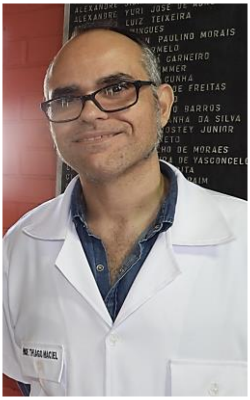
MATEMÁTICA - EsPCEx

2012 – 2023

GABARITOS COMENTADOS

Thiago Maciel de Oliveira

Apresentação



Thiago Maciel de Oliveira é licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET-RJ) e doutor em História das Ciências pela UFRJ. Foi professor do Colégio Militar do Rio de Janeiro de 2004 a 2022, do Colégio de Aplicação da Universidade do Estado do Rio de Janeiro de 2009 a 2018 e, atualmente, é professor do Colégio Militar de Brasília.

Esse livro traz a experiência do professor Thiago Maciel atuando por quase vinte anos na preparação de alunos do Ensino Médio para vestibulares e concursos militares. **Matemática-EsPCEx** é mais que um livro com questões resolvidas. Nele, são apresentadas ideias elementares, apresentadas de forma clara, simples e objetiva, que se aplicam na resolução de questões desse concurso. Além disso, é possível identificar os assuntos que apareceram com frequência nas provas de 2012 a 2023 desse concurso, a fim de orientar seus estudos.

Para te acompanhar até a aprovação, o professor Thiago criou o perfil **@thiago_maciel_mat** no Instagram exclusivo para que você possa tirar suas dúvidas. Lá, você encontrará vídeo-aulas sobre os assuntos do programa da EsPCEx, dicas de preparação, análise do edital, além de contato via Instagram Direct Messenger com o professor Thiago.

Bons estudos!

Sumário

EsPCEx 2023

1. Dado o sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{10x + 50y + 30z = 300} \\ \mathbf{20x + 140y + 80z = 500} \end{cases}$$

Sendo $x, y, z \in \mathbb{R}$, então <u>o valor de $x + y + z$</u> é igual a:

[A] 20

[B] 30

[C] 40

[D] 50

[E] 60

Gabarito: C

Solução:

$$\begin{cases} 10x + 50y + 30z = 300 \\ 20x + 140y + 80z = 500 \end{cases}$$

Multiplicando a 1ª equação por 3 e subtraindo a 2ª equação temos $10x + 10y + 10z = 400$. Dividindo-se os termos por 10, temos $x + y + z = 40$.

2. Sendo i a unidade imaginária, a correta forma algébrica do número $\frac{4-2i}{-2+i}$ é:

[A] $-2 - \frac{8}{5}i$

[B] $-2 + \frac{8}{5}i$

[C] $2 - \frac{8}{5}i$

[D] $\mathbf{2}$

[E] $\mathbf{-2}$

Gabarito: E

Solução:

$$\frac{4-2i}{-2+i}=\frac{(4-2i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)}=\frac{-8-4i+4i+2i^2}{(-2)^2-i^2}=\frac{-10}{5}=-2$$

3. Sobre uma semicircunferência de diâmetro $\boldsymbol{AB}$, são dispostos $\mathbf{10}$ pontos distintos, incluindo $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$. Tomando-se quaisquer três pontos distintos dentre os $\mathbf{10}$, <u>quantos triângulos não retângulos podem ser formados</u>?

[A] $\mathbf{8}$

[B] $\mathbf{10}$

[C] $\mathbf{30}$

[D] $\mathbf{112}$

[E] $\mathbf{120}$

Gabarito: D

Solução:

O total de triângulos que podem ser formados com os 10 pontos sobre a semicircunferência é $C_{10,3}=\frac{10!}{(10-3)!3!}=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120$. Desses, os triângulos cujos vértices são A, B e qualquer um dos outros 8 pontos restantes são retângulos, uma vez que $\overline{AB}$ é diâmetro. Dessa forma, podem ser formados 8 triângulos retângulos e $120-8=112$ triângulos não retângulos.

4. Qual o valor da soma das raízes da equação $\left(x^2+2\right)+\ 2+\frac{4}{(x^2+2)}+\frac{8}{(x^2+2)^2}+\ \ldots=8$?

[A] -1

[B] 0

[C] 1

[D] 2

[E] 3

Gabarito: B

Solução:

Note que o 1º membro da equação é dado pela soma dos termos da progressão geométrica $\left((x^2+2), 2, \frac{4}{(x^2+2)}, \frac{8}{(x^2+2)^2}, \ldots\right)$, em que a_1 é igual a (x^2+2) e a razão q é igual a $\frac{2}{(x^2+2)}$. Dessa forma,

$$(x^2+2)+\ 2+\frac{4}{(x^2+2)}+\frac{8}{(x^2+2)^2}+\ \ldots=\frac{a_1}{1-q}=\frac{(x^2+2)}{1-\frac{2}{(x^2+2)}}=\frac{(x^2+2)}{\frac{x^2+2-2}{(x^2+2)}}=\frac{\left(x^2+2\right)^2}{x^2}$$

e, assim, temos que

$$(x^2+2)+\ 2+\frac{4}{(x^2+2)}+\frac{8}{(x^2+2)^2}+\ \ldots=8$$

$$\frac{(x^2+2)^2}{x^2}=8$$

$$x^4+4x^2+4=8x^2$$

$$x^4-4x^2+4=0$$

$$(x^2-2)^2=0$$

$$x^2-2=0$$

$$x=\pm\sqrt{2}$$

A soma das raízes da equação é igual a 0.

5. Em um polígono regular $ABCDEFG$ ..., as interseções da mediatriz relativa ao lado CD com a bissetriz interna relativa ao vértice A e com o lado CD são, respectivamente, os pontos O_1 e M_1. Sabendo que o ângulo $A\widehat{O_1}M_1$ é igual a $75°$ e que o lado BC está contido no interior do ângulo $A\widehat{O_1}M_1$, o número de diagonais do polígono $ABCDEFG$ ... é igual a:

[A] 35

[B] 44

[C] 54

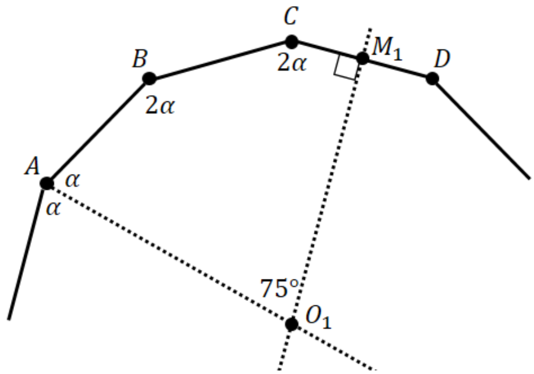
[D] 65

[E] 77

Gabarito: C

Solução:

A figura a seguir ilustra uma parte do polígono regular descrito no enunciado.



Como a soma dos ângulos internos de um pentágono é igual a $540°$, temos:

$$\alpha + 2\alpha + 2\alpha + 90° + 75° = 540°$$

$$5\alpha = 375°$$

$$\alpha = 75°$$

Dessa forma, a medida 2α do ângulo interno desse polígono regular é igual a $150°$.

Se n é o número de lados desse polígono, temos:

$$\frac{180°(n-2)}{n} = 150°$$

$$180°n - 360° = 150°n$$

$$30°n = 360°$$

$$n = 12$$

Por fim, se d é o número de diagonais desse polígono, temos:

$$d = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{12(12-3)}{2} = 54$$

6. Analise o gráfico da função $f(x)$ abaixo:

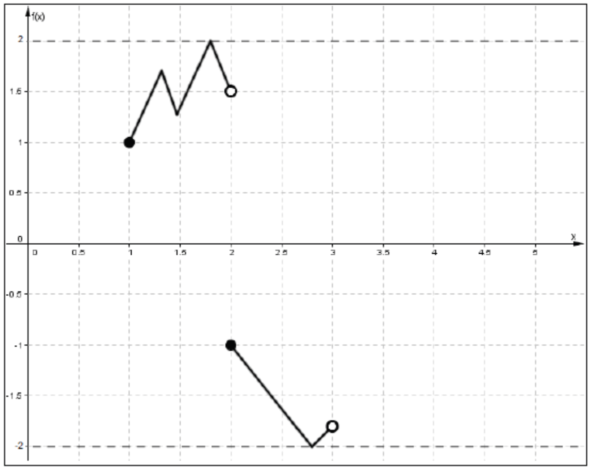


Imagem fora de escala

Pode-se afirmar que os conjuntos domínio e imagem de f, respectivamente chamados de $D(f)$ e $Im(f)$, são:

[A] $D(f) = [1,3)$ e $Im(f) = [-2,-1] \cup [1,2]$

[B] $D(f) = [1,3)$ e $Im(f) = (-2,-1] \cup [1,2]$

[C] $D(f) = [1,3)$ e $Im(f) = [-2,-1] \cup (1,2]$

[D] $D(f) = [1,2) \cup (2,3]$ e $Im(f) = (-2,-1] \cup [1,2]$

[E] $D(f) = [1,2) \cup (2,3]$ e $Im(f) = [-2,2]$

Gabarito: A

Solução:

O domínio de f é dado pela projeção ortogonal do gráfico dessa função sobre o eixo x. É fácil ver que $D(f) = [1,3[$. O conjunto imagem de f é dado pela projeção ortogonal do gráfico dessa função sobre o eixo y. É fácil ver que $Im(f) = [-2,-1] \cup [1,2]$.

7. Uma esfera está inscrita em um tronco de pirâmide quadrangular regular cujas arestas das bases medem $4\ cm$ e $5\ cm$, respectivamente. <u>A área total</u> do tronco de pirâmide, em cm^2, é igual a:

[A] 41

[B] 81

[C] 122

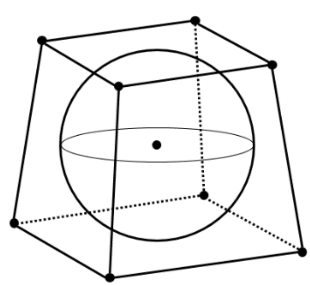
[D] 160

[E] 181

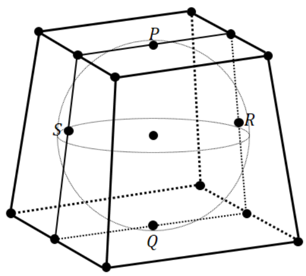
Gabarito: C

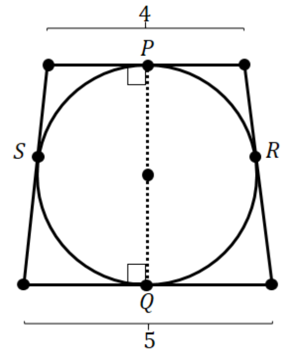
Solução:

A figura a seguir representa uma esfera inscrita em um tronco de pirâmide quadrangular regular, cujas arestas das bases medem $4cm$ e $5cm$, respectivamente. A esfera tangencia todas as seis faces do tronco de pirâmide. Estas, por sua vez, são formadas por dois quadrados, de lados $4cm$ e $5cm$, respectivamente, e quatro trapézios isósceles congruentes, de base menor $4cm$, base maior $5cm$ e altura h desconhecida.

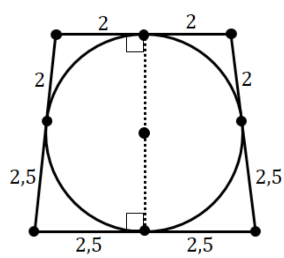


A figura a seguir é uma seção plana que contém os pontos de tangência P e Q da esfera com as bases e os pontos de tangência R e S com duas faces laterais opostas do tronco de pirâmide. Trata-se de uma circunferência inscrita em um trapézio isósceles.





Os pontos P e Q são pontos médios das bases do trapézio. Como segmentos tangentes à uma circunferência, traçados de um ponto exterior a ela, têm a mesma medida, observe as medidas indicadas na figura a seguir.



Dessa forma, a medida de um dos lados não paralelos desse trapézio é igual a h, a medida da altura dos trapézios que fazem parte da superfície lateral do tronco de cone. A área total desse sólido é igual a $5^2 + 4^2 + 4 \times \frac{(5+4)\times 4{,}5}{2} = 122cm^2$.

8. Um depósito de munições no formato retangular será construído em um campo de instrução do Exército Brasileiro. A planta da construção prevê que esse retângulo esteja inscrito em uma área cujo formato é de um triângulo isósceles de base $\mathbf{24\ m}$ e altura $\mathbf{16\ m}$. A <u>área máxima</u> do depósito que atende a essas condições é igual a:

[A] $32\ m^2$

[B] $48\ m^2$

[C] $64\ m^2$

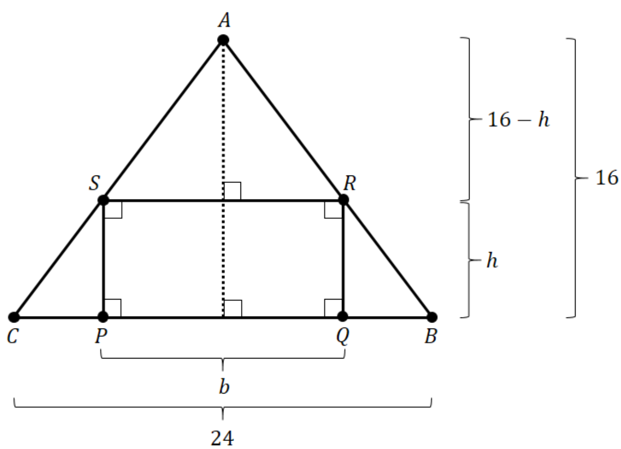
[D] $72\ m^2$

[E] $96\ m^2$

Gabarito: E

Solução:

Na figura a seguir, o retângulo $PQRS$ está inscrito no triângulo isósceles ABC de base $24m$ e altura $16m$. Se b e h indicam as medidas da base e da altura do retângulo, sua área A é igual a bh.



Agora, note que a altura do triângulo ARS da figura é igual a $16 - h$. Além disso, os triângulos ARS e ABC são semelhantes. Dessa forma,

$$\frac{16-h}{16} = \frac{b}{24}$$

$$16b = 384 - 24h$$

$$b = 24 - \frac{3h}{2}$$

e, assim,

$$A = bh$$

$$A = \left(24 - \frac{3h}{2}\right)h$$

$$A = 24h - \frac{3h^2}{2}$$

A área do retângulo é dada em função da sua altura h por meio de uma função quadrática. A área máxima, portanto, é dada por

$$A_{máx} = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$A_{máx} = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$A_{máx} = -\frac{\left(24^2 - 4.\left(-\frac{3}{2}\right).0\right)}{4.\left(-\frac{3}{2}\right)}$$

$$A_{máx} = -\frac{576}{(-6)}$$

$$A_{máx} = 96m^2$$

9. Considere as retas $r: -\frac{x}{2} + 2y - 3 = 0$ e $s: ax + by + c = 0$. Sabendo que $r \perp s$ e que $P(2,2) \in s$, assinale a opção que contém valores corretos possíveis para a, b e c respectivamente:

[A] 4, 1, 10

[B] 4, 1, −10

[C] −4, −1, −10

[D] −4, 1, 10

[E] 4, −1, 10

Gabarito: B

Solução:

A equação da reta r pode ser escrita na forma reduzida $y = \frac{x}{4} + \frac{3}{2}$. Seu coeficiente angular m_r é igual a $\frac{1}{4}$. Como r e s são perpendiculares, $m_s = -\frac{1}{m_r} = -4$. Como $P(2,2) \in s$, sua equação pode ser escrita na forma $y - 2 = -4(x - 2)$. Dessa forma, a equação geral da reta s é $4x + y - 10 = 0$ e, assim, $a = 4$, $b = 1$ e $c = -10$.

10. Foi construído na EsPCEx um reservatório de água cuja seção reta do sólido que o representa e que passa pelo seu eixo de simetria é mostrada na figura a seguir

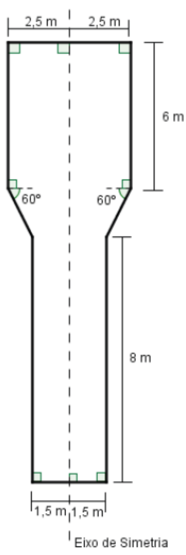


Imagem fora de escala

O formato tridimensional desse reservatório foi obtido pelo giro completo da seção reta em torno do eixo de simetria. Desejando-se realizar a pintura da área lateral do reservatório, a Prefeitura Militar da EsPCEx adquiriu uma tinta que tem rendimento de 5 metros quadrados por litro. Serão dadas <u>duas demãos</u> e não haverá desperdício nem mistura com água. Considerando $\pi = 3$, o mínimo número inteiro de litros de tinta necessários para a pintura é igual a:

[A] 74 **[C] 76** **[E] 78**

[B] 75 **[D] 77**

Gabarito: B

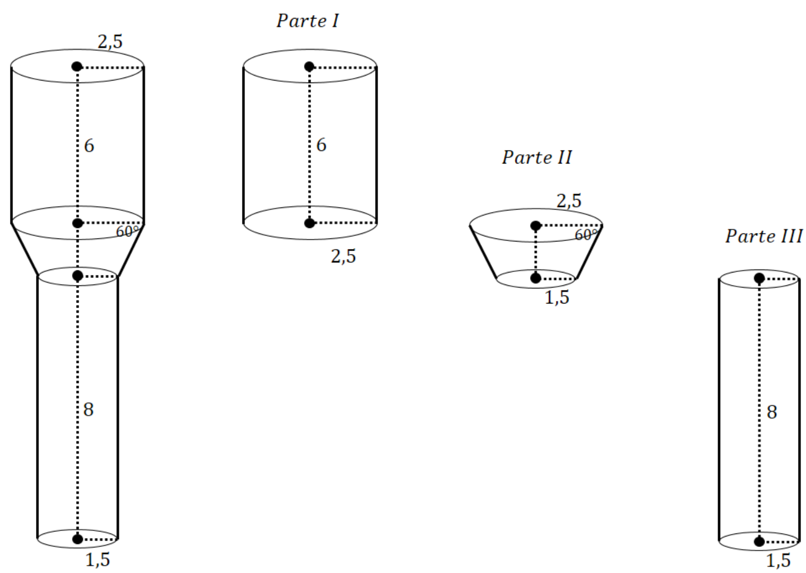
Solução:

A figura a seguir representa o reservatório de água. Esse sólido é a justaposição de três partes:

Parte I: um cilindro circular reto, de altura $6m$ e raio da base $2{,}5m$;

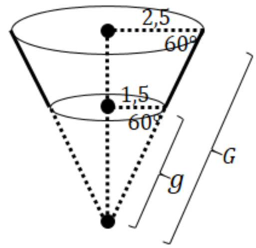
Parte II: um tronco de cone, cujas bases são círculos de raios $2{,}5m$ e $1{,}5m$, respectivamente, e geratrizes que formam $60°$ com o plano da base de raio maior;

Parte III: um cilindro circular reto, de altura $8m$ e raio da base $1{,}5m$.



A área lateral da parte I é igual a $2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 6 = 30\pi\ m^2$. A área lateral da parte III é igual a $2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 8 = 24\pi\ m^2$. Para calcular a área lateral da parte II, basta observar que esta pode ser obtida por meio da diferença entre a área lateral de um cone circular reto de raio da base $2{,}5m$ e geratriz G e a área lateral de um cone circular reto de raio da base $1{,}5m$ e geratriz g. A figura a seguir, representa a situação descrita.

$Parte\ II$



Para determinar as medidas G e g na figura, temos:

$$\cos 60° = \frac{2,5}{G}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2,5}{G}$$

$$G = 5$$

$$\cos 60° = \frac{1,5}{g}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1,5}{g}$$

$$g = 3$$

Dessa forma, a área lateral da parte II é igual a $\pi \cdot 2,5 \cdot 5 - \pi \cdot 1,5 \cdot 3 = 12,5\pi - 4,5\pi = 8\pi\ m^2$ (lembre-se que a área latera de um cone circular reto de raio da base r e geratriz g é igual a $\pi r g$).

A área lateral do reservatório é, portanto, $30\pi + 24\pi + 8\pi = 62\pi\ m^2$. Considerando $\pi = 3$, essa área é igual a $186\ m^2$. A quantidade de litros de tinta necessárias para pintar essa superfície, com duas demãos, usando uma tinta com rendimento de $5\ m^2$ por litro, é $\frac{186\times 2}{5} = 74,4$. Dessa forma, o menor inteiro que é maior que $74,4$ é 75.

11. Um segmento de reta de $2\ cm$ deve ser dividido em três partes. Qual a probabilidade dessas três partes formarem um triângulo?

[A] $\frac{1}{8}$

[B] $\frac{1}{5}$

[C] $\frac{1}{4}$

[D] $\frac{1}{3}$

[E] $\frac{1}{2}$

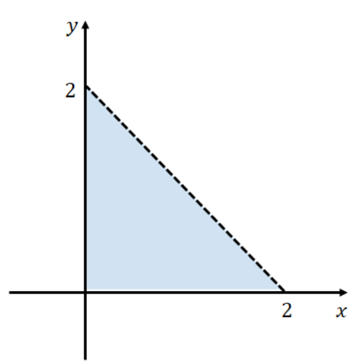
Gabarito: C

Solução:

Se o segmento de reta de $2cm$ foi dividido em três partes de medidas x, y e $2-x-y$, temos que

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ 2 - x - y > 0 \end{cases}$$

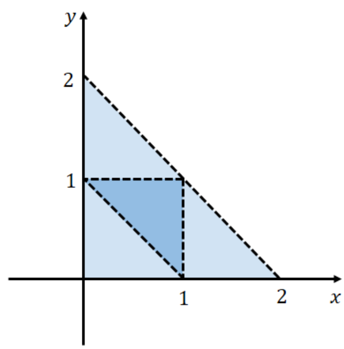
Os pontos de coordenadas (x, y) que satisfazem a essas condições pertencem ao interior do triângulo representado a seguir.



Para que seja possível formar um triângulo com essas três partes, temos que os pontos do conjunto anterior devem ser tais que

$$\begin{cases} x < y + 2 - x - y \Rightarrow x < 1 \\ y < x + 2 - x - y \Rightarrow y < 1 \\ 2 - x - y < x + y \Rightarrow x + y > 1 \end{cases}$$

Esse conjunto de desigualdades delimita o triângulo menor, inscrito no triângulo apresentado na figura anterior e representado a seguir.



A região ocupada pelo maior dos triângulos representa o total de escolhas possíveis para os valores de x, y e, consequentemente, $2 - x - y$, ou seja, o total de maneiras de dividir um segmento de $2cm$ em três partes. Já a região escura, indica os casos favoráveis, ou seja, as maneiras de dividir o segmento de $2cm$ em três partes que podem ser lados de um triângulo. A razão entre a área escura e a área do triângulo maior é a probabilidade procurada. É fácil ver que a área escura corresponde a $\frac{1}{4}$ da área total.

12. Sabendo que $x \in [0, 2\pi]$, o número de soluções da equação $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ é igual a:

[A] 2

[B] 3

[C] 4

[D] 5

[E] 6

Gabarito: E

Solução:

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in [0,2\pi]$, temos:

Se $k = 0, x = \frac{\pi}{4}$;

Se $k = 1, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$;

Se $k = 2, x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$;

Se $k = 3, x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$;

Se $k = 4, x = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} = \frac{19\pi}{12}$;

Se $k = 5, x = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3} = \frac{23\pi}{12}$;

Para valores de k maiores que 5 ou menores que 0, são encontrados valores para x que não pertencem ao intervalo $[0,2\pi]$ e, assim, a equação possui 6 soluções.

13. Sabendo que $x \in \mathbb{R}$, o conjunto solução S da equação $4^x + 10^x = 25^x$ é:

[A] $\boldsymbol{S=\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}}$

[B] $\boldsymbol{S=\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}}$

[C] $\boldsymbol{S=\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}}$

[D] $\boldsymbol{S=\left\{\log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}}$

[E] $\boldsymbol{S=\left\{\log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}}$

Gabarito: D

Solução:

$$4^x+10^x=25^x$$

$$(2\cdot 2)^x+(2\cdot 5)^x=(5\cdot 5)^x$$

$$2^x\cdot 2^x+2^x\cdot 5^x=5^x\cdot 5^x$$

Dividindo-se todos os termos da equação por $2^x\cdot 5^x$, temos

$$\frac{2^x}{5^x}+1=\frac{5^x}{2^x}$$

Substituindo-se $\frac{2^x}{5^x}$ por y, temos

$$y+1=\frac{1}{y}$$

$$y^2+y-1=0$$

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como $y = \frac{2^x}{5^x}$, temos que $y > 0$ e, assim,

$$y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{2^x}{5^x} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

14. Sabendo que $x \in \mathbb{R}$, o produto dos valores de x que tornam nulo o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & |x| & x^2 \end{pmatrix}$ é igual a:

[A] -9

[B] -3

[C] 0

[D] 3

[E] 9

Gabarito: A

Solução:

Por meio da regra de Sarrus, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & |x| & x^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & |x| \end{matrix}$$

$$x^2 + 4 + 0 - 7 - 2|x| - 0 = 0$$

$$x^2 - 2|x| - 3 = 0$$

I) Se $x \geq 0$, então $|x| = x$ e, assim, a equação $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ equivale a $x^2 - 2x - 3 = 0$. Dessa forma, $x = -1$ ou $x = 3$ e, como $x \geq 0$, temos que $x = 3$.

II) Se $x < 0$, então $|x| = -x$ e, assim, a equação $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ equivale a $x^2 - 2(-x) - 3 = 0$, ou seja, $x^2 + 2x - 3 = 0$. Dessa forma, $x = -3$ ou $x = 1$ e, como $x < 0$, temos que $x = -3$.

Dessa forma, o produto dos valores de x que tornam nulo o determinante da matriz dada é igual a $3.(-3) = -9$.

15. Dados os conjuntos $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ e $C \subset (A \cup B)$. Se $A \cup B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ são, respectivamente, os domínios das funções reais definidas por: $\log\left(2x - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$, $\sqrt{-x^2 + 7x - 12}$ e $\sqrt{\frac{x - \frac{2\pi}{3}}{\frac{7}{2} - x}}$, é correto afirmar que:

[A] $C = \left[\frac{\pi}{3}, 3\right]$

[B] $C = \left[\frac{2\pi}{3}, 4\right]$

[C] $C = \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{7}{2}\right]$

[D] $C = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{4}, \frac{2\pi}{3}\right]$

[E] $C = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{4}, \frac{7}{2}\right]$

Gabarito: B

Solução:

I) Para a função $f(x) = \log\left(2x - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$, temos

$$2x - \frac{\sqrt{\pi}}{2} > 0$$

$$2x > \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

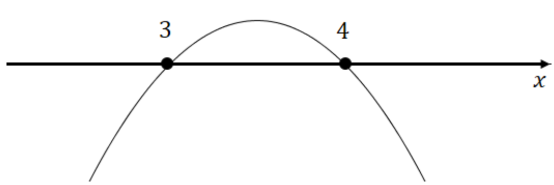
$$x > \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

ou seja, $D(f) = \left]\frac{\sqrt{\pi}}{4}, +\infty\right[$.

II) Para a função $g(x) = \sqrt{-x^2 + 7x - 12}$, temos

$$-x^2 + 7x - 12 \geq 0$$

As raízes de $-x^2 + 7x - 12$ são $x = 3$ e $x = 4$. A figura a seguir apresenta um esboço do gráfico de $-x^2 + 7x - 12$.



Dessa forma, o conjunto-solução da inequação $-x^2 + 7x - 12 \geq 0$ é $[3,4]$, ou seja, $D(g) = [3,4]$.

III) Para a função $h(x) = \sqrt{\frac{x - \frac{2\pi}{3}}{\frac{7}{2} - x}}$, temos

$$\frac{x-\frac{2\pi}{3}}{\frac{7}{2}-x} \geq 0$$

A inequação-quociente pode ser resolvida por meio de um quadro de sinais. Note que as raízes de $x-\frac{2\pi}{3}$ e de $\frac{7}{2}-x$ são $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{7}{2}$, respectivamente.

		$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7}{2}$
$x-\frac{2\pi}{3}$	$-$	$+$	$+$
$\frac{7}{2}-x$	$+$	$+$	$-$
$\frac{x-\frac{2\pi}{3}}{\frac{7}{2}-x}$	$-$	$+$	$-$

Para que o quociente entre $x-\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{7}{2}-x$ esteja definido, temos que $\frac{7}{2}-x \neq 0$, ou seja, $x \neq \frac{7}{2}$. Com base no quadro anterior, esse quociente assume valores maiores ou iguais a zero no intervalo entre $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{7}{2}$, incluindo $\frac{2\pi}{3}$, que é raiz de $x-\frac{2\pi}{3}$, porém excluindo $\frac{7}{2}$, já que $x \neq \frac{7}{2}$. Dessa forma, temos que $D(h) = \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{7}{2}\right[$.

Agora, note que $(A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$. Se $C \subset (A \cup B)$, então $(A \cup B) \cap C = C$. Dessa forma, temos que $A \cup B = \left]\frac{\sqrt{\pi}}{4}, +\infty\right[$, $A \cap C = [3{,}4]$, $B \cap C = \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{7}{2}\right[$ e $C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = [3{,}4] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{7}{2}\right[= \left[\frac{2\pi}{3}, 4\right]$.

16. Dada a função real $f(x) = x^2 + 1$, a solução de $f(2\sqrt{x}) + 5$ pertence ao conjunto:

[A] $(-\infty, -5]$

[B] $(-\mathbf{5}, -\mathbf{1}]$

[C] $(-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$

[D] $(\mathbf{1}, \mathbf{5}]$

[E] $(\mathbf{5}, +\infty)$

Gabarito: D

Solução:

$$f(x) = f\left(2\sqrt{x}\right) + 5$$

$$x^2 + 1 = \left(2\sqrt{x}\right)^2 + 1 + 5$$

$$x^2 - 4|x| - 5 = 0$$

Se $x \geq 0$, $|x| = x$ e, assim, as soluções da equação $x^2 - 4x - 5 = 0$ são $x = -1$ e $x = 5$, sendo descartada a solução negativa. Como x não pode assumir valor negativo, já que $\sqrt{x}$ assume valores reais apenas para valores de x maiores ou iguais a zero, temos que o conjunto solução da equação é $S = \{5\}$.

17. Considere as circunferências $\boldsymbol{\lambda_1: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0}$ e $\boldsymbol{\lambda_2: x^2 + y^2 + 4x - 10y + 13 = 0}$. Qual a posição relativa de $\boldsymbol{\lambda_1}$ e $\boldsymbol{\lambda_2}$?

[A] Uma interior à outra.

[B] Tangentes interiormente.

[C] Exteriores.

[D] Tangentes exteriormente.

[E] Secantes.

Gabarito: E

Solução:

Vamos obter a forma reduzida da equação da circunferência $\lambda_1 : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y = -1$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = -1 + 1 + 4$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

Trata-se de uma circunferência de centro $(1,2)$ e raio 2.

Vamos obter a forma reduzida da equação da circunferência $\lambda_2 : x^2 + y^2 + 4x - 10y + 13 = 0$:

$$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 13 = 0$$

$$x^2 + 4x + y^2 - 10y = -13$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = -13 + 4 + 25$$

$$(x+2)^2 + (y-5)^2 = 16$$

Trata-se de uma circunferência de centro $(-2,5)$ e raio 4.

A figura a seguir representa essas circunferências. Tratam-se de circunferências secantes.