

50

COSAS QUE
HAY QUE
SABER SOBRE

MATEMÁTICAS



TONY CRILLY

Ariel

Tony Crilly

50 COSAS QUE HAY
QUE SABER SOBRE
MATEMÁTICAS

Traducción de
Enrique Herrando Pérez

Ariel CLAVES 

Introducción

Las matemáticas son una materia inmensa y nadie puede conocerlas en su totalidad. Lo que sí podemos hacer es explorarlas y hallar nuestro camino individual. Las posibilidades que se nos descubren aquí nos conducirán a otras épocas y culturas y a ideas que han intrigado a los matemáticos durante siglos.

Las matemáticas son al mismo tiempo antiguas y modernas y se han desarrollado a partir de amplias influencias culturales y políticas. De India y Arabia procede nuestro sistema de numeración moderno, pero éste ha sido templado a lo largo de la historia con elementos de diversas procedencias. La «base 60» de los babilonios del segundo o tercer milenio a. C. aparece en nuestra propia cultura: tenemos 60 segundos en un minuto y 60 minutos en una hora; un ángulo recto sigue siendo de 90 grados y no de 100 grados, como el que adoptó la Francia revolucionaria, que dio un primer paso hacia la decimalización.

Los triunfos tecnológicos de la edad moderna dependen de las matemáticas y no cabe duda de que ya no es ningún motivo de orgullo anunciar que a uno no se le daban bien en el colegio. Naturalmente, las matemáticas escolares son algo distinto, algo que a menudo se enseña con vistas a unos exámenes. La presión temporal del colegio tampoco ayuda, ya que las matemáticas son una materia en la que no tiene sentido ir deprisa. La gente necesita tiempo para poder asimilar las ideas. Algunos de los más grandes matemáticos han sido exasperantemente lentos en sus esfuerzos por comprender los conceptos profundos de su materia.

Para este libro no hay prisas. Se puede hojear cuando a uno le venga bien. Tómese su tiempo y descubra qué significan realmente estas ideas de las que es posible que usted haya oído hablar. Empezando por el Cero, o por otra parte si lo desea, puede usted seguir avanzando en un viaje entre islas de ideas matemáticas. Por ejemplo, puede informarse sobre la teoría de juegos y luego puede leer sobre los cuadrados mágicos. O bien puede pasar de los rectángulos áureos al famoso último teorema de Fermat... o seguir cualquier otro camino.

Estamos en un momento emocionante para las matemáticas. Algunos de sus problemas más importantes se han resuelto en los últimos tiempos. Los avances de la informática moderna han ayudado a algunos, pero han resultado inútiles frente a otros. El problema de los cuatro colores se resolvió con la ayuda de un ordenador, pero la hipótesis de Riemann, el último capítulo de este libro, sigue sin resolverse: aún no se ha conseguido, ni por ordenador ni por ningún otro medio.

Las matemáticas son para todo el mundo. La popularidad del sudoku es la prueba de que la gente puede hacer matemáticas (sin saberlo) y también disfrutar de ello. En las matemáticas, como en el arte o la música, ha habido genios, pero no sólo ellos han hecho la historia. Verá usted a varios líderes entrando y saliendo de algunos capítulos, y se encontrará con que reaparecen en otros. Leonhard Euler, cuyo tricentenario tuvo lugar en 2007, es un asiduo visitante de estas páginas. Pero el verdadero progreso en las matemáticas es obra del trabajo de una mayoría, acumulado durante siglos. La elección de 50 temas es personal, pero he intentado mantener un equilibrio. Hay artículos cotidianos y avanzados, matemáticas puras y aplicadas, abstractas y concretas, antiguas y modernas. No obstante, las matemáticas son una sola materia unida, y la dificultad a la hora de escribir no ha radicado tanto en la elección de los temas, como en la omisión de algunos. Podría haber habido 500 ideas, pero 50 bastan para que usted empiece bien su carrera matemática.

01 El cero

A una edad temprana hacemos nuestra insegura entrada en la tierra de los números. Aprendemos que el 1 es el primero del «alfabeto numérico», y que introduce los números de conteo 1, 2, 3, 4, 5... que no son más que eso: cuentan cosas reales, manzanas, naranjas, plátanos, peras. No es hasta más tarde cuando podemos contar el número de manzanas que hay en una caja cuando no hay ninguna.

Los antiguos griegos y los romanos, célebres por sus proezas de ingeniería, carecían de una forma eficaz de lidiar con el número de manzanas que había en una caja vacía. Ellos no lograron dar un nombre a la «nada». Los romanos tenían sus formas de combinar I, V, X, L, C, D y M, pero ¿y el 0? Ellos no contaban «nada».

¿Cómo llegó a ser aceptado el cero? Se cree que el uso de un símbolo que designa «la nada» tuvo su origen hace miles de años. La civilización maya, en lo que es ahora México, usó el cero en diversas formas. Algún tiempo después, el astrónomo Claudio Ptolomeo, influido por los babilonios, usó un símbolo semejante a nuestro moderno 0 como marcador de posición en su sistema numérico. Como marcador de posición, el cero se podía usar para distinguir ejemplos (en notación moderna) como 75 y 705, en lugar de basarse para ello en el contexto, como habían hecho los babilonios. Esto se podría comparar con la introducción de la «coma» en el lenguaje: ambos ayudan a leer el significado correcto. Pero, así como la coma viene acompañada de un conjunto de reglas para su uso, también tiene que haber reglas para usar el cero.

Brahmagupta trató el cero como un «número», no como un mero marcador de posición, y expuso unas reglas para operar con él. Éstas incluían que «la suma de un número positivo y cero es positiva» y que «la suma de cero y cero es cero». Al pensar en el cero como un número, Brahmagupta fue bastante avanzado. El sistema de numeración hindú-arábigo que incluyó el cero de esta manera fue promulgado en occidente por Leonardo de Pisa, Fibonacci, en su *Liber Abaci* (*Libro*

Cronología

700 a.C.

Los babilonios usan el cero como marcador de posición en su sistema numérico

628 d.C.

Brahmagupta usa el cero y expone reglas para su uso con otros números

del ábaco), publicado en 1202. Instruido en la aritmética hindú-arábiga, reconoció el poder del uso del símbolo adicional 0 combinado con los símbolos hindúes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

El lanzamiento del cero dentro del sistema numérico planteaba un problema del que Brahmagupta se había ocupado brevemente: ¿cómo se habría de tratar a este «intruso»? ¿Cómo podría integrarse el cero en el sistema aritmético de entonces de una forma más precisa? Algunos ajustes eran sencillos. Cuando se trataba de hacer sumas y multiplicaciones, el 0 encajaba perfectamente, pero «el extranjero» no encajaba fácilmente en las operaciones de sustracción y división.

¿Cómo funciona el cero? La adición y la multiplicación con el cero son sencillas y en absoluto polémicas (se puede agregar 0 a 10 para obtener cien, pero nos referiremos a la adición en el sentido menos imaginativo de esta operación numérica). Sumar 0 a un número deja a ese número inalterado, mientras que multiplicar 0 por cualquier número siempre da 0 como solución. Por ejemplo, tenemos $7 + 0 = 7$ y $7 \times 0 = 0$. La sustracción es una operación sencilla pero puede llevar a negativos, $7 - 0 = 7$ y $0 - 7 = -7$, mientras que la división que implica al cero plantea dificultades.

Imaginemos una extensión que se ha de medir con una vara. Suponga que la vara de medir tiene en realidad una longitud de 7 unidades. Nos interesa saber cuántas varas de medir podemos extender a lo largo de nuestra extensión dada. Si la extensión que ha de medirse es en realidad de 28 unidades, la solución es 28 dividido por 7, o, en símbolos, $28 : 7 = 4$. Una notación mejor para expresar esta división es

$$\frac{28}{7} = 4$$

y después podemos hacer una «multiplicación cruzada» para escribir esto en términos de multiplicación, como $28 = 7 \times 4$. Bien, ¿qué podemos hacer con 0 dividido por 7? Para que nos ayude a proponer una solución en este caso, llamemos a a la solución, de manera que

$$\frac{0}{7} = a$$

Por multiplicación cruzada, esto equivale a $0 = 7 \times a$. Si esto es así, el único valor posible para a es 0, porque si la multiplicación de dos nú-

830

Mahavira tiene ideas sobre cómo interactúa el cero con otros números

1100

Bhaskara usa el 0 como símbolo en el álgebra e intenta mostrar cómo se maneja

1202

Fibonacci usa el símbolo adicional 0 añadido al sistema hindú-arábigo de números 1, ..., 9, pero no como un número al mismo nivel que ellos

meros da 0, uno de ellos debe ser 0. Evidentemente ese número no es 7, así que a debe ser un cero.

Ésta *no* es la principal dificultad que entraña el cero. La cuestión peligrosa es la división *por* 0. Si intentamos tratar a $7/0$ de la misma manera que lo hacíamos con $0/7$, tendríamos la ecuación

$$\frac{7}{0} = b$$

Por multiplicación cruzada, $0 \times b = 7$ y acabamos con el absurdo de que $0 = 7$. Al admitir la posibilidad de que $7/0$ sea un número, tenemos grandes posibilidades de provocar un caos numérico de dimensiones colosales. La forma de evitarlo es decir que $7/0$ es indefinido. No es permisible encontrar algún sentido a la operación de dividir 7 (o cualquier otro número que no sea cero) por 0, así que simplemente no permitimos que esta operación tenga lugar. De igual modo, no es permisible poner una coma en mitad de una palabra sin degenerar en el absurdo.

El matemático Bhaskara se planteó la división por 0 y propuso que un número dividido por 0 era infinito. Esto es razonable, porque si dividimos un número por un número muy pequeño la solución es muy grande. Por ejemplo, 7 dividido por un décimo es 70, y por un centésimo es 700. Si hacemos que el número del denominador sea cada vez más pequeño, la solución que obtenemos es cada vez más grande. En la máxima pequeñez, el propio 0, la solución debe ser el infinito. Si adoptamos esta forma de razonar, quedamos en situación de tener que explicar un concepto aún más extraño: esto es, el infinito. Enfrentarse al problema del infinito no ayuda; el infinito (con su notación estándar ∞) no se ajusta a las reglas habituales de la aritmética y no es un número en el sentido habitual.

Si $7/0$ constituía un problema, ¿qué se puede hacer con el aún más extraño $0/0$? Si $0/0 = c$, por multiplicación cruzada llegamos a la ecuación $0 = 0 \times c$ y al hecho de que $0 = 0$. Esto no resulta especialmente esclarecedor, pero tampoco es ningún absurdo. De hecho, c puede ser *cualquier número* y no llegamos a una imposibilidad. Llegamos a la conclusión de que $0/0$ puede ser cualquier cosa; en los círculos matemáticos bien educados se le llama «indeterminado».

Considerándolo todo, cuando nos planteamos la división por cero llegamos a la conclusión de que es mejor excluir esa operación de la forma en la que hacemos los cálculos. Podemos hacer aritmética tranquilamente sin ella.

¿Para qué sirve el cero? Sencillamente, no podríamos prescindir del 0. El progreso de la ciencia ha dependido de él. Hablamos de cero grados de longitud, de cero grados en la escala de temperatura,

y, de igual modo, de energía cero, y de gravedad cero. El cero ha entrado en el lenguaje no científico con ideas tales como la hora cero y la tolerancia cero.

Pero, podría hacerse un mayor uso de él. Si usted se baja en la acera de la Quinta Avenida de la ciudad de Nueva York y entra en el Empire State Building, se hallará en el espléndido vestíbulo de la entrada de la planta número 1. Con ello se hace uso de la capacidad que tienen los números para ordenar, 1 por «primero», 2 por «segundo» y así sucesivamente, hasta 102 por «centésimo segundo.» En Europa sí que tienen una planta 0, pero existe cierta renuencia a llamarla así.

Las matemáticas no podrían funcionar sin el cero. Éste está en el meollo de conceptos matemáticos que hacen que el sistema numérico, el álgebra, y la geometría funcionen. En la línea de los números, el 0 es el número que separa los números positivos de los negativos y, por consiguiente, ocupa una posición privilegiada. En el sistema decimal, el cero sirve como marcador de posición que nos permite usar tanto números enormes como cifras microscópicas.

A lo largo de cientos de años, el cero se ha ido progresivamente aceptando y utilizando, y se ha convertido en una de las mayores invenciones del hombre. El matemático norteamericano del siglo XIX G. B. Halsted adaptó *El sueño de una noche de verano* de Shakespeare para escribir sobre él como el motor de un progreso que otorga «a la nada impalpable, no solamente un nombre y un espacio de existencia, una imagen, un símbolo, sino también un poder útil, la característica de la raza hindú de la que surgió».

Cuando se introdujo el 0, se debió de considerar algo extraño, pero los matemáticos tienen la manía de aferrarse a conceptos extraños que resultan ser útiles mucho más tarde. El equivalente de ello en la actualidad se da en la teoría de conjuntos, en la que la idea de un *conjunto* es un grupo de elementos. En esta teoría \emptyset designa al conjunto sin ningún elemento, el llamado «conjunto vacío». Ahora esa idea resulta extraña, pero, al igual que el 0, es indispensable.

Todo sobre la nada

La suma de cero y un número positivo es positiva

La suma de cero y un número negativo es negativa

La suma de un positivo y un negativo es su diferencia; o, si son iguales, cero

Cero dividido por un número negativo o positivo, o bien es cero o bien se expresa como una fracción con el cero como numerador y la cantidad finita como denominador

Brahmagupta, 628 d.C.

La idea en síntesis: la nada no es nada desdeñable

02 Sistemas numéricos

Un sistema numérico es un método para tratar el concepto de «cuántos». Diferentes culturas han adoptado diversos métodos, que abarcan desde el básico, «uno, dos, tres, muchos», hasta la extremadamente sofisticada notación decimal posicional que usamos hoy en día.

Los sumerios y los babilonios usaban un sistema de valor de posición para su uso práctico cotidiano. Decimos que es un sistema de valor de posición porque podemos distinguir el «número» por la posición de un símbolo. También usaban el 60 como unidad fundamental: es lo que actualmente llamamos un sistema de «base 60». Todavía nos quedan vestigios de la base 60: hay 60 segundos en un minuto, hay 60 minutos en una hora. Al medir los ángulos, seguimos considerando que el ángulo completo es de 360 grados, a pesar del intento del sistema métrico por hacerlo de 400 grados.

Aunque nuestros antepasados fundamentalmente quisieran los números para fines prácticos, hay algunas pruebas que demuestran que a estas primeras culturas les intrigaban las matemáticas en sí mismas, y de que sustraían tiempo a los asuntos prácticos de la vida para explorarlas. Estas exploraciones incluyeron lo que podríamos llamar «álgebra» y también las propiedades de las figuras geométricas.

Los egipcios usaban la base diez con un sistema de signos jeroglíficos y desarrollaron un sistema para ocuparse de las fracciones; pero la notación decimal de valor de posición de la actualidad tuvo su origen en los babilonios, y fue perfeccionada por los hindúes. Su ventaja estriba en que puede usarse para expresar tanto números muy pequeños como muy grandes. Usando solamente los números hindú-arábigos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, se pueden hacer cálculos con relativa facilidad. Para comprender esto, examinemos el sistema romano, que se adaptaba a

Cronología

30000 a.C.

Pueblos paleolíticos de Europa hacen marcas numéricas en huesos

2000 a.C.

Los babilonios usan símbolos para representar números

sus necesidades, pero sólo los especialistas eran capaces de realizar cálculos con él.

El sistema romano Los símbolos básicos que usaban los romanos eran las «decenas» (I, X, C y M), y las «mitades» de estas (V, L y D). Los símbolos se combinan para formar otros. Se ha propuesto que el uso de I, II, III y IIII proviene del aspecto de nuestros dedos, V de la forma de la mano, y que invirtiéndola y uniendo las dos para formar la X obtenemos dos manos o diez dedos. C viene de *centum* y M de *mille*, los vocablos del latín que significan cien y mil, respectivamente. Los romanos también usaban S para designar «la mitad» y un sistema de fracciones basado en el 12.

El sistema romano hacía cierto uso de un método de «antes y después» para producir los símbolos necesarios, pero, según parece, éste no estaba adoptado uniformemente. Los antiguos romanos preferían escribir IIII, y el IV no se introdujo hasta más tarde. He aquí los números básicos del sistema romano, con algunos complementos que se incorporaron en la época medieval:

No resulta fácil manejar los números romanos. Por ejemplo, el significado de MMMCDXLIII sólo se vuelve obvio cuando mentalmente se introducen paréntesis de forma que (MMM)(CD)(XL)(III) se lea después como $3000 + 400 + 40 + 4 = 3444$. Pero intente sumar MMMCDXLIII + CCXCIII. Un romano experto en este arte tendría sus atajos y sus trucos, pero para nosotros es difícil obtener la solución correcta sin calcularla primero en el sistema decimal y traducir el resultado a la notación romana:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Suma} & & \\
 3444 & \rightarrow & \text{MMMCDXLIII} \\
 + 394 & \rightarrow & \text{CCCXCIII} \\
 = 3838 & \rightarrow & \text{MMMCCCXXXVIII}
 \end{array}$$

El sistema numérico romano

Imperio romano	apéndices medievales
S mitad	
I uno	
V cinco	\overline{V} cinco mil
X diez	\overline{X} diez mil
L cincuenta	\overline{L} cincuenta mil
C cien	\overline{C} cien mil
D quinientos	\overline{D} quinientos mil
M mil	\overline{M} un millón

600 d.C.

En India se usa la precursora de nuestra notación decimal moderna

1200

Se extiende el sistema hindú-arábigo de escribir los números 1, ..., 9 y un cero

1600

Los símbolos del sistema decimal adoptan sus formas modernas reconocibles

La multiplicación de dos números es mucho más difícil y podría ser imposible dentro del sistema básico, ¡incluso para los romanos! Para multiplicar 3444×394 necesitamos los apéndices medievales.

$$\begin{array}{r}
 \text{Multiplicación} \\
 3444 \rightarrow \text{MMMCDXLIII} \\
 \times 394 \rightarrow \text{CCCXCIII} \\
 \hline
 = 1.356.936 \rightarrow \overline{\text{M}}\overline{\text{C}}\overline{\text{C}}\overline{\text{C}}\overline{\text{L}}\overline{\text{V}}\overline{\text{M}}\overline{\text{C}}\overline{\text{M}}\overline{\text{X}}\overline{\text{X}}\overline{\text{X}}\overline{\text{V}}\overline{\text{I}}
 \end{array}$$



Un reloj de Luis XIII

Los romanos no tenían ningún símbolo concreto para el cero. Si usted le pidiera a un ciudadano vegetariano de Roma que anotara cuántas botellas de vino había consumido ese día, él podría escribir III, pero si le preguntara cuántos pollos había comido, no podría escribir 0. Vestigios del sistema romano sobreviven en la paginación de algunos libros (aunque no de éste) y en las piedras angulares de los edificios. Algunas construcciones nunca fueron utilizadas por los romanos, como MCM para representar 1900, sino que se introdujeron por motivos estilísticos en tiempos modernos. Los romanos habrían escrito MDCCCC. El decimocuarto rey Luis de Francia, universalmente conocido en la actualidad como Luis XIV, en realidad prefería que le conociera como Luis XIII y tenía por norma que sus relojes mostraran las 4 en punto como *IIII* en punto.

Los números enteros decimales Nosotros identificamos de forma natural los «números» con los números decimales. El sistema decimal está basado en el diez, y utiliza los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. En realidad está basado en «decenas» y «unidades», pero las unidades pueden absorberse en la «base 10». Cuando anotamos el número 394, podemos explicar su significado decimal diciendo que está compuesto por 3 centenas, 9 decenas y 4 unidades, y podríamos escribir

$$394 = 3 \times 100 + 9 \times 10 + 4 \times 1$$

Esto se puede escribir usando «potencias» de 10 (conocidas también como «exponenciales» o «índices»),

$$394 = 3 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

donde $10^2 = 10 \times 10$, $10^1 = 10$ y acordamos, aparte, que $10^0 = 1$. En esta expresión vemos de forma más clara la base *decimal* de nuestro sistema numérico cotidiano, un sistema que hace que la suma y la multiplicación sean bastante transparentes.

La coma decimal Hasta ahora hemos examinado la representación de números enteros. ¿Puede el sistema decimal hacer frente a partes de un número, como $572/1000$?

Esto significa

$$\frac{572}{1000} = \frac{5}{10} + \frac{7}{100} + \frac{2}{1000}$$

Podemos tratar a los «recíprocos» de 10, 100, 1000 como potencias *negativas* de 10, de modo que

$$\frac{572}{1000} = 5 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3}$$

y esto puede escribirse como **0,572**, donde la coma decimal indica el principio de las potencias negativas de 10. Si agregamos esto a la expresión decimal de 394 obtenemos la expansión decimal para el número $394 \frac{572}{1000}$, que es sencillamente **394,572**.

En el caso de números muy grandes la notación decimal puede ser muy larga, así que en este caso volvemos a la «notación científica». Por ejemplo, 1.356.936.892 puede escribirse como $1,356936892 \times 10^9$, que a menudo aparece como «1,356936892 × 10E9» en las calculadoras o los ordenadores. Aquí, la potencia 9 es una menos que el número de dígitos del número y la letra E significa «exponencial».

Potencias de 2	Decimal
2^0	1
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	16
2^5	32
2^6	64
2^7	128
2^8	256
2^9	512
2^{10}	1024

Ceros y unos Aunque la base 10 es la habitual, algunas aplicaciones requieren otras bases. El sistema binario que usa la base 2 está detrás de la potencia de los ordenadores modernos. La belleza de lo binario estriba en que cualquier número puede expresarse utilizando únicamente los símbolos 0 y 1. El inconveniente que acarrea esta economía es que las expresiones numéricas pueden ser muy largas.

¿Cómo podemos expresar **394** en notación binaria? Esta vez estamos tratando con potencias de 2, y después de cierta elaboración podemos ofrecer la expresión completa como

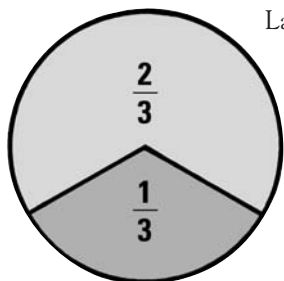
$$394 = 1 \times 256 + 1 \times 128 + 0 \times 64 + 0 \times 32 + 0 \times 16 + 1 \times 8 + 0 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1$$

de modo que leyendo solamente los ceros y unos, **394** en binario es **110001010**.

La idea en síntesis: la escritura de los números

03 Fracciones

Una fracción es un «número fracturado», literalmente. Si descomponemos un número entero, una forma apropiada de hacerlo es usar fracciones. Tomemos el ejemplo tradicional, el famoso pastel, y dividámoslo en tres partes.



La persona que toma dos de las tres partes del pastel obtiene una fracción equivalente a $2/3$. La persona que no ha tenido suerte sólo obtiene $1/3$. Uniendo las dos porciones del pastel volvemos a obtener todo el pastel, o, en fracciones, $1/3 + 2/3 = 1$, donde 1 representa todo el pastel.

He aquí otro ejemplo. Es posible que usted haya ido a las rebajas y haya visto una camisa anunciada a cuatro quintos del precio original. Aquí la fracción se escribe como $4/5$.

También podríamos decir que la camisa tiene un descuento de un quinto del precio original. Eso se escribiría como $1/5$ y vemos que $1/5 + 4/5 = 1$, donde 1 representa el precio original.

Una fracción siempre tiene la forma de un número entero «encima de» un número entero. Al número de la parte inferior se le llama el «denominador» porque nos dice cuántas partes componen el todo. Al número de la parte superior se le llama el «numerador» porque nos dice cuántas fracciones de unidad hay. Así que una fracción, en la notación establecida, siempre aparece así

$$\frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$$

En el caso del pastel, la fracción que usted podría querer comerse es $2/3$, donde el denominador es 3 y el numerador es 2. $2/3$ está compuesto por 2 fracciones de unidad de $1/3$.

También podemos tener fracciones como $14/5$ (llamadas fracciones impropias), donde el numerador es más grande que el denominador. Al dividir 14 por 5 obtenemos 2 y nos sobran 4, lo que puede escribirse como el número «mixto» $2 \frac{4}{5}$. Éste comprende el número entero

Cronología

1800 a.C.

En las culturas babilonias se usan fracciones

1650 a.C.

Los egipcios hacen uso de fracciones de unidad

2 y la fracción «propia» $4/5$. Al principio algunos escribían esto como $4/5 \cdot 2$. Normalmente las fracciones se representan de una forma en la que el numerador y el denominador (la «parte superior» y la «inferior») no tienen ningún factor común. Por ejemplo, el numerador y el denominador de $8/10$ tienen un factor común de 2, porque $8 = 2 \times 4$ y $10 = 2 \times 5$. Si escribimos la fracción $8/10 = (2 \times 4) / (2 \times 5)$ podemos «cancelar» los doses y, de ese modo, $8/10 = 4/5$, una forma más sencilla con el mismo valor. Los matemáticos se refieren a las fracciones como «números racionales» porque son razones de dos números. Los números racionales eran los números que los griegos podían «medir».

Suma y multiplicación Algo que resulta bastante curioso de las fracciones es que son más fáciles de multiplicar que de sumar. La multiplicación de números enteros es tan problemática que hubo que inventar maneras ingeniosas para realizarla. Pero en el caso de las fracciones es la suma lo que es más difícil y exige cierta reflexión.

Empecemos multiplicando fracciones. Si usted compra una camisa a cuatro quintos del precio original de 30 libras esterlinas, acaba pagando un precio de venta de 24 libras. Las 30 libras se dividen en cinco partes de 6 libras cada una y cuatro de estas cinco partes es $4 \times 6 = 24$, la cantidad que usted paga por la camisa.

Posteriormente, el encargado de la tienda descubre que las camisas no se están vendiendo nada bien, así que baja aún más el precio, anunciándolas a $1/2$ del precio de venta. Si usted entra en la tienda ahora puede conseguir la camisa por 12 libras. Esto es $1/2 \times 4/5 \times 30$ que es igual a 12. Para multiplicar dos fracciones entre sí simplemente se multiplican los denominadores entre sí y los numeradores entre sí:

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{1 \times 4}{2 \times 5} = \frac{4}{10}$$

Si el encargado hubiera hecho las dos rebajas de una sola vez habría anunciado las camisas a cuatro décimos del precio original de 30 libras. Esto es $4/10 \times 30$, que es 12 libras.

Sumar dos fracciones ya es otro cantar. Con la suma de $1/3 + 2/3$ no hay problema, ya que los denominadores son iguales. Simplemente sumamos los dos numeradores para obtener $3/3$, o 1. Pero ¿cómo po-

100 d.C.

Los chinos inventan un sistema para calcular con fracciones

1202

Leonardo de Pisa (Fibonacci) populariza la notación de fracciones con barra

1585

Simon Stevin expone una teoría sobre las fracciones decimales

1700

Uso generalizado de la línea fraccionaria « $\frac{\quad}{\quad}$ » (como en a/b)

dríamos sumar dos tercios del pastel a cuatro quintos del pastel?
¿Cómo podríamos calcular $2/3 + 4/5$?

Para sumar $2/3$ y $4/5$ primero debemos expresar cada una de ellas como fracciones que tienen los *mismos* denominadores. Primero se multiplica la parte superior e inferior de $2/3$ por 5 para obtener $10/15$. Después se multiplica la parte superior e inferior de $4/5$ por 3 para obtener $12/15$. Ahora, ambas fracciones tienen 15 como denominador común y para sumarlas simplemente sumamos los nuevos numeradores entre sí:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{22}{15}$$

Conversión a decimales En el mundo de la ciencia y en la mayoría de las aplicaciones de las matemáticas, los decimales son la forma preferida para expresar las fracciones. La fracción $4/5$ es lo mismo que la fracción $8/10$, que tiene 10 como denominador, y podemos escribir esto como el decimal 0,8.

Las fracciones que tienen 5 o 10 como denominador son fáciles de convertir. ¿Pero cómo podríamos convertir, por ejemplo, $7/8$ a forma decimal? Lo único que tenemos que saber es que cuando dividimos un número entero por otro, o bien éste cabe exactamente o bien cabe determinado número de veces con algo sobrante, a lo cual llamamos el «resto».

Usando $7/8$ como ejemplo, la fórmula para convertir fracciones en decimales es la siguiente:

- Intente dividir 7 entre 8. No es divisible, o podría decirse que cabe 0 veces con un resto 7. Anotamos esto escribiendo cero seguido por la coma decimal: «0,».
- Ahora divida 70 (el resto del paso anterior multiplicado por 10) entre 8. Éste cabe 8 veces, ya que $8 \times 8 = 64$, así que la solución es 8 con resto 6 ($70 - 64$). Por tanto, escribimos esto junto a nuestro primer paso, lo que nos da «0,8».
- Ahora divida 60 (el resto del paso anterior multiplicado por 10) entre 8. Como $7 \times 8 = 56$, la solución es 7 con resto 4. Anotamos esto, y hasta ahora tenemos «0,87».
- Divida 40 (el resto del paso anterior multiplicado por 10) entre 8. La solución es *exactamente* 5 con resto *cero*. Cuando obtenemos un resto 0 la fórmula está completa. La solución definitiva es «0,875».

Al aplicar esta fórmula de conversión a otras fracciones ¿es posible que no acabemos nunca! Podríamos continuar haciéndolo eternamente; si intentamos convertir $2/3$ a decimal, por ejemplo, hallamos que en cada fase el resultado de dividir 20 por 3 es 6 con un resto de 2. Así que de nuevo tenemos que dividir 20 entre 3, y nunca llegamos al

punto en el que el resto es 0. En este caso tenemos el decimal infinito 0,666666... Esto se escribe $0,\dot{6}$ para indicar el «decimal periódico».

Hay muchas fracciones que nos hacen continuar eternamente de esta forma. La fracción $5/7$ es interesante. En este caso obtenemos $5/7 = 0,714285714285714285...$ y vemos que la sucesión 714285 se repite una y otra vez. Si *cualquier* fracción da como resultado una secuencia recurrente, nunca podemos escribirla con un decimal concluyente y es entonces cuando la notación «de puntos» demuestra su utilidad. En el caso de $5/7$ escribimos $5/7 = 0,\dot{7}1\dot{4}2\dot{8}\dot{5}$

Fracciones egipcias Los egipcios basaban su sistema de fracciones en jeroglíficos que designaban fracciones de *unidad*: esas fracciones cuyos numeradores son 1. Sabemos esto por el Papiro de Rhind que se conserva en el Museo Británico. Era un sistema tan complicado que sólo aquéllos que estaban adiestrados podían conocer sus secretos más profundos y realizar los cálculos correctos.

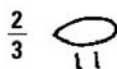
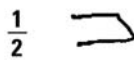
Los egipcios utilizaban algunas fracciones privilegiadas como $2/3$, pero todas las demás fracciones se expresaban en términos de fracciones de unidad como $1/2$, $1/3$, $1/11$ o $1/168$. Éstas eran sus «fracciones básicas», a partir de las cuales podían expresarse todas las demás fracciones. Por ejemplo, $5/7$ no es una fracción de unidad pero se podía escribir en términos de fracciones de unidad:

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{168}$$

donde deben usarse *distintas* fracciones de unidad. Una característica del sistema es que puede haber más de una forma de escribir una fracción, y algunas formas son más cortas que otras. Por ejemplo,

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14}$$

Es posible que la «expansión egipcia» tuviera un uso práctico limitado, pero el sistema ha inspirado a varias generaciones de matemáticos puros y ha proporcionado muchos problemas que constituyen auténticos retos, algunos de los cuales siguen sin resolverse hoy en día. Por ejemplo, un análisis completo de los métodos para encontrar la expansión egipcia *más corta* está a la espera de ser abordado por el intrépido explorador matemático.



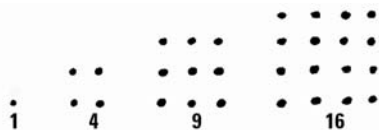
Fracciones egipcias

La idea en síntesis: un número encima de otro

04 Cuadrados y raíces cuadradas

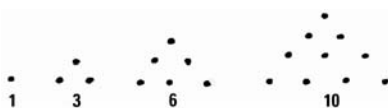
Si a usted le gusta hacer cuadrados con puntos, sus patrones de pensamiento son similares a los de los pitagóricos. Esta actividad era apreciada por la hermandad que seguía a su líder Pitágoras, un hombre al que se recuerda, sobre todo, por «aquel teorema».

Si contamos los puntos, vemos que el primer «cuadrado» de la izquierda está hecho de un solo punto. Para los pitagóricos el 1 era el número más importante, y estaba imbuido de existencia espiritual. Así que tenemos una buena base. Si seguimos sumando los puntos que hay en los siguientes cuadrados obtenemos los números «cuadrados» 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64... Éstos se llaman cuadrados «perfectos». Se puede calcular un número cuadrado sumando los puntos que



hay en la forma \square del exterior del anterior cuadrado, por ejemplo $9 + 7 = 16$. Los pitagóricos no se limitaron a los cuadrados. Se plantearon otras formas, como los triángulos, los pentágonos y otras formas poligonales.

Los números triangulares recuerdan a un montón de piedras. Al contar estos puntos obtenemos 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36... Si se desea calcular un número triangular, se puede usar el anterior y sumar el



número de puntos que hay en la última fila. ¿Cuál es el número triangular que va después de 10? Tendrá 5 puntos en la última fila, de modo que simplemente sumamos $10 + 5 = 15$.

Si compara los números cuadrados con los triangulares, verá que el número 36 aparece en ambas listas. Pero hay una conexión más asombrosa. Si coge números triangulares *sucesivos* y los suma, ¿qué obtiene? Probémoslo y anotemos los resultados en una tabla.

Cronología

1750 a.C.

Los babilonios compilan tablas de raíces cuadradas

525 a.C.

Los pitagóricos estudian los números cuadrados dispuestos geoméricamente

c. 300 a.C.

La teoría de los números irracionales de Eudoxo se publica en el Libro 5 de los *Elementos* de Euclides

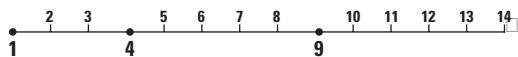
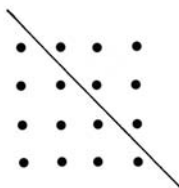
¡En efecto! Cuando se suman dos números triangulares sucesivos entre sí, se obtiene un número cuadrado. También puede entender esto con una «prueba sin palabras». Piense en un cuadrado compuesto por 4 filas de 4 puntos a través del cual se ha trazado una línea diagonal. Los puntos que están encima de la línea (tal como se muestra) forman un número triangular y debajo de la línea está el siguiente número triangular. Esta observación es válida para cualquier cuadrado de cualquier tamaño. De estos «diagramas de puntos» a la medición de áreas sólo hay un paso. El área de un cuadrado cuyo lado es 4 es $4 \times 4 = 4^2 = 16$ unidades cuadradas. En general, si el lado se llama x , el área será x^2 .

Suma de dos números triangulares sucesivos

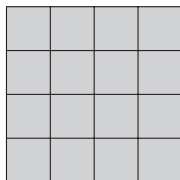
$1 + 3$	4
$3 + 6$	9
$6 + 10$	16
$10 + 15$	25
$15 + 21$	36
$21 + 28$	49
$28 + 36$	64

El cuadrado x^2 es la base de la forma parabólica. Ésta es la forma que se encuentra en las antenas parabólicas o en los espejos reflectores de los faros de los automóviles. Una parábola tiene un punto de foco. En una antena parabólica, un sensor colocado en el punto de foco recibe las señales reflejadas cuando los rayos paralelos procedentes del espacio impactan en el plato curvado y rebotan hacia el punto de foco.

Raíces cuadradas Si damos la vuelta a la pregunta y deseamos hallar la longitud de un cuadrado que tiene un área dada de 16, la solución es obviamente 4. La raíz cuadrada de 16 es 4 y se escribe como $\sqrt{16} = 4$. El símbolo $\sqrt{\quad}$ para las raíces cuadradas se ha utilizado desde 1500. Todos los números cuadrados tienen como raíces cuadradas bonitos números enteros. Por ejemplo, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$, y así sucesivamente. No obstante, hay muchos huecos a lo largo de la línea numérica entre estos cuadrados perfectos. Éstos son 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11...



Existe una brillante notación alternativa para las raíces cuadradas. Así como x^2 denota un número cuadrado, podemos escribir la raíz cuadrada de un número como $x^{1/2}$, lo que encaja con el mecanismo de multiplicar números entre sí sumando sus potencias. Ésta es la base de los logaritmos, inventados después de que nos enterásemos, en torno a 1600, de que un problema de multiplicación podía cambiarse por



630 d.C.

Brahmagupta proporciona métodos para calcular raíces cuadradas

1550

Se introduce el símbolo $\sqrt{\quad}$ para las raíces cuadradas

1872

Richard Dedekind expone una teoría sobre los números irracionales

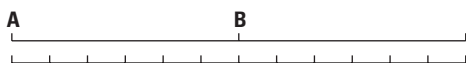
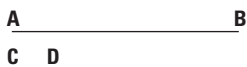
uno de adición. Todos estos números tienen raíces cuadradas, pero no equivalen a números enteros.

Examinemos $\sqrt{2}$. El número 2 tenía una importancia especial para los pitagóricos porque es el primer número par. Si usted calcula $\sqrt{2}$ en su calculadora, obtendrá 1,414213562, suponiendo que su calculadora ofrezca tantos decimales. ¿Es ésta la raíz cuadrada de 2? Para comprobarlo, realizamos el cálculo $1,414213562 \times 1,414213562$. Esto resulta ser 1,999999999. Esto no es del todo 2 ya que 1,414213562 es sólo una aproximación a la raíz cuadrada de 2.

Lo que quizá resulte sorprendente es que ¡nunca llegaremos a obtener más que una aproximación! La expansión decimal de $\sqrt{2}$ a millones de decimales siempre será solamente una aproximación. El número $\sqrt{2}$ es importante en las matemáticas, quizá no tan ilustre como π o e

(véanse páginas 26-33), pero lo bastante importante como

para tener su propio nombre; a veces se le llama el «número pitagórico».



¿Son fracciones las raíces cuadradas?

La pregunta de si las raíces cuadradas son fracciones está vinculada

a la teoría de la medición tal como la conocían los antiguos griegos. Supongamos que tenemos una línea AB cuya longitud deseamos medir, y una «unidad» indivisible CD con la que hemos de medirla.

Para hacer la medición colocamos la unidad CD consecutivamente frente a AB. Si colocamos la unidad m veces y el final de la última unidad encaja perfectamente con el final de

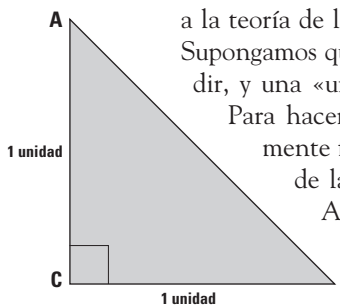
AB (en el punto B), la longitud de AB será sencillamente m . Si no, podemos colocar una copia de AB a con-

tinuación de la original y podemos continuar midiendo con la unidad (véase figura). Los griegos

creían que, en algún momento, usando n copias de AB y m unidades, la unidad encajaría *perfectamente* con el extremo de la m -ésima AB. La longitud de AB sería entonces m/n . Por ejemplo, si se colocan 3 copias de AB, una después de otra, y 29 unidades encajan a lo largo de ellas, la longitud de AB sería $29/3$.

Los griegos también se plantearon cómo medir la longitud del lado AB (la hipotenusa) de un triángulo cuyos otros dos lados tienen una longitud de una «unidad». Según el teorema de Pitágoras, la longitud de AB podría escribirse simbólicamente como $\sqrt{2}$, así que la pregunta es: $\sqrt{2} = m/n$?

Por nuestra calculadora ya hemos visto que la expresión decimal de $\sqrt{2}$ es potencialmente infinita, y este hecho (que la expresión decimal no tiene fin) quizá indique que $\sqrt{2}$ no es una fracción. Pero el decimal



0,3333333 no tiene fin... y representa la fracción $1/3$. Necesitamos argumentos más convincentes.

¿Es $\sqrt{2}$ una fracción? Esto nos lleva a una de las demostraciones más famosas de las matemáticas. Ésta sigue el método de la *reductio ad absurdum*. En primer lugar se supone que $\sqrt{2}$ no puede ser una fracción y «no una fracción» al mismo tiempo. Esto es lo que en lógica se denomina «ley del término medio excluido». Así que los griegos supusieron que sí era una fracción y, por lógica estricta en cada paso, derivaron una contradicción, un «absurdo». Bien, hagámoslo. Supongamos que

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

También podemos suponer algo más. Podemos suponer que m y n no tienen ningún factor común. Esto no plantea ningún problema, porque si tuvieran factores comunes, éstos se podrían cancelar antes de empezar.

Podemos elevar al cuadrado los dos lados de $\sqrt{2} = m/n$ obteniendo $2 = m^2/n^2$ y de ese modo $m^2 = 2n^2$. Aquí es donde hacemos nuestra primera observación: como m^2 es dos veces algo, tiene que ser un número par. Luego, el propio m no puede ser impar (porque el cuadrado de un número impar es impar), de modo que m también es un número par.

Hasta aquí, la lógica es impecable. Como m es par, tiene que ser el doble de algo que podemos escribir como $m = 2k$. Elevar al cuadrado ambos lados de esto significa que $m^2 = 4k^2$. Si combinamos esto con el hecho de que $m^2 = 2n^2$, ello significa que $2n^2 = 4k^2$ y, al cancelar el 2, llegamos a la conclusión de que $n^2 = 2k^2$. ¡Pero esto ya lo hemos visto! Y, como antes, llegamos a la conclusión de que n^2 es par y que el propio n es par. Por consiguiente, hemos deducido por lógica estricta que tanto m como n son pares y que, por tanto, tienen un factor de 2 en común. Esto va en contra de nuestra suposición de que m y n no tienen factores comunes. La conclusión, por consiguiente, es que $\sqrt{2}$ no puede ser una fracción.

También se puede demostrar que ninguno de los números de la secuencia de números $\sqrt[n]{n}$ (salvo cuando n sea un cuadrado perfecto) puede ser una fracción. Los números que no pueden expresarse en fracciones se denominan «números irracionales».

La idea en síntesis: la vía hacia los números irracionales