertinente que par la donnée de la valeur de cette grandeur en différents points d'un milieu. Un exemple de telles grandeurs est la **température**. On ne peut définir de manière pertinente la température (qu'il fait ou qu'il fera) sur un pays qu'en précisant sa valeur en différents endroits du pays. De manière générale, lorsqu'on associe à tout point $M(x,y,z)$ d'un milieu, une valeur $U(M, t)$ d'une grandeur physique, on dit qu'on a défini un **champ**

de cette grandeur physique. Par exemple, la donnée des valeurs de températures en différents endroits d'un territoire correspond à la définition d'un **champ de température** pour ce territoire.

Un champ peut être de nature **scalaire** ou **vectorielle** selon qu'il est défini par une grandeur physique scalaire (la température) ou vectorielle (le champ de gravitation terrestre).

- Un **champ** est dit **uniforme** dans une région donnée **D** si la grandeur définissant ce champ a la même valeur en chaque point de cette région :

$$U(M, t) = U(t) \quad \forall M \in D$$

- Un champ est dit **stationnaire** (ou **permanent**) si la grandeur définissant ce champ ne dépend pas du temps :

$$U(M, t) = U(M) \quad \forall M \in D \quad \forall t$$

2 Flux d'un champ vectoriel

2.1 Définition

DÉFINITION 1.1

- Le **flux** d'un champ $\vec{A}$ à travers un élément de surface élémentaire dS situé en un point M repéré par le vecteur $\vec{OM} = \vec{r}$ s'écrit :

$$d\phi = \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{n} \times dS$$

où $\vec{n}$ représente le vecteur unitaire normal à l'élément de surface dS .

- Le **flux** de $\vec{A}$ à travers une surface macroscopique S s'écrit :

$$\phi(\vec{A}) = \iint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

Remarque Dans le cas d'une surface fermée, le vecteur $d\vec{S} = dS \vec{n}$ est défini à partir de l'élément de surface dS et de la normale orientée $\vec{n}$. Par convention la normale est orientée positivement de l'intérieur vers l'extérieur de la surface S .

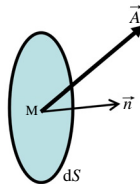


Figure 1.1– Calcul de flux.

2.2 Propriétés

Considérons une surface fermée S entourant un volume V . On peut séparer V en deux volumes V_A et V_B s'appuyant sur le même contour fermé C_f . Ainsi $S = S_A + S_B$,

où S_A et S_B sont les surfaces entourant respectivement les volumes V_A et V_B .

$$\begin{aligned}\phi_S(\vec{A}) &= \iiint_S \vec{A}(r) \cdot d\vec{S} = \iiint_{S_A} \vec{A}(r) \cdot d\vec{S} + \iiint_{S_B} \vec{A}(r) \cdot d\vec{S} \\ &= \phi_{S_A}(\vec{A}) + \phi_{S_B}(\vec{A})\end{aligned}$$

De manière générale, si S est l'union de plusieurs surfaces disjointes, $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots$, alors

$$\phi_S(\vec{A}) = \phi_{S_1}(\vec{A}) + \phi_{S_2}(\vec{A}) + \phi_{S_3}(\vec{A}) + \dots$$

Propriété de linéarité : $\phi_S(\alpha_1 \vec{A}_1 + \alpha_2 \vec{A}_2) = \alpha_1 \phi_S(\vec{A}_1) + \alpha_2 \phi_S(\vec{A}_2)$.

2.3 Application

Appliquons ces propriétés au calcul du flux d'un champ $\vec{E}$ sortant d'un cube infinitésimal de volume $\Delta\tau = \Delta x \Delta y \Delta z$.

$$\vec{E} = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y + E_z \vec{u}_z.$$

$$\begin{aligned}d\phi &= d\phi_1(CBFG + DAEH) + d\phi_2(ABCD + EFGH) + d\phi_3(ABFE + DCGH) \\ &= [E_y(x, y + \Delta y, z) - E_y(x, y, z)] \Delta x \Delta z + [E_x(x + \Delta x, y, z) - E_x(x, y, z)] \Delta y \Delta z \\ &\quad + [E_z(x, y, z + \Delta z) - E_z(x, y, z)] \Delta x \Delta y.\end{aligned}$$

$$\text{On a : } \lim \begin{cases} d\phi = \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] dx dy dz = \text{div}(\vec{E}) d\tau \\ \Delta x \rightarrow 0; \Delta y \rightarrow 0; \Delta z \rightarrow 0 \end{cases}$$

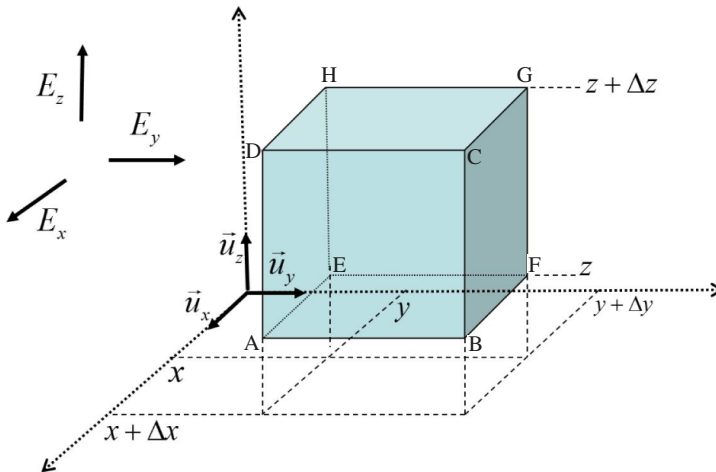


Figure 1.2 – Calcul du flux à travers un cube élémentaire.

On remarque que le flux du vecteur $\vec{E}$ à travers la surface fermée entourant le volume élémentaire $d\tau$ est égal au produit de la quantité $\text{div}(\vec{E})$ par le volume $d\tau$. Cette quantité est appelée **divergence** du vecteur $\vec{E}$.

3 Divergence d'un vecteur

La divergence d'un vecteur $\vec{E}$ est un scalaire défini par :

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

4 Théorème de la divergence

Le flux d'un vecteur $\vec{E}$ à travers une surface fermée S est égal à la divergence de ce vecteur dans le volume V_S délimité par la surface S .

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V_S} \text{div}(\vec{E}) d\tau$$

Ce théorème généralise le résultat précédent obtenu pour un volume élémentaire.

5 Circulation d'un champ de vecteur

Considérons un champ $\vec{E}$ dans une région donnée où l'on a défini une courbe Γ orientée (c'est-à-dire sur laquelle on a défini un sens positif) allant d'un point A à un point B. On appelle **circulation du vecteur** $\vec{E}$ le long de cette courbe, l'intégrale curviligne :

$$C_{AB} = \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{M}$$

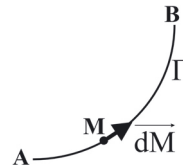


Figure 1.3 – Circulation d'un vecteur.

5.1 Propriétés

- Linéarité : $\int_{\Gamma} (\lambda_1 \vec{V}_1 + \lambda_2 \vec{V}_2) \cdot d\vec{M} = \lambda_1 \int_{\Gamma} \vec{V}_1 \cdot d\vec{M} + \lambda_2 \int_{\Gamma} \vec{V}_2 \cdot d\vec{M}$
- Changement de sens : $\int_{AB} \vec{V} \cdot d\vec{M} = - \int_{BA} \vec{V} \cdot d\vec{M}$
- Relation de Chasles : $\int_{AB} \vec{V} \cdot d\vec{M} = \int_{AC} \vec{V} \cdot d\vec{M} + \int_{CB} \vec{V} \cdot d\vec{M}$ si A, B, et C $\in \Gamma$
- Circulation le long d'un contour fermé : $\oint_{\Gamma_f} \vec{V} \cdot d\vec{M}$

La circulation le long d'un contour fermé est indépendante du point de départ sur le contour $\oint_{\Gamma_f} \vec{V} \cdot d\vec{M} = \int_{CC} \vec{V} \cdot d\vec{M}, \quad \forall C \in \Gamma_f$

5.2 Application

Considérons un champ $\vec{E} = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y + E_z \vec{u}_z$, défini dans l'espace tridimensionnel Oxyz. On se propose de calculer la circulation du champ $\vec{E}$ sur un contour élémentaire fermé, de forme rectangulaire, ABCD. On désigne par dC_x la circulation du champ $\vec{E}$ lorsque ce contour est placé dans un plan perpendiculaire à l'axe Ox, et par dC_y (ou dC_z) la circulation de $\vec{E}$ lorsque le contour est placé dans un plan perpendiculaire à l'axe Oy (ou Oz).

Évaluons les composantes du vecteur $d\vec{C} = dC_x \vec{u}_x + dC_y \vec{u}_y + dC_z \vec{u}_z$.

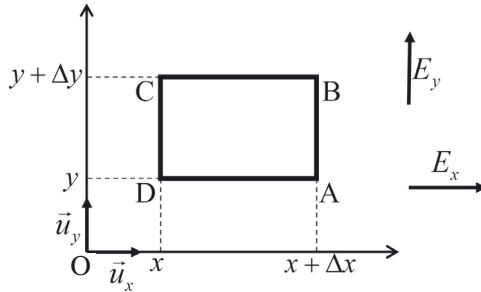


Figure 1.4 – Circulation d'un vecteur le long d'un contour élémentaire.

• Calcul de dC_z

$$dC_z = \Delta x E_x(x, y, z) + E_y(x + \Delta x, y, z) \Delta y - \Delta x E_x(x, y + \Delta y, z) - E_y(x, y, z) \Delta y$$

En utilisant un développement en série de Taylor limité au 1^{er} ordre (étant donné que $\Delta x \ll 1$ et $\Delta y \ll 1$, pour un contour élémentaire), on peut écrire que :

$$E_y(x + \Delta x, y, z) \simeq E_y(x, y, z) + \frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta x \text{ et } E_x(x, y + \Delta y, z) \simeq E_x(x, y, z) + \frac{\partial E_x}{\partial y} \Delta y.$$

$$\text{On en déduit que } dC_z \simeq \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] dx dy = \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] dS_z.$$

On remarque alors que la circulation du vecteur $\vec{E}$ sur le contour fermé ABCD placé dans un plan perpendiculaire à l'axe Oz, est égal au flux de la grandeur $\left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] \times \vec{u}_z$ à travers la surface $dS_z = dx dy$ délimitée par ce contour.

En procédant de manière analogue, nous obtenons :

$$dC_y = \left[\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] dx dz = \left[\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] dS_y$$

$$dC_x = \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] dy dz = \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] dS_x$$

Ici aussi, on remarque que la circulation du vecteur $\vec{E}$ sur chaque contour est égale au flux d'une certaine grandeur physique à travers la surface délimitée par le contour.

Cette grandeur physique, qui a pour composantes $\left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right]$, $\left[\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right]$, et $\left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right]$ (selon les axes Ox , Oy et Oz), est appelée **rotationnel** du vecteur $\vec{E}$.

Le rotationnel renseigne sur le caractère tourbillonnaire de l'orientation d'un champ vectoriel. En effet, lorsque la composante du rotationnel selon un axe donné est non nulle, cela signifie qu'au voisinage de cet axe, l'orientation du champ $\vec{E}$ varie en fonction du point d'observation, de telle sorte qu'un déplacement dans la direction de $\vec{E}$ conduirait à une rotation autour de cet axe. Autrement dit, les lignes du champ $\vec{E}$ tournent autour de l'axe considéré.

6 Rotationnel d'un vecteur

Le rotationnel d'un vecteur $\vec{E}$ est un vecteur défini par :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] \vec{u}_x + \left[\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] \vec{u}_y + \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] \vec{u}_z$$

que l'on peut aussi mettre sous la forme suivante :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{u}_x \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \vec{u}_y \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + \vec{u}_z \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$$

Théorème 1.1

Théorème du Rotationnel (théorème de Stokes)

La circulation d'un vecteur $\vec{E}$ sur un contour fermé est égale au flux du rotationnel de $\vec{E}$ à travers toute surface ouverte s'appuyant sur ce contour :

$$\oint_{\Gamma_f} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_f} \vec{\text{rot}}(\vec{E}) \cdot d\vec{S}$$

7 Gradient d'une fonction

Soit $f(x, y, z)$ une fonction scalaire définie en tout point $M(x, y, z)$ d'un milieu donné. La différentielle de cette fonction, que l'on note df , représente la variation de cette fonction lorsqu'on passe du point $M(x, y, z)$ à un point infiniment voisin $M(x+dx, y+dy, z+dz)$.

Cette différentielle a pour expression :

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z \right] \cdot [dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z] \\ &= \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{M} \end{aligned}$$

Le gradient d'une fonction f se définit, dans le système de coordonnées cartésiennes, par :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

Il est à noter que df est maximum lorsque $d\vec{M}$ est parallèle à $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$. Autrement dit, le gradient indique la direction de la plus grande variation d'un champ scalaire, et l'intensité de cette variation.

8 Laplacien scalaire

Le **laplacien scalaire** est l'opérateur différentiel défini par l'application de l'opérateur **gradient** suivie de l'opérateur **divergence** :

$$\Delta = \text{div} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \right)$$

Le **laplacien scalaire** d'un champ $V(x, y, z)$ est un champ scalaire défini par :

$$\Delta V = \text{div} \left(\overrightarrow{\text{grad}} V \right)$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes, il s'écrit : $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$.

9 Laplacien vectoriel

Le **laplacien vectoriel** d'un champ vectoriel $\vec{A}$ est un champ vectoriel défini par $\Delta \vec{A} = \Delta A_x \vec{u}_x + \Delta A_y \vec{u}_y + \Delta A_z \vec{u}_z$. Dans le cas d'un système de coordonnées cartésiennes, $\Delta \vec{A}$ a pour composantes :

$$\begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}.$$

10 Opérateur nabla

L'opérateur **nabla**, couramment noté $\vec{\nabla}$, est un opérateur vectoriel défini en coordonnées cartésiennes comme suit : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$.

Cet opérateur possède les caractéristiques d'un vecteur, mais qui aurait pour particularité d'être constitué de composantes qui ne prennent pas de valeurs réelles.

Les composantes du vecteur $\vec{\nabla}$ sont plutôt des **opérateurs en attente d'argument**. Cependant, on peut manipuler les composantes de $\vec{\nabla}$ exactement comme on manipule les composantes scalaires d'un vecteur ordinaire (mais avec quelques précautions liées au fait que $\vec{\nabla}$ n'est pas commutatif avec toutes les opérations).

L'opérateur $\vec{\nabla}$ est un outil très commode pour manipuler aisément les principaux opérateurs différentiels :

- Gradient : $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f$
- Divergence : $\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$
- Rotationnel : $\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$
- Laplacien : $\Delta f = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) f = (\nabla^2) f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f$.
- Laplacien vectoriel : $\Delta \vec{A} = (\nabla^2) \vec{A}$

11 Angle solide

L'**angle solide** est l'analogue tridimensionnel de l'angle **plan** (bidimensionnel).

Un angle **plan** θ se construit à partir du point de croisement de deux demi-droites (figure 1.5). À cet angle θ , on peut associer l'arc de cercle (L) que cet angle découpe sur un cercle (de rayon R) centré au point d'intersection des deux demi-droites : $L = R\theta$. On peut donc écrire que :

$$\theta = \frac{L}{R}.$$

Dans l'espace tridimensionnel, la portion de l'espace analogue à un angle plan est un cône (figure 1.6). L'ouverture de ce cône est appelée **angle solide**, couramment noté Ω . Par analogie avec le rapport L/R pour l'angle plan, l'angle solide se définit comme le rapport de la portion de surface S que le cône découpe sur une sphère de rayon R , au carré du rayon R :

$$\Omega = \frac{S}{R^2}.$$

L'unité de l'angle solide est le stéradian, noté *sr*. Notons que pour $R = 1$ m, on a $\Omega = S$. Conséquemment, le stéradian correspond à l'angle solide qui découpe une surface de 1 m^2 sur une sphère de rayon unité.

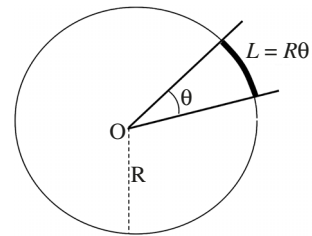


Figure 1.5 – Angle plan.

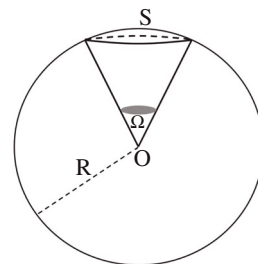


Figure 1.6 – Angle solide.

Remarque Pour calculer l'angle solide sous lequel on voit un objet à partir d'un point donné, on projette l'objet sur une sphère (de rayon R) centrée en ce point. Si la surface de cette projection sur la sphère est S , l'angle solide sous lequel l'observateur voit l'objet est alors $\Omega = S/R^2$.

- La surface d'une sphère de rayon R étant $S = 4\pi R^2$, on en déduit que le plus grand angle solide mesurable, qui correspond à un objet couvrant toute la sphère, est de 4π stéradians.
- Chaque face d'un cube est vue depuis le centre du cube avec un angle solide $2\pi/3$ stéradians.
- Dans le cas général d'un polyèdre régulier pouvant être inscrit dans une sphère, chacune de ses faces est vue avec un angle solide $4\pi/n$ (n étant le nombre de faces du polyèdre).
- Supposons maintenant que l'œil soit placé au sommet d'un cône de sommet S et d'angle solide Ω (figure 1.7). Toutes les surfaces (S_1 , S_2 , S_3) qui s'appuient sur les génératrices du cône sont vues sous le même angle solide, même lorsqu'elles ont des formes et des aires différentes.

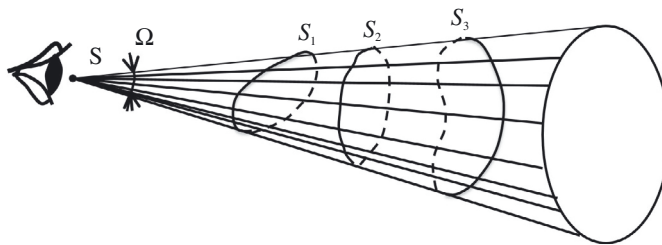


Figure 1.7 – Illustration d'une propriété de l'angle solide.

On est souvent amené à évaluer l'angle solide Ω sous lequel on observe une surface S depuis un point O (figure 1.8). Si la surface est de forme complexe, on la divise en éléments suffisamment petits pour pouvoir les considérer comme plans. La normale $\vec{N}$ à un élément de surface dS fait un angle α avec la direction d'observation $\vec{u}$.

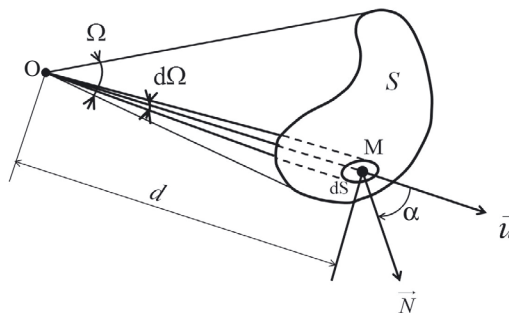


Figure 1.8 – Illustration du calcul de l'angle solide.