



François LIRET

Maths en pratique

À l'usage des étudiants

Cours et exercices



DUNOD

MATHS EN PRATIQUE

À l'usage des étudiants

Consultez nos catalogues sur le Web



Édiscience
ETSF
InterÉditions
Microsoft Press

Recherche

Accueil
Contacts
Sciences et Techniques
Informatique
Gestion et Management
Sciences Humaines
Acheter
Mon panier

Interviews

Comme nous avons changé ! La saga inédite de 50 ans de bouleversements socioculturels
Alain de Vulpien

Mars, planète de mythes, planète d'espoirs
Francis Rocard

→ toutes les interviews

Événements

Saint-Valentin : j'aime mon couple... et je le soigne ! Interview exclusive de H. Jaoui

En librairie ce mois-ci

Spécial Révisions scientifiques ! Pour réussir vos examens, **jouez** avec DUNOD et EDISCIENCE et gagnez des chèques-lire de 15€ !

les librairies

- Nouveautés - Nouveautés - Nouveautés -



Image numérique couleur
De l'acquisition au traitement
Alain Trémeau, Christine Fernandez-Maloigne, Pierre Bonton



Risque Pays 2004
Coface, Le Moci



LES IDS
Détection et prévention des intrusions IDS
Thierry Evangelista



De quelle vie voulez-vous être ?
Tirer profit du passé pour réorganiser sa vie
Pierre-Jean De Jonghe

LES BIBLIOTHÈQUES DES MÉTIERS

- Gestion industrielle
- Métiers du vin
- Directeur
- d'établissement social et médico-social
- Toutes les bibliothèques

LES NEWSLETTERS

- Action sociale
- Entreprise
- Informatique et NTIC
- Documentation pour l'industrie
- Toutes les newsletters

bibliothèques des métiers
newsletters
ediscience.net
expert-sup.com
Notice légale

www.dunod.com

MATHS EN PRATIQUE

À l'usage des étudiants

Cours et exercices

François Liret

Maître de conférence
à l'université Paris 7 – Denis Diderot

DUNOD

DU MÊME AUTEUR

Algèbre – Licence 1^{re} année

(avec D. Martinais), Dunod, 2003

Analyse – Licence 1^{re} année

(avec D. Martinais), Dunod, 2003

Algèbre et géométrie – Licence 2^e année

(avec D. Martinais), Dunod, 2003

Analyse – Licence 2^e année

(avec D. Martinais), Dunod, 2004

Illustration de couverture : Digital Vision

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2006

ISBN 2 10 049629 8

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Chapitre 1. Ensembles, nombres et fonctions

1. Langage et notations pour utiliser les ensembles	1
2. Les nombres	3
3. Les fonctions	12
Transformation et itération	15
Changement de référentiel	24
Groupes de transformations	27
Exercices	30

Chapitre 2. Nombres complexes et polynômes

1. Les nombres complexes	35
2. Fonctions polynômes	43
Exercices	53

Chapitre 3. Dénombrement, permutations, graphes

1. Ensembles finis	57
Des dénombrements utiles	60
Probabilité binomiale et loi des grands nombres	67
Espérance et variance d'une variable aléatoire discrète	69
2. Permutations	70
3. Graphes	78
Arbre de recouvrement de poids minimal	80
Chemin de poids minimum d'un sommet à un autre	83
Le problème du flot maximum	86
Exercices	96

Chapitre 4. Équations linéaires et vecteurs

1. Vecteurs et combinaisons linéaires	101
2. Résolution des équations linéaires	107
3. Dimension d'un sous-espace vectoriel	115
4. Un exemple d'application	122
Exercices	125

Chapitre 5. Matrices et déterminants

1. Matrices	129
Matrices et systèmes linéaires	136
Le groupe affine	140
Exemple d'application : un intégrateur numérique	141
2. Déterminants	144
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée	151
Applications des déterminants	153
Exercices	156

Chapitre 6. Espaces vectoriels et applications linéaires

1. Espaces vectoriels	161
2. Applications linéaires	167
3. Diagonalisation	173
4. Trigonalisation	179
5. Applications	182
Étude d'itérations linéaires	184
Suite de transitions probabilistes	188
Itérations affines commandables	190
Exercices	194

Chapitre 7. Espace hermitien, espace euclidien

1. Produit hermitien et produit scalaire	199
Sous-espace orthogonaux et projections	208
Une application : la méthode des moindres carrés	211
2. Matrices unitaires, matrices hermitiennes	213
3. Géométrie euclidienne	221
4. Application à l'analyse de données	229
Exercices	236

Chapitre 8. Des méthodes numériques

1. Norme et conditionnement d'une matrice	241
2. Résolution d'équations linéaires	246
Factorisation LU	246
Méthode de relaxation	248
3. Calcul de valeurs propres	255
Exercices	258

Chapitre 9. Limites, dérivées, intégrales

1. Rappels sur les limites	261
2. Ordres de grandeur	264
3. La dérivée	271
Comportement d'une fonction au voisinage d'un point	273
La différentielle	278
4. Fonctions continues	281
5. L'intégrale	284
Exercices	292

Chapitre 10. Utilisation de la dérivée et de l'intégrale

1. Étude des variations d'une fonction	297
2. Développements limités	300
3. Résolution d'équations par la méthode de Newton	307
4. Courbes paramétrées	310
Tangente, longueur, courbure	311
5. Calcul de primitives	317
6. Intégrales généralisées	323
7. Application aux probabilités	328
La loi normale	331
Exercices	337

Chapitre 11. Interpolation, calcul numérique d'intégrales

1. Interpolation polynomiale	343
Les polynômes de Lagrange	343
Interpolation par des fonctions splines	350
2. Calcul numérique d'intégrales	354
Exercices	357

Chapitre 12. Fonctions de plusieurs variables

1. Présentation	359
2. Normes et distances dans $\mathbb{R}^n$	360
3. Dérivées partielles	362
4. Extremum local	373
Méthode du gradient	376
5. Extremum sous contraintes	377
Une application statistique : le krigeage	381
6. Intégrales à paramètre	386
7. Linéarisation locale d'une transformation	388
Exercices	392

Chapitre 13. Intégrales multiples

1. Notion d'intégrale multiple et méthode de calcul	397
2. Application aux probabilités	406
3. Produit de convolution	409
Exercices	411

Chapitre 14. Champ de vecteurs, formes différentielles

1. Champ de vecteurs	415
Champ de gradient	416
Rotationnel	418
Intégrale curviligne	423
2. Formule de Stokes	425
Applications	433
Exercices	437

Chapitre 15. Équations différentielles

1. Équations différentielles du premier ordre	440
Équations différentielles linéaires	443
Équations différentielles à variables séparées	446
2. Équations différentielles linéaires d'ordre 2	450
3. L'équation de Newton	460
4. Introduction au calcul des variations	466
Exercices	472

Chapitre 16. Systèmes différentiels

1. Systèmes différentiels linéaires	478
2. Système différentiel linéaire contrôlé	494
Commandabilité	495
Introduction au rétro-contrôle	496
3. Systèmes différentiels généraux	499
Linéarisation autour d'un équilibre	503
Fonction de Liapounov	507
Systèmes hamiltoniens	509
4. Dépendance par rapport à la condition initiale	511
5. Un exemple de prévision en épidémiologie	512
6. Étude du moteur électrique	514
7. Une méthode de résolution numérique	518
Exercices	521

Chapitre 17. Séries, séries entières, séries de Fourier

1. Séries numériques	527
2. Séries entières	533
Calculs de solutions d'équations différentielles	541
Un exemple de fonction génératrice	547
3. Décomposition de Fourier	548
4. Ondelettes de Haar	562
Application à la compression d'images	567
Exercices	569

Annexes 577

1. Fonction de Gauss	577
2. Fonctions de Bessel	577
3. Analyse de données	578

Index d'Algèbre 581

Index d'Analyse 585

Avant-Propos

Ce livre s'adresse à des étudiants scientifiques d'un cursus Licence utilisant les Mathématiques comme outil de calcul, que ce soit dans le cadre de sciences générales pour l'ingénieur ou dans des disciplines spécifiques. C'est pourquoi l'on y présente de nombreux exemples d'applications dans des domaines variés, comme la Physique, les Sciences de la Vie, l'Économie ou la théorie du contrôle.

Les étudiants en Mathématiques, en Mathématiques appliquées ou en Informatique pourront aussi y découvrir des techniques de calcul, des exemples de modélisation et des problématiques que leur programme théorique ne laisse pas le temps d'explorer suffisamment.

Le livre se partage à peu près équitablement entre l'algèbre et l'analyse. S'agissant des méthodes numériques et des algorithmes présentés, le choix, nécessairement très sévère, s'est porté sur les plus courants et tient compte de l'efficacité, de la généralité et de la simplicité de mise en œuvre.

Dans le cours, les notions acquises dans une classe de Terminale scientifique sont supposées connues. Afin de développer des applications suffisamment riches tout en restant à un niveau élémentaire, de nombreux résultats ont été admis, parfois avec un commentaire explicatif ou heuristique appelé *justification*. Le terme *démonstration* est réservé à une argumentation complète sur le plan mathématique.

Les exercices sont des applications utiles et directes du cours. Il sont très généralement calculatoires, de sorte qu'on doit les faire à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul scientifique. Quelques rares exercices apportent un petit complément théorique qu'il faut considérer comme un résultat à connaître. Le signe @ indique que l'on trouvera une solution ou des indications dans les « Compléments en ligne » à l'adresse <http://www.dunod.com>.

Je remercie mes collègues de différentes disciplines qui ont bien voulu m'éclairer en répondant à mes questions et notamment Jacqueline concernant la problématique des Statistiques et des Probabilités. Merci à Eric pour son soutien technique et ses idées originales et à Michèle pour la marmotte.

Merci à Christian qui a relu le texte avec acuité : ses remarques pertinentes sont à l'origine de nombreuses améliorations. Un grand merci à Alberto qui, avec talent et gentillesse, a assuré un gros travail de mise en page et la réalisation finale de toutes les figures.

Et surtout, merci à Dominique.

Chapitre 1

Ensembles, nombres et fonctions

1. Langage et notations pour utiliser les ensembles

En Mathématiques, on définit souvent des collections d'objets appelées *ensembles*. Voici les notions générales et les expressions couramment employées lorsqu'on considère des ensembles.

1.1 Éléments et parties d'un ensemble

Éléments d'un ensemble. En général, on désigne un ensemble par une lettre. Si par exemple E désigne un ensemble, alors chaque objet a de la collection E s'appelle un *élément* de E : on dit que a *appartient* à E et l'on exprime cette propriété en écrivant $a \in E$. Le signe $\in$ est le symbole d'appartenance. Des ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments.

Parties d'un ensemble. Supposons que E est un ensemble. On appelle *partie* de E un ensemble formé de certains éléments de E . Une partie de E est donc un ensemble A ayant la propriété suivante : tout élément de A est aussi un élément de E . Pour exprimer que l'ensemble A est une partie de l'ensemble E , on dit aussi que A *est inclus dans* E , ce que l'on note $A \subset E$. Le signe d'inclusion $\subset$ ne s'écrit qu'entre deux ensembles et ne doit pas être confondu avec le signe d'appartenance $\in$. Pour montrer que des ensembles E et F sont égaux, il faut vérifier que l'on a les deux inclusions $E \subset F$ et $F \subset E$.

Propriété caractéristique d'une partie. Supposons que l'on ait défini pour chaque élément x de E une propriété $\mathcal{P}(x)$ qui peut être satisfaite ou non. L'ensemble des éléments $x \in E$ qui satisfont la propriété $\mathcal{P}(x)$ est une partie de E que l'on note $\{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$, ce qui se lit "l'ensemble des éléments x appartenant à E tels que $\mathcal{P}(x)$ ". Si l'on pose $A = \{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$, la propriété $\mathcal{P}$ s'appelle la propriété caractéristique de A .

Exemple 1. Notons E l'ensemble des nombres entiers compris entre $-5/2$ et $11/3$. Les nombres 2 et 3 appartiennent à l'ensemble E , alors que -3 n'y appartient pas : on a donc les relations $2 \in E$ et $-3 \notin E$. Les éléments de l'ensemble E sont exactement les nombres $-2, -1, 0, 1, 2$ et 3 : pour exprimer cela, on écrit la liste des éléments entre accolades, sous la forme $E = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Exemple 2. Un nombre entier positif ou nul s'appelle un *entier naturel* et l'ensemble de tous les entiers naturels se note $\mathbb{N}$. Par exemple, $168/6 \in \mathbb{N}$, $168/9$ n'est pas un entier naturel et pour tout entier $n \geq 1$, le nombre $(1+\sqrt{5})^n + (1-\sqrt{5})^n$ appartient à $\mathbb{N}$.

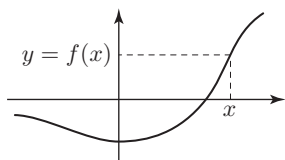
Exemple 3. Un nombre entier positif ou négatif ou nul, s'appelle un *entier relatif* et l'ensemble des entiers relatifs se note $\mathbb{Z}$. On a donc $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$ et $\{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x^2 < 16\} = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$. L'ensemble E de l'exemple 1 est une partie de $\mathbb{Z}$ et l'on a $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x + 2 \leq 5\}$.

Définition

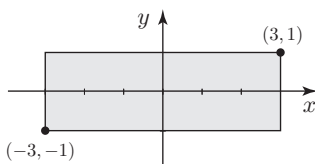
Soient E et F des ensembles. La donnée d'un élément x appartenant à E et d'un élément y appartenant à F s'appelle un *couple* et se note (x, y) ; la règle d'égalité est : $(x, y) = (x', y')$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$. L'ensemble de ces couples se note $E \times F$ et s'appelle le *produit cartésien* des ensembles E et F .

Exemples 4. On utilise souvent des couples de nombres.

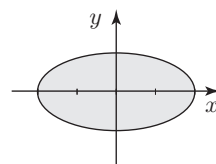
- Les couples $(1, 2)$ et $(2, 1)$ sont deux éléments différents appartenant à l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- L'ensemble des nombres réels se note $\mathbb{R}$. Les couples (x, y) de nombres réels sont les éléments de l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Dans un plan muni d'axes, tout point est repéré par le couple (x, y) de ses coordonnées.
On définit de même les triplets (x, y, z) de nombres réels : leur ensemble se note $\mathbb{R}^3$. Si l'on se donne un repère de l'espace, chaque point possède trois coordonnées : les triplets de nombres réels permettent de repérer les points de l'espace.
- Voici des ensembles de couples de nombres réels : la figure de gauche représente le graphe d'une fonction f , celle de droite l'intérieur d'une ellipse (voir page 22).



$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$$



$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 3, |y| \leq 1\}$$



$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 4\}$$

1.2 Opérations sur les parties d'un ensemble

Intersection de parties. Soient A et B des parties d'un ensemble E . Les éléments de E qui appartiennent à la fois à A et à B forment une partie de E appelée *intersection de A et B* et notée $A \cap B$. On a donc $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$ et aussi les relations d'inclusion $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.

Si aucun élément de E n'appartient à l'intersection de A et B , on dit que la partie $A \cap B$ est vide et l'on écrit $A \cap B = \emptyset$. Le symbole $\emptyset$ désigne l'ensemble qui n'a aucun élément.

Réunion de parties. A et B étant des parties de E , l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou à B est une partie de E appelée *réunion de A et B* et notée $A \cup B$. On a les inclusions $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.

Complémentaire d'une partie. Si A est une partie de E , l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A s'appelle le *complémentaire de A* et se note $E \setminus A$. On a les relations $A \cup (E \setminus A) = E$ et $A \cap (E \setminus A) = \emptyset$.

Exemple 5. Donnons-nous deux points distincts P et Q dans

l'espace euclidien et considérons l'ensemble H des points

de l'espace qui sont équidistants de P et Q : c'est le

plan passant par le milieu I du segment PQ et

perpendiculaire à la droite (PQ) . Le plan

H s'appelle le plan médiateur de PQ . Soit

R un autre point de l'espace différent de P

et de Q et soit H' le plan médiateur de QR . Si

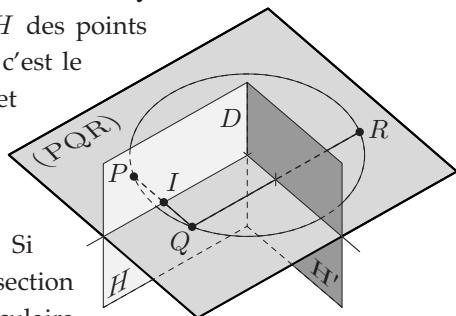
les points P, Q, R ne sont pas alignés, l'intersection

des plans H et H' est une droite D perpendiculaire

au plan (PQR) . Cette droite coupe le plan (PQR) en un point équidistant de P, Q

et R , c'est-à-dire au centre du cercle circonscrit au triangle PQR . Si les points P, Q, R

sont alignés, les plans H et H' sont parallèles et $H \cap H'$ est l'ensemble vide.

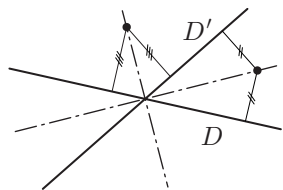


Exemple 6. Dans un plan euclidien, donnons-nous deux

droites sécantes D et D' . L'ensemble des points du plan

équidistants de D et D' est la réunion des deux bissectrices

de l'angle formé par D et D' .



2. Les nombres

On exprime souvent un nombre par son écriture décimale. Pour un nombre entier ou décimal, il n'y a qu'un nombre fini de chiffres, alors qu'un nombre réel possède en général une écriture décimale illimitée.

2.1 Écriture d'un entier naturel

Les chiffres d'un entier naturel représentent les unités dans l'échelle $1, 10, 10^2, \dots$ des puissances positives de 10 : par exemple, pour l'entier $a = 234$, on a $a = 4 + 3 \times 10 + 2 \times 10^2$.

Voici comment retrouver les chiffres d'un entier par des opérations arithmétiques.

- Puisque $a = 4 + 23 \times 10$, le chiffre des unités est le reste de la division de a par 10.
- L'entier $a - 4$ étant multiple de 10, posons $a - 4 = 10a_1$, donc $a_1 = (a - 4)/10 = 23 = 3 + 2 \times 10$; le chiffre des dizaines est le reste de la division de a_1 par 10.
- L'entier $a_1 - 3$ est multiple de 10 et en posant $a_1 - 3 = 10a_2$, il vient $a_2 = (a_1 - 3)/10 = 2$ qui est le chiffre des centaines.

Pour écrire un algorithme de calcul des chiffres d'un entier $a > 0$, introduisons une variable x qui prendra successivement les valeurs $a, a_1, a_2, \dots$ et une variable c dont les valeurs seront les chiffres de a ; la liste L des chiffres sera composée en écrivant de droite à gauche.

Algorithme de calcul des chiffres

initialisation : ($L \leftarrow$ liste vide) ($a \leftarrow$ un entier positif) ($x \leftarrow a$) ($b \leftarrow 10$)

boucle : tant que $x \neq 0$:

$c \leftarrow$ reste de la division de x par b

$x \leftarrow$ quotient de $x - c$ par b

$L \leftarrow c, L$ (on ajoute le chiffre c en tête de la liste L)

Si au lieu de 10, on choisit pour b un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2, cet algorithme calcule les chiffres de l'écriture de l'entier a en base b , c'est-à-dire les entiers $c_0, c_1, \dots, c_n$ tels que

$$0 \leq c_i < b \quad \text{et} \quad a = c_0 + c_1 \times b + c_2 \times b^2 + \dots + c_n \times b^n.$$

La base 2 est commode, car il n'y figure que les chiffres 0 et 1. On a par exemple

$$13 = 1 + 2^2 + 2^3 \quad \text{et} \quad 34 = 2 + 2^5$$

donc, en base 2, ces nombres s'écrivent : $13 = [1101]$ et $34 = [100010]$.

2.2 Les entiers relatifs

Un entier relatif est un entier positif ou négatif ou nul. Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, on peut donc ajouter, soustraire et multiplier.

Division euclidienne. Une autre opération essentielle qu'on peut effectuer avec des entiers relatifs, c'est la division avec reste, encore appelée *division euclidienne*. Rappelons la définition de la division par un entier $b > 0$.

Écrivons dans l'ordre les multiples entiers de b :

$$\dots, -2b, -b, 0, b, 2b, \dots, qb, \dots \quad \text{où } q \in \mathbb{Z}.$$

Il est clair que tout entier relatif a est compris entre deux multiples consécutifs de b ; précisément, il y a un unique entier $q \in \mathbb{Z}$ tel que

$$qb \leq a < (q+1)b = qb + b.$$

On a alors $a - qb \geq 0$ et $a - qb < b$, donc en posant $r = a - qb$, il vient

$$a = qb + r, \text{ où } 0 \leq r < b.$$

L'entier q s'appelle le *quotient* de la division euclidienne de a par b et l'entier r s'appelle le *reste* de la division. Le reste est toujours un entier positif ou nul et strictement inférieur au diviseur b . Pour que l'entier a soit multiple de b , il faut et il suffit que le reste de la division de a par b soit nul.

Exemple. Étant donné un entier $n > 0$, cherchons le reste r_n de la division de 3^n par 8. Pour les premières valeurs de n , la division de 3^n par 8 s'écrit :

$$\text{si } n = 1 : 3 = 0 \times 8 + 3, \text{ donc } r_1 = 3 ;$$

$$\text{si } n = 2 : 3^2 = 9 = 1 \times 8 + 1, \text{ donc } r_2 = 1 ;$$

$$\text{si } n = 3 : 3^3 = 3 \times 3^2 = 3(1 \times 8 + 1) = 3 \times 8 + 3, \text{ donc } r_3 = 3.$$

Il semble que les restes prennent successivement les valeurs 3 et 1. Pour vérifier cela, il suffit de montrer que l'on a $r_{n+2} = r_n$ pour tout n .

La division euclidienne de 3^n par 8 s'écrit $3^n = 8q_n + r_n$, où q_n désigne le quotient. Multiplions cette égalité par 3^2 ; il vient

$$3^{n+2} = 3^2 3^n = 3^2(8q_n) + 3^2 r_n = 8(3^2 q_n) + 8r_n + r_n = 8(3^2 q_n + r_n) + r_n.$$

On en déduit que r_n est aussi le reste de la division de 3^{n+2} par 8, donc on a l'égalité $r_{n+2} = r_n$. Puisque $r_1 = 3$ et $r_2 = 1$, on en déduit que $r_n = 3$ si n est impair et que $r_n = 1$ si n est pair.

2.3 Les nombres décimaux

Un *nombre décimal* est le produit d'un entier relatif et d'une puissance de 10. Par exemple, $12 \times 10^{-3} = 0,012$, $1234 \times 10^{-1} = 123,4$ et $(-3) \times 10^2 = -300$ sont des nombres décimaux. Pour avoir les chiffres d'un nombre décimal $a10^p$, où a est un entier, il suffit de décaler les chiffres de a de p places vers la gauche si l'entier p est positif, vers la droite si p est négatif. L'écriture décimale d'un nombre décimal ne comporte donc qu'un nombre fini de chiffres ; ce sont les unités dans l'échelle des puissances positives ou négatives de 10. Ainsi par exemple

$$308705 \times 10^{-4} = 30,8705 = 3 \times 10 + 8 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-4}.$$

Un nombre décimal positif est la somme de sa partie entière et d'un nombre décimal a tel que $0 \leq a < 1$, donc l'écriture décimale de a est de la forme $a = 0, c_1 c_2 \cdots c_n$. Puisque $10a = c_1, c_2 \cdots c_n$, la première décimale c_1 est la partie entière du nombre $a_1 = 10a$. Si l'on pose $a_2 = 10a - c_1$, alors c_2 est la partie entière de $10a_2$. On calcule ainsi de proche en proche les décimales selon l'algorithme suivant :

Algorithme de calcul des décimales

initialisation : ($L \leftarrow$ liste vide) ($a \leftarrow$ un nombre décimal tel que $0 < a < 1$) ($x \leftarrow a$)

boucle : tant que $x \neq 0$:

$c \leftarrow$ partie entière de $10x$

$x \leftarrow 10x - c$

$L \leftarrow L, c$ (on ajoute le chiffre c à la liste L)

L'ordre sur les décimaux. Considérons des nombres décimaux $a = 0, c_1 \cdots c_p$ et $a' = 0, c'_1 \cdots c'_p$ compris strictement entre 0 et 1 (on a écrit le même nombre de décimales en ajoutant éventuellement des zéros). Supposons que a et a' diffèrent seulement à partir de la k -ième décimale, les décimales précédentes étant égales ; alors on a : $a < a'$ si et seulement si $c_k < c'_k$. Par exemple, on a

$$0,01 = 0,01000 < 0,12339 = 0,12339000 < 0,12339001 < 0,123392 < 0,123400.$$

Si deux nombres décimaux ont des parties entières différentes, le plus grand est celui qui a la plus grande partie entière.

Densité des nombres décimaux. Si a est un nombre décimal, alors pour tout entier naturel n , le nombre $a' = a + 10^{-n}$ est décimal. En choisissant n assez grand, l'écart $a' - a = 10^{-n}$ peut être rendu aussi petit que l'on veut. Il y a donc des nombres décimaux différents de a et aussi près qu'on veut de a .

2.4 Les nombres réels

Une définition des nombres réels

Un nombre réel est de manière naturelle une limite de nombres décimaux. Soit $a[1], a[2], \dots, a[n], \dots$ des nombres décimaux positifs ; leurs écritures décimales sont de la forme

$$a[1] = e[1], c_1[1]c_2[1] \cdots c_p[1] \cdots$$

$$a[2] = e[2], c_1[2]c_2[2] \cdots c_p[2] \cdots$$

$\dots \qquad \dots$

$$a[n] = e[n], c_1[n]c_2[n] \cdots c_p[n] \cdots$$

L'entier naturel $e[n]$ est la partie entière de $a[n]$ et les chiffres $c_1[n], c_2[n], \dots$ sont les décimales de $a[n]$; on a terminé chaque écriture par des points de suspension pour éviter de préciser le nombre de chiffres, mais chacun des nombres $a[n]$ n'a qu'un nombre fini de décimales non nulles.

Supposons que la suite des nombres $a[1], a[2], \dots, a[n], \dots$ est décroissante, c'est-à-dire que l'on a $a[n] \geq a[n+1] > 0$ pour tout n .

Les parties entières vérifient donc $e[1] \geq e[2] \geq \dots \geq e[n] \cdots$; puisque les $e[n]$ sont des entiers naturels, la suite $e[1], e[2], \dots, e[n], \dots$ finit par stationner à une valeur e , c'est-à-dire que pour tout entier n supérieur ou égal à un certain rang N_0 , on a $e[n] = e$. Pour $n \geq N_0$, on a $e[n+1] = e[n]$ et $a[n] \geq a[n+1]$, donc les premières décimales vérifient

$c_1[n] \geq c_1[n+1]$ pour tout $n \geq N_0$. En prenant la première décimale de chaque terme, on obtient après le rang N_0 une suite décroissante d'entiers naturels : après un certain rang N_1 , la suite des entiers $c_1[n]$ est donc stationnaire à une valeur c_1 . Ainsi on a

$$a[N_0] = e, c_1[N_0]c_2[N_0] \cdots c_p[N_0] \cdots$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$a[N_1] = e, c_1c_2[N_1] \cdots c_p[N_1] \cdots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a[n] = e, c_1c_2[n] \cdots c_p[n] \cdots$$

autrement dit $a[n] = e, c_1c_2[n] \cdots c_p[n] \cdots$ pour tout $n \geq N_1$.

Pour $n \geq N_1$, l'inégalité $a[n] \geq a[n+1]$ implique de même, pour les deuxièmes décimales, que l'on a $c_2[n] \geq c_2[n+1]$; il y a donc un rang N_2 après lequel les deuxièmes décimales gardent la même valeur c_2 .

D'une manière générale, pour tout entier naturel p , il existe un rang N_p après lequel les p premières décimales restent fixes : pour tout $n \geq N_p$, on a $a[n] = e, c_1c_2 \cdots c_p c_{p+1}[n] \cdots$, où les chiffres $c_1, c_2, \dots, c_p$ ne dépendent plus de n pourvu que $n \geq N_p$.

Pour tout entier $p \geq 1$, on définit ainsi un chiffre c_p et l'on est conduit à convenir que l'écriture $e, c_1c_2 \cdots c_p \cdots$ représente un nombre c , bien que cette écriture puisse présenter une infinité de chiffres non nuls. Le nombre c n'est pas décimal en général, mais les nombres décimaux $a[n]$ approchent c de mieux en mieux : en effet, pour $n \geq N_p$, les deux nombres décimaux $a[n]$ et $e, c_1c_2 \cdots c_p$ ont mêmes p premières décimales, donc l'écart $a[n] - c$ est moindre que 10^{-p} ; puisque le nombre 10^{-p} peut être rendu aussi petit qu'on veut en choisissant p assez grand, on dit que la suite des nombres $a[n]$ a pour limite c , ce qu'on écrit sous la forme

$$\lim (a[n]) = c$$

Par définition, les nombres ainsi obtenus comme limite d'une suite décroissante de nombres décimaux positifs sont les *nombres réels* positifs ou nuls. Un nombre réel possède en général une infinité de décimales non nulles : on dit que son écriture décimale est illimitée.

Exemple. Posons $a[1] = 2/10$ et définissons une suite en posant

$$a[n+1] = (a[n])^2 + (1/10) \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Le nombre $a[1]$ est décimal et comme la somme et le produit de deux décimaux sont décimaux, tous les nombres $a[n]$ sont décimaux.

Montrons que la suite des $a[n]$ est décroissante, c'est-à-dire que l'on a $a[n+1] < a[n]$ pour tout entier $n \geq 1$. Nous raisonnons par récurrence. Puisque $a[2] = (2/10)^2 + 1/10 = 0,14$, on a bien $a[2] < a[1]$. Supposons que n est un entier tel que $a[n+1] < a[n]$. Puisque les nombres $a[n]$ sont tous positifs, il vient $(a[n+1])^2 < (a[n])^2$ donc

$a[n+2] = (a[n+1])^2 + 1/10 < (a[n])^2 + 1/10 = a[n+1]$. D'après le principe de récurrence, on en déduit que l'inégalité $a[n+1] < a[n]$ est vraie quel que soit l'entier $n \geq 1$.

La liste ci-contre donne les premières valeurs approchées des nombres $a(n)$: la limite des $a[n]$ est le nombre réel c dont les premières décimales sont 0,112701665... On peut calculer algébriquement le nombre c : en effet, faisons tendre n vers l'infini dans l'égalité $a[n+1] = (a[n])^2 + (1/10)$; puisque $a[n]$ tend vers c , $(a[n])^2$ tend vers c^2 et comme $a[n+1]$ tend vers c , on obtient

$$c = c^2 + 1/10$$

ou encore $c^2 - c + 1/10 = 0$. L'équation du second degré $x^2 - x + 1/10$ a pour discriminant $1 - (4/10) = 3/5$ et pour racines les nombres réels $(1/2)(1 + \sqrt{3/5})$ et $(1/2)(1 - \sqrt{3/5})$. Puisqu'on a les inégalités

$$0 < c < 1/2 < (1/2)(1 + \sqrt{3/5}),$$

on en déduit $c = (1/2)(1 - \sqrt{3/5}) = \frac{5 - \sqrt{15}}{10}$. On peut montrer que $\sqrt{15}$ n'est pas un nombre décimal, par suite le nombre c n'est pas décimal.

$a[1] = 0,2$
 $a[2] = 0,1440000000$
 $a[3] = 0,1196000000$
 $a[4] = 0,1143041600$
 $a[5] = 0,1130654409$
 $a[6] = 0,1127837939$
 $a[7] = 0,1127201841$
 $a[8] = 0,1127058399$
 $a[9] = 0,1127026063$
 $a[10] = 0,1127018774$
 $a[11] = 0,1127017131$
 $a[12] = 0,1127016760$
 $a[13] = 0,1127016670$
 $a[14] = 0,1127016650$
 $a[15] = 0,1127016655$
 $a[16] = 0,1127016654$

Propriétés des nombres réels

L'ensemble des nombres réels se note $\mathbb{R}$. Rappelons que l'on peut faire la somme, la différence et le produit de deux nombres réels ; on peut aussi diviser par un nombre réel non nul, ce qui a pour conséquence la règle :

si a et b sont des nombres réels tels que $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.

L'ordre sur les nombres réels. La comparaison entre deux nombres réels se définit comme pour les nombres décimaux : par exemple, si des nombres réels $c = 0, c_1 c_2 \dots c_{k-1} c_k \dots$ et $c' = 0, c'_1 c'_2 \dots c'_{k-1} c'_k \dots$ ne diffèrent qu'à partir de la k -ième décimale, alors : $c < c'$ si et seulement si $c_k < c'_k$. On a aussi la définition plus algébrique :

$$c < c' \text{ si et seulement si } c' - c > 0.$$

Si a est un nombre réel, il existe des nombres réels différents de a et aussi près qu'on veut de a , par exemple les nombres $a + 10^{-n}$ pour n assez grand. Rappelons quelques définitions :

Définitions

- La *partie entière* d'un nombre réel a est l'entier (positif ou négatif) noté $E(a)$, tel que $E(a) \leq a < E(a) + 1$.
- Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. L'*intervalle ouvert* $]a, b[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x < b$. L'*intervalle fermé* $[a, b]$, appelé aussi *segment*, est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$.

► Si a et b sont des nombres réels, on définit de manière analogue les intervalles $]a, b[, [a, b[,]a, +\infty[, [a, +\infty[,]-\infty, b[,]-\infty, b]$ et l'on pose $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Voici les principales règles de calcul sur les inégalités entre nombres réels :

$$a < b \text{ si et seulement si } a + x < b + x$$

$$\text{si } a < b \text{ et } a' \leq b', \text{ alors } a + a' < b + b'$$

$$\text{si } x > 0, \text{ alors on a : } a < b \text{ si et seulement si } ax < bx$$

$$\text{si } x < 0, \text{ alors on a : } a < b \text{ si et seulement si } bx < ax$$

pour des nombres a et b de même signe, on a : $a < b$ si et seulement si $1/b < 1/a$.

2.5 Les nombres rationnels

On appelle *nombre rationnel* le résultat de la division d'un nombre entier par un (autre) nombre entier non nul. Tout nombre décimal est rationnel, mais le nombre rationnel $4/3 = 1,33\cdots 3\cdots$ n'est pas décimal puisqu'il a une infinité de décimales non nulles. L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$. On a donc les inclusions d'ensembles

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

On a souvent besoin d'approcher un nombre réel positif par des nombres rationnels. Si l'écriture décimale d'un nombre réel positif a est $e, c_1 c_2 \cdots c_n \cdots$, alors en ne retenant que les k premières décimales, on obtient des nombres décimaux $a[k] = e, c_1 c_2 \cdots c_k$ vérifiant $a[k] \leq a < a[k] + 10^{-k}$: chaque nombre décimal $a[k]$ approche a à 10^{-k} près. Posons $u_k = 10^k(0, c_1 c_2 \cdots c_k) = c_1 c_2 \cdots c_k$. Le nombre u_k est un entier et l'on a $a[k] = e + 0, c_1 c_2 \cdots c_k = \frac{10^k e + u_k}{10^k}$. L'approximation décimale à 10^{-k} près est donc en général une fraction dont le dénominateur est 10^k .

Meilleure approximation d'un nombre réel par des rationnels

Décrivons, sans la justifier, une méthode pour trouver des nombres rationnels à petits dénominateurs qui approchent rapidement un nombre réel $a > 0$. On suppose a non rationnel.

Posons $a_0 = E(a)$. Puisque a n'est pas entier, le nombre $a - a_0$ n'est pas nul et l'on peut définir un nombre x_1 en posant $a = a_0 + \frac{1}{x_1}$. Puisqu'on a $0 < a - a_0 < 1$, il vient $x_1 > 1$. Le nombre x_1 n'est pas entier, sinon a serait rationnel comme somme d'un entier et d'un rationnel. En posant $a_1 = E(x_1)$, on a donc $0 < x_1 - a_1 < 1$ et l'on peut définir un nombre $x_2 > 1$ tel que $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$. On continue ainsi, selon l'algorithme :

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \frac{1}{x_1}, & \text{où } a_0 &= E(a) \\ x_1 &= a_1 + \frac{1}{x_2}, & \text{où } a_1 &= E(x_1) \\ \dots & \dots & & \\ x_n &= a_n + \frac{1}{x_{n+1}}, & \text{où } a_n &= E(x_n) \end{aligned}$$

Les deux premières lignes donnent $a = a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}}$ et l'on obtient ensuite

les expressions suivantes, appelées *développement de a en fractions continues* :

$$a = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{x_3}}} \quad , \quad a = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{x_4}}}}$$

Les nombres a_i sont des entiers positifs et les x_i sont des nombres réels plus grand que 1. Tronquons ces expressions en posant

$$b_0 = a_0 \quad , \quad b_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} \quad , \quad b_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} \quad , \quad \dots$$

Les nombres $b_0, b_1, b_2, \dots$ sont rationnels, car la somme et le produit de deux rationnels est rationnel et l'inverse d'un rationnel non nul est rationnel. On démontre que la suite des nombres b_n a pour limite a . Posons $b_n = \frac{p_n}{q_n}$, où p_n et q_n sont des entiers. Ces fractions ont une propriété remarquable : parmi les fractions $\frac{p}{q}$ telles que $q \leq q_n$, la fraction $b_n = \frac{p_n}{q_n}$ est la plus proche de a . En ce sens, les rationnels $\frac{p_n}{q_n}$ constituent la *meilleure approximation du nombre a par des fractions*. Ce qualificatif exprime que l'approximation est bonne bien que le dénominateur soit petit.

Exemple 1. Pour le nombre π , on a les égalités :

$$\begin{aligned} \pi &= 3 + \frac{1}{x_1} \quad , \quad \text{où } x_1 = 7,06251330593104576979300515255 \dots \\ x_1 &= 7 + \frac{1}{x_2} \quad , \quad \text{où } x_2 = 15,9965944066857198889230604100 \dots \\ x_2 &= 15 + \frac{1}{x_3} \quad , \quad \text{où } x_3 = 1,00341723101337260346414717001 \dots \\ x_3 &= 1 + \frac{1}{x_4} \quad , \quad \text{où } x_4 = 292,634591014395472378544147738 \dots \end{aligned}$$

d'où les meilleures approximations rationnelles de π :

$$\begin{aligned} b_0 &= 3 \\ b_1 &= 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} \simeq 3,142 \dots \quad (\text{les deux premières décimales sont celles de } \pi) \\ b_2 &= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} = 3 + \frac{15}{106} = \frac{333}{106} \simeq 3,14150 \dots \quad (\text{quatre décimales exactes}) \\ b_3 &= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = 3 + \frac{16}{113} = \frac{355}{113} \simeq 3,1415929 \dots \quad (\text{six décimales exactes}). \end{aligned}$$

Exemple 2. En acoustique, on appelle intervalle entre deux sons le rapport de leurs fréquences : si des fréquences f_1, f'_1, f_2, f'_2 vérifient $f_1/f'_1 = f_2/f'_2$, alors entre les sons de fréquences f_1 et f'_1 , l'oreille perçoit le même intervalle qu'entre les sons de fréquences f_2 et f'_2 . Une note de musique de fréquence f s'accompagne d'harmoniques de fréquences $2f, 3f, \dots$ et les notes de fréquences f et $2f$ sont perçues comme "les mêmes", jouées avec un écart d'une octave. L'intervalle entre les fréquences $2f$ et $3f$ s'appelle une quinte. Pour créer une gamme, c'est-à-dire pour découper les octaves en intervalles dont les multiples permettent suffisamment d'accords avec les quintes, on est amené à chercher de petits entiers naturels p et q tels que p quintes valent à peu près q octaves. Cette condition signifie que $(3/2)^p$ est peu différent de 2^q , ou encore que le rapport $2^{p+q}/3^p$ est proche de 1. En prenant le logarithme, cela se traduit par : $(p+q) \ln 2$ peu différent de $p \ln 3$, ou encore $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ peu différent de la fraction $\frac{p+q}{p}$. Cherchons donc les premières bonnes approximations rationnelles du nombre $\frac{\ln 3}{\ln 2}$.

$$\begin{aligned}\frac{\ln 3}{\ln 2} &= 1,58496250072115618145373894394 \dots = 1 + (1/x_1) \\ x_1 &= 1,70951129135145477697619026217 \dots = 1 + (1/x_2) \\ x_2 &= 1,40942083965320900458240433081 \dots = 1 + (1/x_3) \\ x_3 &= 2,44247459618085927548717403238 \dots = 2 + (1/x_4) \\ x_4 &= 2,26001675267082453593127612260 \dots = 2 + (1/x_5) \\ x_5 &= 3,84590604154639953522819708395 \dots = 3 + (1/x_6) \text{ , } \text{ où } x_6 > 1\end{aligned}$$

d'où les approximations suivantes de $\frac{\ln 3}{\ln 2}$:

$$b_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{8}{5} \quad , \quad b_4 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = \frac{19}{12} \quad \text{et} \quad b_5 = \frac{65}{41}.$$

Avec l'approximation $\frac{8}{5}$, on obtient une gamme où cinq quintes sont équivalentes à trois octaves. Si f_0 est la fréquence de base d'une octave, on montre que les notes successives ont pour fréquence $f_0, f_1 = \frac{9}{8}f_0, f_2 = \frac{4}{3}f_0, f_3 = \frac{3}{2}f_0, f_4 = \frac{16}{9}f_0$: il y a donc cinq notes par octave. Entre deux sons successifs, il n'y a que deux intervalles possibles, car $f_1/f_0 = f_3/f_2 = 2f_0/f_4 = 9/8$ et $f_2/f_1 = f_4/f_3 = 32/27$; ces notes correspondent à peu près aux touches noires du piano.

Avec l'approximation $\frac{19}{12}$, on obtient une gamme chromatique, plus riche, où douze quintes valent sept octaves ; elle contient douze notes.

3. Les fonctions

3.1 Notion générale de fonction

Soient E et F des ensembles. Une *application* ou une *fonction de E dans F* est une règle qui permet d'associer à chaque élément $x \in E$ un élément parfaitement déterminé de F . Il est souvent utile de nommer la fonction : lorsqu'on a défini une fonction f de E dans F , on note $f(x)$ l'élément de F associé à x par la fonction et l'on dit que $f(x)$ est l'*image* de x par la fonction f . La fonction elle-même se note $f : E \rightarrow F$ ou encore $x \mapsto f(x)$; l'ensemble E s'appelle l'*ensemble de départ* ou le *domaine de définition* de f ; l'ensemble F est l'*ensemble d'arrivée* de f .

Égalité de deux fonctions. Des fonctions f et g sont égales si et seulement si elles ont le même ensemble de départ, le même ensemble d'arrivée et si l'on a $f(x) = g(x)$ pour tout x appartenant à l'ensemble de départ.

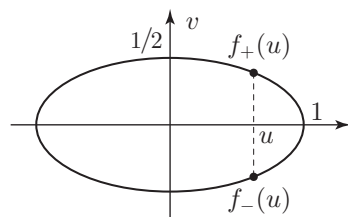
Fonction constante. Une fonction $f : E \rightarrow F$ est *constante* si l'on a $f(x) = f(y)$ pour tous éléments x et y appartenant à E ; il revient au même de dire qu'il existe un élément $b \in F$ tel que $f(x) = b$ quel que soit $x \in E$.

Exemples

- 1) Supposons que des variables réelles u et v sont liées par la relation $u^2 + 4v^2 = 1$.

Si l'on calcule v en fonction de u , on obtient la formule $v = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - u^2}$, valable pour les valeurs de u telles que $-1 \leq u \leq 1$. Cela permet de définir deux fonctions exprimant v au moyen de u : la fonction $f_+ : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_+(u) = \frac{1}{2} \sqrt{1 - u^2}$ et la fonction $f_- : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_-(u) = -\frac{1}{2} \sqrt{1 - u^2}$. Mais la relation

$u^2 + 4v^2 = 1$ ne définit pas v comme fonction de u , car à une valeur de u appartenant à $] -1, 1[$ correspond deux valeurs opposées de v .



- 2) Notons P la pression, V le volume et T la température absolue d'une masse gazeuse donnée. En première approximation, le rapport $\frac{PV}{T}$ reste égal à une constante k . Cette relation permet de définir plusieurs fonctions.

- Si le volume V reste constant, la pression est fonction de la température selon la loi $T \mapsto P(T)$ définie par $P(T) = (k/V)T$. Les quantités $P(T)$ et T sont alors proportionnelles : on dit que la fonction P est *linéaire*.
- À température constante, la pression est fonction du volume : cela définit une fonction $p : V \mapsto \frac{kT}{V}$. Les quantités $p(V)$ et V sont inversement proportionnelles.
- La température est fonction à la fois du volume et de la pression, ce qui définit la fonction de deux variables $T : (P, V) \mapsto \frac{PV}{k}$; les quantités P et V

sont des nombres réels positifs, donc la fonction T est définie sur l'ensemble $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ des couples de nombres réels positifs.

Définition

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Si A est une partie de l'ensemble de départ E , l'ensemble des éléments de F de la forme $f(x)$, où x parcourt la partie A , s'appelle *l'image* de la partie A et se note $f(A)$. L'image de l'ensemble de départ, c'est-à-dire l'ensemble $f(E)$ de tous les éléments de la forme $f(x)$, s'appelle *l'image de f* .

L'image d'une partie de l'ensemble de départ est une partie de l'ensemble d'arrivée. Il ne faut pas confondre

- l'image d'un élément x : c'est l'élément $f(x)$ appartenant à l'ensemble d'arrivée,
- l'image d'une partie A : c'est une partie de l'ensemble d'arrivée.

Exemples

- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto x^2$, alors $f([2, 3]) = [4, 9]$, $f([-2, 3]) = [0, 9]$ et pour tout nombre $a \leq 0$, on a $f([a, +\infty[) = [0, +\infty[$ (figure 1). L'image de f est l'intervalle $[0, +\infty[$.
- L'image de la fonction sinus est le segment $[-1, 1]$. Puisque sinus a pour période 2π , on obtient toute l'image en prenant seulement les valeurs $\sin x$ quand x parcourt un intervalle de longueur 2π : pour tout nombre réel a , on a donc $\sin([a, a+2\pi[) = [-1, 1]$.
- La figure 2 montre le graphe de la fonction $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe $x^3 - 3x$: l'image par u de $[-1, 1]$ est $[-2, 2]$ et l'image de l'application u est $\mathbb{R}$.
- Définissons une fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ en posant $g(x, y) = (x^2 + 1, e^y)$. Les nombres de la forme $x^2 + 1$ sont tous les nombres supérieurs ou égaux à 1 ; les nombres qui peuvent s'écrire e^y sont les nombres strictement positifs : l'image de g est donc la partie $[1, +\infty[\times]0, +\infty[$ de $\mathbb{R}^2$ (figure 3).

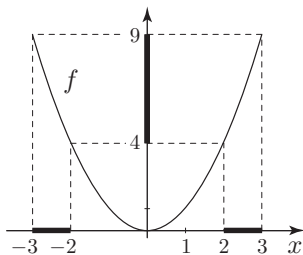


figure 1

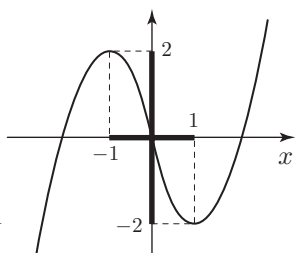


figure 2

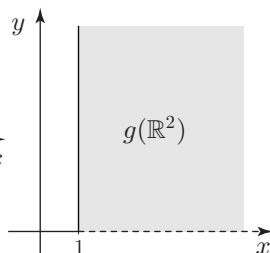


figure 3

Composée de deux fonctions. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction et soit $g : F \rightarrow G$ une fonction définie sur l'ensemble F d'arrivée de f . Pour tout $x \in E$, on a $f(x) \in F$, donc $g(f(x))$ est un élément bien défini de l'ensemble G . L'association $x \mapsto g(f(x))$ est donc une fonction de E dans G .

Définition

La fonction de E dans G qui à tout $x \in E$ associe l'élément $g(f(x))$ s'appelle la *composée* des fonctions f et g et se note $g \circ f : E \rightarrow G$.

Si l'on a encore une fonction $h : G \rightarrow H$, les composées

$$h \circ (g \circ f) : E \xrightarrow{g \circ f} G \xrightarrow{h} H \quad \text{et} \quad (h \circ g) \circ f : E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{h \circ g} H$$

sont des fonctions de E dans H . Comme on a l'égalité $(h \circ g) \circ f(x) = h \circ (g \circ f)(x)$ pour tout x , les fonctions $(h \circ g) \circ f$ et $h \circ (g \circ f)$ sont égales et l'on omet les parenthèses en écrivant simplement $h \circ g \circ f$ cette composée.

Exemples

- Supposons qu'une quantité w dépende du temps et de la distance à un point O . Choisissons un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'origine O . Cela définit une fonction $w : (x, y, z, t) \mapsto w(x, y, z, t)$, où t est la variable temps et x, y, z les coordonnées spatiales. Comme w ne dépend que de t et de la distance $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ au point O , posons $f(r, t) = w(x, y, z, t)$: la fonction f n'a que deux variables et w est la composée $w = f \circ g$, avec $g(x, y, z, t) = (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, t)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) & \mapsto & (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, t) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (r, t) & \mapsto & f(r, t) \end{array}$$

- Posons $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, où x et y sont des nombres réels strictement positifs : cela définit une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, où $E =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. En divisant numérateur et dénominateur par y^2 , il vient $f(x, y) = \frac{x/y}{(x/y)^2 + 1} = \frac{t}{t^2 + 1}$, où $t = x/y$. Ainsi les valeurs $f(x, y)$ ne dépendent que du rapport x/y . Si l'on définit la fonction $u :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ en posant $u(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$, alors on a $f(x, y) = u(x/y)$, autrement dit f est la composée $f = u \circ g$, où $g : E \rightarrow]0, +\infty[$ est définie par $g(x, y) = x/y$. Quand les valeurs $\varphi(x, y)$ d'une fonction ne dépendent que du rapport x/y (comme c'est le cas pour f), on dit que la fonction φ est *homogène*.
- Définissons des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 1$: on a $g(f(x)) = x^2 + 1$ et $f(g(x)) = (x + 1)^2$, donc $f \circ g \neq g \circ f$. Dans le cas où les composées $f \circ g$ et $g \circ f$ sont toutes les deux définies, on voit qu'en général, l'ordre de composition compte.

Rappelons les définitions relatives aux fonctions monotones.

Définitions

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie de l'ensemble $\mathbb{R}$.

- f est *croissante* si, pour tous nombres x et y appartenant à l'ensemble de départ et vérifiant $x \leq y$, on a $f(x) \leq f(y)$;
- f *strictement croissante* si, pour tous nombres x et y appartenant à l'ensemble de départ et vérifiant $x < y$, on a $f(x) < f(y)$.
- On définit de même une fonction *décroissante* et une fonction *strictement décroissante*.

La composée de deux fonctions croissantes est croissante, de même que la composée de deux fonctions décroissantes. Si l'on compose une fonction croissante et une fonction décroissante, on obtient une fonction décroissante.

3.2 Transformation et itération

Une fonction $f : E \rightarrow E$ s'appelle une *transformation de E* .

Si f est une transformation de E , alors pour tout élément x_0 de E , l'élément $x_1 = f(x_0)$ appartient encore à E et l'on peut définir les éléments $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, etc. On forme ainsi les *itérés* $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ de x_0 par la transformation f : ils sont définis de proche en proche par la relation

$$\text{pour tout entier } n \geq 0, \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

La transformation $x_0 \mapsto x_n$ est réalisée par la fonction composée $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$, que l'on note $f^n : E \rightarrow E$.

Définition

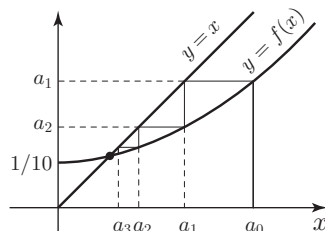
Si $f : E \rightarrow E$ est une transformation, un élément $x \in E$ tel que $f(x) = x$ s'appelle un *point fixe* de f .

Si x est un point fixe de f , tous les itérés de x sont égaux à x .

Exemple 1. Reprenons les nombres a_n définis (exemple page 7) par les relations $a_0 = 2/10$ et $a_{n+1} = a_n^2 + (1/10)$ pour tout entier $n \geq 0$. En posant $f(x) = x^2 + (1/10)$, on obtient une fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ et les nombres a_n sont les itérés par f du nombre $2/10$.

Les points fixes de f sont par définition les nombres positifs solutions de l'équation $x^2 + (1/10) = x$. Puisque les solutions $(1/2)(1 + \sqrt{3/5})$ et $(1/2)(1 - \sqrt{3/5})$ sont des nombres positifs, ce sont les deux points fixes de f . Dans l'exemple, nous avons observé que les itérés de a_0 tendent vers l'un des points fixes de f .

La figure ci-contre montre la courbe d'équation $y = f(x)$



et la droite d'équation $y=x$ sur l'intervalle $[0, 2/10]$. On y a construit une ligne brisée formée de segments alternativement horizontaux et verticaux, de la manière suivante :

- le segment vertical le plus à droite est à l'abscisse $a_0 = 2/10$, donc coupe le graphe de f au point d'ordonnée $f(a_0) = a_1$;
- le segment horizontal qui suit est à l'ordonnée a_1 , valeur qu'on reporte sur l'axe des abscisses en passant par la bissectrice $y = x$: on a visiblement $a_1 < a_0$;
- le segment vertical d'abscisse a_1 coupe le graphe de f au point d'ordonnée $f(a_1) = a_2$; reportons cette valeur a_2 sur l'axe des abscisses comme on l'a fait pour a_1 : on observe que $a_2 < a_1$.

Cette construction permet de visualiser sur l'axe des x l'évolution des itérés de a_0 : la suite des nombres a_n est décroissante et sa limite est l'abscisse ℓ du point d'intersection de la courbe et de la bissectrice $y = x$. On a bien l'égalité $\ell = f(\ell)$ qui traduit que ℓ est un point fixe de f . Le seul point fixe de f inférieur à a_0 est $(1/2)(1 - \sqrt{3/5})$, par conséquent $\ell = (1/2)(1 - \sqrt{3/5})$.

Exemple 2. Soient a et b des nombres réels et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = ax + b$.

Si $a = 1$ et $b = 0$, on a $f(x) = x$ pour tout x , donc tous les nombres réels sont des points fixes de f . Si $a = 1$ et $b \neq 0$, on a $f(x) = x + b$ donc il n'y a aucun point fixe.

Supposons $a \neq 1$. Un nombre x est point fixe de f si et seulement si $ax + b = x$, ce qui équivaut à $(1 - a)x = b$. L'unique point fixe est donc $\omega = b/(1 - a)$.

On a $f(x) - f(\omega) = ax + b - (a\omega + b) = a(x - \omega)$ et puisque $f(\omega) = \omega$, il vient

$$f(x) - \omega = a(x - \omega) \quad \text{pour tout } x.$$

Donnons-nous un nombre réel x_0 et exprimons les itérés $x_1 = ax_0 + b$, $x_2 = ax_1 + b$, ..., $x_n = ax_{n-1} + b$ de x_0 . On a $x_1 - \omega = a(x_0 - \omega)$, $x_2 - \omega = a(x_1 - \omega) = a^2(x_0 - \omega)$ et en général

$$x_n - \omega = a^n(x_0 - \omega) \quad \text{pour tout entier } n \geq 1,$$

formule qui s'écrit encore

$$x_n = a^n x_0 + \omega(1 - a^n) = a^n x_0 + b \frac{1 - a^n}{1 - a}.$$

Exemple 3. Dans des conditions stables, deux espèces A et B de bactéries vivent en symbiose à des concentrations moyennes a et b . On déplace l'équilibre en augmentant de 18% la concentration de A et de 12% celle de B, puis on mesure chaque jour l'écart à la moyenne des concentrations de chaque espèce. Au bout de n jours, l'écart pour la bactérie A, en pourcentage de a , vaut x_n et pour la bactérie B, il vaut y_n . Après modélisation, on est conduit à la loi d'évolution suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1/5)(3x_n - 6y_n) \\ y_{n+1} = (1/5)(2x_n + 3y_n) \end{cases}$$

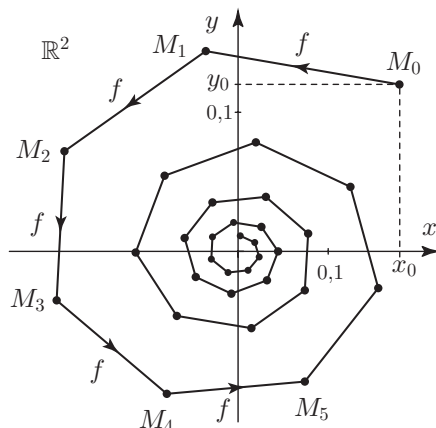
avec $x_0 = 0,18$ et $y_0 = 0,12$ d'après nos conditions initiales.

Les couples (x_n, y_n) sont les itérés de (x_0, y_0) par la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (X, Y), \quad \text{où } X = \frac{1}{5}(3x - 6y) \text{ et } Y = \frac{1}{5}(2x + 3y).$$

On vérifie facilement que le seul point fixe de f est $(0, 0)$: cela veut dire que les concentrations de A et B ne peuvent rester en équilibre que pour les valeurs a et b .

Le graphique ci-contre montre les points $M_0 = (x_0, y_0), M_1 = (x_1, y_1), \dots, M_{30} = (x_{30}, y_{30})$: ils se situent sur une courbe en spirale qui entoure l'origine et s'en rapproche, x_n et y_n pouvant prendre des valeurs positives ou négatives. Observons la distance à l'origine d'un point M_n : elle n'est pas décroissante mais semble cependant tendre vers 0, ce qui indique que M_n tend vers l'origine quand n tend vers l'infini.



Pour mesurer l'éloignement à l'origine d'un point (x, y) , nous allons utiliser une fonction $\delta(x, y) = x^2 + ey^2$, où $e > 0$. Si d est un nombre positif, les points (x, y) tels que $\delta(x, y) = d$, c'est-à-dire la courbe d'équation $x^2 + ey^2 = d$, est une ellipse centrée à l'origine (exemple 1 page 22). Les points (x, y) tels que $\delta(x, y) \leq d$ sont à l'intérieur de l'ellipse et plus d est petit, plus ces points sont proches de l'origine : $\delta(x, y)$ peut donc servir à mesurer l'éloignement à l'origine. Remarquons que si l'on choisit $e = 1$, $\delta(x, y)$ est le carré de la distance à l'origine et les ellipses sont des cercles.

Comparons les nombres $\delta(X, Y)$ et $\delta(x, y)$.

$$\begin{aligned} \delta(X, Y) - \delta(x, y) &= X^2 + eY^2 - x^2 - ey^2 = \frac{1}{25}((3x - 6y)^2 + e(2x + 3y)^2 - 25x^2 - 25ey^2) \\ &= \frac{1}{25}(4(e - 4)x^2 + 12(-3 + e)xy + 4(9 - 4e)y^2). \end{aligned}$$

Choisissons $e = 3$. Il vient

$$\delta(X, Y) - \delta(x, y) = \frac{1}{25}(-4x^2 - 12y^2) = -\frac{4}{25}(x^2 + 3y^2) = -\frac{4}{25}\delta(x, y),$$

d'où $\delta(X, Y) = \frac{21}{25}\delta(x, y) = 0,84\delta(x, y)$ et finalement

$$\delta(x_{n+1}, y_{n+1}) = (0,84)\delta(x_n, y_n) \quad \text{pour tout } n.$$

La suite des nombres $\delta(x_n, y_n)$ est géométrique, de premier terme $\delta(x_0, y_0) = \delta(0,18, 0,12) = 0,0756$ et de raison 0,84, de sorte que

$$\delta(x_n, y_n) = (0,84)^n \delta(x_0, y_0) \quad \text{pour tout } n.$$

Puisque le nombre 0,84 est strictement inférieur à 1, les puissances $(0,84)^n$ tendent vers 0 et $\delta(x_n, y_n)$ aussi. Remarquons que l'on a $|x| \leq \sqrt{x^2 + 3y^2}$ et $|y| \leq \sqrt{x^2 + 3y^2}$, donc $|x_n| \leq \sqrt{\delta(x_n, y_n)}$ et $|y_n| \leq \sqrt{\delta(x_n, y_n)}$. Il s'ensuit que les nombres x_n et y_n tendent vers 0.