

Álgebra Conmutativa y Geometría Algebraica Local

Álgebra Conmutativa y Geometría Algebraica Local

Daniel Hernández Ruipérez
Ana Cristina López Martín
Fernando Pablos Romo

Prólogo de UGO BRUZZO



AULAMAGNA
PROYECTO CLAVE

Álgebra Conmutativa y Geometría Algebraica Local

Primera edición: 2023

ISBN: 9788419786302

ISBN eBook: 9788419786722

Depósito legal: SE 1574-2023

© de los textos:

Daniel Hernández Ruipérez

Ana Cristina López Martín

Fernando Pablos Romo

Departamento de Matemáticas, Universidad de Salamanca

Prólogo de Ugo Bruzzo

SISSA (International School for Advanced Studies), Trieste (Italia) Departamento
de Matemática, Universidad Federal da Paraíba, João Pessoa (PB, Brasil)

© de esta edición:

Editorial Aula Magna, 2023. McGraw-Hill Interamericana de España S.L.

editorialaulamagna.com

info@editorialaulamagna.com

Impreso en España – Printed in Spain

Para la publicación de este libro los autores han recibido ayuda del Departamento de Matemáticas y del Programa de Difusión de Resultados de Investigación - Modalidad C del Vicerrectorado de Investigación y Transferencia de la Universidad de Salamanca.

Quedan prohibidos, dentro de los límites establecidos en la ley y bajo los apercibimientos legalmente previstos, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, ya sea electrónico o mecánico, el tratamiento informático, el alquiler o cualquier otra forma de cesión de la obra sin la autorización previa y por escrito de los titulares del copyright. Diríjase a info@editorialaulamagna.com si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

*En memoria de nuestro maestro Juan Sancho
Guimerá, que dejó una huella imborrable en nuestra
forma de concebir las matemáticas*

ÍNDICE

Prólogo	13
Prefacio	15
1. Espectro de un anillo	19
1.1. Espectro de un anillo. Topología de Zariski	19
1.2. Aplicaciones inducidas entre espectros por un morfismo de anillos	23
1.3. Variedades algebraicas afines	27
1.4. Introducción a la dimensión de un anillo. Dimensión de las variedades algebraicas afines	28
1.5. Ejercicios	31
2. Localización	39
2.1. Anillos de fracciones	39
2.2. Localización de módulos	42
2.3. El espectro de la localización de un anillo. Abiertos afines del espectro	47
2.4. Localización de un anillo en un punto del espectro. Cuerpo residual y puntos infinitesimalmente próximos	49
2.5. Localización de un morfismo de anillos. Efecto en el espectro	51
2.6. Propiedades locales de los módulos	54
2.7. Ejercicios	57
3. Geometría de los módulos sobre el espectro	63
3.1. Localización en los abiertos del espectro. Morfismos de restricción	63
3.2. Condiciones locales de finitud	67
3.3. Propiedades geométricas de los espectros de los anillos íntegros. Rango y torsión de un módulo sobre un anillo íntegro.	68
3.4. Determinación de un módulo a partir de sus localizaciones en los abiertos de un recubrimiento	70
3.5. Complementos	72
3.6. Ejercicios	75
4. Complementos de teoría de módulos.	81
4.1. Módulos de presentación finita	81
4.2. Módulos proyectivos	82
4.3. Módulos inyectivos	85
4.4. Carácter local de la platitudez	88
4.5. Ejercicios	89
5. Condiciones de finitud. Anillos noetherianos y artinianos	93
5.1. Teoría de la longitud	93
5.2. Módulos y anillos noetherianos y artinianos	95
5.3. Anillos noetherianos. Propiedades de cociente y localización	99
5.4. Noetherianidad de los anillos de polinomios	103
5.5. Anillos artinianos	104

5.6. Ejercicios	107
6. Diferenciales y derivaciones	115
6.1. Derivaciones	115
6.2. Propiedades functoriales de las derivaciones	117
6.3. Diferenciales relativas de un morfismo de anillos	119
6.4. Propiedades functoriales de las diferenciales	121
6.5. Ejercicios	127
7. Descomposición primaria	131
7.1. Ideales primarios	131
7.2. Descomposición primaria	133
7.3. Descomposición primaria en anillos noetherianos	138
7.4. Cálculo de la descomposición primaria	139
7.5. Ejercicios	145
8. Filtraciones y completaciones	153
8.1. Propiedades de los sistemas proyectivos	153
8.2. Topologías definidas por filtraciones y sus completaciones	154
8.3. Topologías y completaciones definidas por un ideal	158
8.4. Topologías definidas por un ideal sobre anillos noetherianos	159
8.5. Exactitud de la completación	160
8.6. Graduados asociados a los completados de las topologías definidas por un ideal	161
8.7. Cono tangente en un punto a una variedad algebraica	164
8.8. Ejercicios	167
9. Teoría de la dimensión	181
9.1. Ecuaciones en diferencias finitas	181
9.2. Función de Hilbert	181
9.3. Funciones de Samuel en un anillo local noetheriano	183
9.4. Dimensión de un anillo	187
9.5. Teoría de la dimensión para anillos locales noetherianos	190
9.6. Otras propiedades de la dimensión	192
9.7. Ejercicios	199
10. Anillos regulares y puntos no singulares	203
10.1. Variedades algebraicas y espacios tangentes	203
10.2. Anillos locales regulares	203
10.3. Curvas afines no singulares	205
10.4. Anillos locales regulares completos. Teorema de Cohen	206
10.5. Caracterización diferencial de la regularidad	209
10.6. Ejercicios	215
11. Morfismos finitos y enteros	221
11.1. Dependencia entera	221
11.2. Morfismos inducidos entre espectros por los morfismos enteros. Teorema del Ascenso	223
11.3. Cierre entero. Anillos íntegramente cerrados	224
11.4. Métrica de la traza. Finitud del cierre entero	226

11.5.	Dependencia entera sobre un ideal. Teorema del Descenso	228
11.6.	Los teoremas de Normalización de Noether y de los ceros de Hilbert	230
11.7.	Ejercicios	233
12.	Valoraciones. Anillos de valoración	237
12.1.	Valoraciones sobre un cuerpo. Anillos de valoración	237
12.2.	Anillos de valoración discreta. Valoraciones en curvas afines.	240
12.3.	Valoraciones y cierre entero	242
12.4.	Anillos de Dedekind	244
12.5.	Desingularización de una curva afín por el cierre entero	247
12.6.	Multiplicidad de intersección de una curva y una hipersuperficie	251
12.7.	Ejercicios	257
13.	Estudio local de los puntos singulares de las curvas algebraicas. Desingularización	269
13.1.	Ramas analíticas	269
13.2.	Explosión de un anillo	273
13.3.	Explosión en curvas	279
13.4.	Aplicación al cálculo de la multiplicidad de intersección con una hipersuperficie	285
13.5.	Puntos cuspidales de una curva plana. Contacto maximal	290
13.6.	Ejercicios	295
14.	Revestimientos de variedades afines	307
14.1.	Revestimientos de variedades afines	307
14.2.	Métrica de la traza	313
14.3.	Diferente y discriminante. Teorema de pureza	316
14.4.	Revestimientos no ramificados. Fórmula de los puntos	321
14.5.	Grupo de Galois, invariantes y cocientes	322
14.6.	Teoría de Galois. El functor de puntos	326
14.7.	Teoría de Galois. El functor de invariantes	328
14.8.	Ejercicios	333
	Apéndice A. Módulos	339
A.1.	Módulos, submódulos y morfismos de módulos	339
A.2.	Módulo cociente	341
A.3.	Producto y suma directa de módulos	342
A.4.	Sistemas de generadores de un módulo. Lema de Nakayama	343
A.5.	Sucesiones exactas de módulos	345
A.6.	Producto tensorial de módulos	348
A.7.	Exactitud del producto tensorial. Módulos planos y fielmente planos	351
A.8.	Ejercicios	355

PRÓLOGO

Cualquier actividad matemática requiere el uso del Álgebra; muchas áreas del Álgebra tienen su origen en la necesidad que tuvieron ciertas ramas de las matemáticas de desarrollar un lenguaje específicamente adaptado a sus necesidades. Según este paradigma, el Álgebra Conmutativa se originó en la Geometría. A menudo se cita a Hilbert como iniciador del Álgebra Conmutativa, aunque los gérmenes de las nociones fundamentales de esta disciplina ya pueden verse en los trabajos de algunos matemáticos que le precedieron, como Kronecker. Después Emmy Noether la desarrolló extraordinariamente y en su obra queda claro que la Geometría Algebraica fue su inspiración y guía.

El libro de los amigos Cristina, Daniel y Fernando sigue en esta línea, y desde el principio, la versión geométrica de la noción de anillo, es decir, el espectro, juega un papel fundamental. La Geometría Algebraica no representa solo la aplicación futura del Álgebra Conmutativa, no es solo una motivación, es también lenguaje y método. Este planteamiento fructifica en la segunda parte del libro, dedicada principalmente a las aplicaciones geométricas.

Estoy seguro de que este texto será de gran ayuda para las futuras generaciones de estudiantes, pero también para los amantes de la Geometría Algebraica, que podrán utilizarlo como texto de referencia.

Ugo Bruzzo,
SISSA (International School for Advanced Studies), Trieste (Italia)
Departamento de Matemática, Universidad Federal da Paraíba,
João Pessoa (PB, Brasil)

PREFACIO

Al presentar un nuevo libro de Álgebra Conmutativa, conviene comenzar explicando su orientación, objetivos y peculiaridades. En cuanto a su contenido, el libro cubre de forma sistemática muchas nociones y construcciones básicas en Álgebra Conmutativa y Geometría Algebraica Local.

Se hace hincapié en el enfoque geométrico del Álgebra Conmutativa, que se presenta aquí como la herramienta adecuada para comprender los procesos de naturaleza local en Geometría Algebraica. En la medida de lo posible, las construcciones algebraicas siguen intuiciones geométricas y se entienden como un método para demostrar tales intuiciones. Partiendo de la definición del espectro como el espacio geométrico natural asociado a un anillo, se desarrollan muchos temas del Álgebra Conmutativa (localización, derivadas y diferenciales, completaciones, conos tangentes, polinomios de Samuel, etc.) desde el punto de vista del espectro.

El *leit-motiv* del libro es que el Álgebra Conmutativa se entiende mejor desde el punto de vista de la Geometría Algebraica y que ese enfoque es también útil para quienes estén interesados únicamente en el álgebra. Además, el libro pretende completar el conocimiento básico del Álgebra Conmutativa con una serie de temas más avanzados y servir de introducción a los métodos y técnicas de la Geometría Algebraica.

La segunda parte del libro trata de cuestiones geométricas genuinas, como singularidades de variedades algebraicas (afines), multiplicidades o revestimientos. Las singularidades de curvas algebraicas (afines) se resuelven en términos de cierre entero y valoraciones, así como con la ayuda del procedimiento de explosión (*blowing-up*), convenientemente adaptado para ocultar su naturaleza no afín. Como aplicación, se resuelven muchos problemas geométricos, tales como el cálculo explícito de multiplicidades de intersección de curvas planas, o el contacto máximo en un punto cuspidal de una curva plana.

También se proporcionan nuevas demostraciones de resultados básicos de álgebra y geometría utilizando los métodos del Álgebra Conmutativa y la Geometría Algebraica Local.

Se hace especial hincapié en los cálculos. Por ejemplo, se presenta un método (casi algorítmico) para calcular la descomposición primaria de un ideal de un álgebra finitamente generada, lo que equivale a determinar explícitamente tanto, las componentes irreducibles como las sumergidas. Es el mejor método para familiarizarse con la complicada estructura local de una variedad algebraica y para entender cómo la topología no es suficiente para saber quién es una variedad, y no solo para el fenómeno trivial de contar algo más de una vez.

Con el mismo espíritu, calculamos explícitamente la explosión de un plano en un punto con respecto a un parámetro local –ocultando así su naturaleza proyectiva– y la de las curvas que pasan por ese punto, y mostramos cómo

las tangentes se separan y las explosiones sucesivas de dos curvas permiten calcular su multiplicidad de intersección. Con el mismo espíritu, también se ofrecen métodos sistemáticos para calcular explícitamente la desingularización de una curva plana junto con el árbol de explosión, o el contacto máximo en un punto cuspidal. Se proporcionan muchos ejemplos concretos de cálculo de multiplicidades de intersección, desingularización y contacto máximo.

Para ayudar al estudiante con la comprensión de cada tema, cada capítulo viene con una serie de ejercicios, todos con soluciones completas, además de los muchos ejemplos incluidos en el texto.

El libro fue evolucionando a partir de notas de clase para diversas asignaturas de la antigua licenciatura y del actual grado en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Salamanca. Puede ser considerado como un libro complementario en el grado, pero, corresponde en la actualidad de manera más ajustada a un texto de posgrado o máster. También puede ser útil para un investigador que quiera introducirse en el campo o necesite una visión detallada del estado del arte en la materia.

Finaliza este prefacio con un comentario sobre la bibliografía relacionada con el contenido del libro. Entre los libros sobre Álgebra Conmutativa podemos citar los siguientes excelentes:

- (1) M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. Introducción al Álgebra Conmutativa, *Editorial Reverté* 1971 (traducido por Griselda Pascual). Original: Introduction to Commutative Algebra, *Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont.* 1969
- (2) H. Matsumura, Commutative Algebra, *W. A. Benjamin, Inc., New York* 1970.
- (3) —, Commutative Ring Theory (Translated by Miles Reid), Cambridge Studies in Advanced Mathematics, *Cambridge University Press, Cambridge* 1989.
- (4) D. Eisenbud. Commutative Algebra with a view to Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics, 150. *Springer-Verlag, New York* 1995.
- (5) M. Reid. Undergraduate Commutative Algebra, London Mathematical Society Student Texts, 29, *Cambridge University Press, Cambridge* 1995.
- (6) R. Y. Sharp. Steps in Commutative Algebra, London Mathematical Society Student Texts, 51, *Cambridge University Press, Cambridge* 2001.
- (7) A. Altman and S. Kleiman. A term of Commutative Algebra, *Worldwide Center of Mathematics*, ISBN 978-0-9885572-1-5, URI <https://hdl.handle.net/1721.1/116075.2>.

El manual de Atiyah y MacDonald es una referencia clásica todavía inigualable en muchos aspectos; cubre aproximadamente la mitad del material incluido en este libro siempre desde un punto de vista únicamente algebraico. Reconocemos dicho texto como una fuente de inspiración y seguimos recomendándolo a los estudiantes. Además, existe una versión española, muy bien traducida.

Los dos libros de Matsumura van mucho más allá de nuestros objetivos y tienen muy poco en común con este libro. Son, por supuesto, de naturaleza puramente algebraica.

El libro de Miles Reid, escrito en su inimitable estilo vivaz, es sin duda extraordinario. Su objetivo, alcance y estilo son bastante diferentes de los nuestros. Se adopta aquí un estilo más formal, partiendo de una base de conocimientos más amplia y contemplando temas que no cubre el libro de M. Reid.

El libro de Eisenbud es completo y bastante extenso. Es más una referencia que un libro de texto. Sin embargo, aquí se consideran temas no incluidos allí (como la explosión para curvas y sus aplicaciones) y se profundiza más y de manera más rápida en algunos temas comunes.

El libro de Sharp solo cubre una parte de los temas contenidos en nuestro libro.

En cuanto al libro de Altman y Kleiman, aspira a ser una versión actualizada del libro de Atiyah y MacDonald, e incluye numerosos ejercicios resueltos, entre ellos, todos los propuestos en el manual de Atiyah y MacDonald. Es un excelente texto.

1. ESPECTRO DE UN ANILLO

1.1. Espectro de un anillo. Topología de Zariski

Del mismo modo que la teoría de anillos conmutativos proporciona herramientas algebraicas para el estudio de la Geometría, al permitirnos estudiar los espacios geométricos a través de las propiedades de sus anillos de funciones u observables, todo anillo conmutativo tiene asociado un espacio topológico, su espectro, en el que de algún modo opera y muchas propiedades de los anillos pueden ser mejor comprendidas desde un punto de vista geométrico mediante estos espacios. De este modo, tiene lugar una fructífera interrelación entre el Álgebra y la Geometría que es una de las bases de la Geometría Algebraica.

Comenzamos por definir el espectro de un anillo. De ahora en adelante, y salvo mención expresa de lo contrario, todos los anillos son conmutativos y con unidad.

Sea A un anillo y denotemos por X el conjunto cuyos elementos son los ideales primos de A .

Para cada subconjunto $C \subseteq A$, se denota por $V(C)$ el subconjunto de X formado por los ideales primos que contienen a C ,

$$V(C) = \{\mathfrak{p} \in X \mid C \subseteq \mathfrak{p}\},$$

al que nos referiremos como al conjunto de los ceros de C . Cuando C se reduce a un elemento $f \in A$ se empleará también la notación $(f)_0$ como alternativa de $V(f)$.

Por otra parte, toda parte $Y \subseteq X$ determina un ideal $I(Y)$ de A , el ideal de las funciones de A que se anulan sobre Y , es decir,

$$I(Y) = \{f \in A \mid Y \subseteq (f)_0\}.$$

Proposición 1.1. *Se verifica*

- (1) Si I es el ideal generado por los elementos de C , $V(C) = V(I) = V(\mathfrak{r}(I))$, siendo $\mathfrak{r}(I)$ el radical de I .
- (2) $X = V(0)$ y $\emptyset = V(A)$.
- (3) Si $C' \subseteq C$, entonces $V(C') \supseteq V(C)$. Además, si I, J son ideales de A , la condición necesaria y suficiente para que $V(I) \subseteq V(J)$ es que $\mathfrak{r}(J) \subseteq \mathfrak{r}(I)$.
- (4) Si I es un ideal de A , $I(V(I)) = \mathfrak{r}(I)$.
- (5) Si $\{C_j\}$ es una familia cualquiera de subconjuntos de A , $\bigcap_j V(C_j) = V\left(\bigcup_j C_j\right)$. En consecuencia, para todo subconjunto C de A , es $V(C) = \bigcap_{f \in C} (f)_0$.
- (6) Si I, J son ideales de A , $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J) = V(I \cdot J)$.

Demostración. (1) y (3) se deducen de que el radical de un ideal es la intersección de los ideales primos que le contienen y (4) es consecuencia de (3).

De las restantes afirmaciones, solo (6) tiene alguna dificultad. Observemos en primer lugar que como I y J contienen a $I \cap J$ y este a $I \cdot J$, resulta

$$V(I) \cup V(J) \subseteq V(I \cap J) \subseteq V(I \cdot J).$$

Por otra parte si $\mathfrak{p} \in V(I \cdot J)$ fuera un ideal primo que no perteneciera ni a $V(I)$ ni a $V(J)$, existirían elementos $a \in I$, $b \in J$ que no pertenecerían a $\mathfrak{p}$. Pero entonces $ab \in I \cdot J \subseteq \mathfrak{p}$, lo que contradeciría que $\mathfrak{p}$ es primo. $\square$

En consecuencia, puede definirse una topología en X de A tomando como cerrados los subconjuntos de la forma $V(C)$ para algún subconjunto $C \subseteq A$.

Definición 1.2. La topología que acaba de construirse se llama *topología de Zariski*. Se denomina *espectro del anillo* A y se denota por $\text{Spec } A$ al espacio topológico obtenido dotando al conjunto X de los ideales primos de A de la topología de Zariski.

Una consecuencia de (1) de la proposición anterior es que todo cerrado de $\text{Spec } A$ es de la forma $V(I)$ para algún ideal I . Por otra parte, en virtud de (3) todo cerrado es intersección de cerrados de la forma $(f)_0 = V(f)$, es decir,

Corolario 1.3. *Los ceros $(f)_0$ de los elementos $f \in A$ constituyen una base de cerrados para la topología de Zariski en $\text{Spec } A$. Alternativamente, los abiertos*

$$X_f = \text{Spec } A - (f)_0 = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

forman una base de abiertos para dicha topología.

Por abuso de lenguaje diremos en lo sucesivo que los conjuntos X_f son los abiertos básicos y los conjuntos $(f)_0$ los cerrados básicos de $\text{Spec } A$.

Algunas de las propiedades más sencillas de los elementos de un anillo, pueden caracterizarse en términos de sus ceros. Así los elementos nilpotentes son los que pertenecen a todos los ideales primos, por tanto, aquellos cuyos ceros son todo el espectro,

$$X_f = \emptyset \iff (f)_0 = \text{Spec } A \iff f \text{ es nilpotente.}$$

Las unidades o invertibles del anillo son los elementos no contenidos en ningún ideal primo, luego

$$X_f = \text{Spec } A \iff (f)_0 = \emptyset \iff f \text{ es invertible.}$$

Una consecuencia de estas propiedades es que el corolario anterior puede ser ligeramente reforzado:

Corolario 1.4. *Los ceros $(f)_0$ de los elementos $f \in A$ no nilpotentes, junto con el espacio total X constituyen una base de cerrados para la topología de Zariski en $\text{Spec } A$. Alternativamente, el conjunto vacío y los abiertos básicos X_f de los elementos no nilpotentes forman una base de abiertos para dicha topología.*

El primer teorema sobre la estructura del espectro como espacio topológico es

Proposición 1.5. *El espectro $X = \text{Spec } A$ de un anillo A es compacto, es decir, todo recubrimiento de X admite un subrecubrimiento finito.*

Demostración. Para demostrar la compacidad de X basta considerar recubrimientos formados por abiertos básicos. Sea, pues, $X = \bigcup_{f_i} X_{f_i}$ un recubrimiento de X por abiertos básicos. Entonces $\emptyset = \bigcap_{f_i} (f_i)_0 = V(I)$ siendo I el ideal generado por los elementos f_i , en virtud de (1) y (5) de la Proposición 1.1. Por tanto, $I = A$, luego 1 es combinación lineal de un número finito de los elementos f_i , $1 = b_{i_1} f_{i_1} + \cdots + b_{i_m} f_{i_m}$. Así pues, $(1) = (f_{i_1}, \dots, f_{i_m})$, luego $\emptyset = V(A) = V(f_{i_1}) \cap \cdots \cap V(f_{i_m})$, es decir, $X = X_{f_{i_1}} \cup \cdots \cup X_{f_{i_m}}$ por (1) de dicho teorema. $\square$

El espectro $X = \text{Spec } A$ puede ser dotado de una relación de orden parcial declarando un punto como menor que otro cuando como ideales de A el primero está contenido en el segundo. Para facilitar la exposición, cuando un punto $x \in X$ lo pensemos como ideal primo de A (no es otra cosa) lo denotaremos por $\mathfrak{p}_x$; la relación de orden parcial en X se describe ahora sencillamente por

$$x \leq y \iff \mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y.$$

Proposición 1.6. (1) *Si $Z \subseteq X$ es cerrado y $x \in Z$, para todo punto $y \geq x$ se tiene $y \in Z$. Es decir, los cerrados de X contienen en cada punto a todos los que le siguen.*
(2) *Para todo punto $x \in X$, es $\overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p}_x)$. En consecuencia, $y \in \overline{\{x\}}$ si y solo si $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$.*
(3) *x es un punto cerrado, o más precisamente $\{x\}$ es cerrado en $X = \text{Spec } A$, si y solo si $\mathfrak{p}_x$ es un ideal maximal.*
(4) *x es un punto denso si y solo si $\mathfrak{p}_x$ coincide con el nilradical $\mathfrak{N}$ de A . En consecuencia X tiene un punto denso si y solo si el nilradical $\mathfrak{N}$ es primo.*

Demostración. (1) Si Z es un cerrado de $\text{Spec } A$, $Z = V(I)$ para cierto ideal I de A . Si $x \in V(I)$ y $x \leq y$, resulta $I \subseteq \mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$, luego $y \in V(I)$.

(2) $V(\mathfrak{p}_x)$ es un cerrado que contiene a x . Si $Z = V(I)$ es otro cerrado que contiene a x , es $I \subseteq \mathfrak{p}_x$, luego $V(\mathfrak{p}_x) \subseteq V(I)$ y, por tanto, $V(\mathfrak{p}_x) = \overline{\{x\}}$.

(3) Es consecuencia de (2).

(4) Por (2), x es un punto denso si y solo si $X = V(\mathfrak{p}_x)$, es decir, precisamente cuando $\mathfrak{p}_x$ está contenido en todos los ideales primos. Como él mismo es primo, debe coincidir con $\mathfrak{N}$. $\square$

La propiedad (2) tiene como consecuencia que $\text{Spec } A$ es un espacio T_0 , es decir, es un espacio en el que puntos diferentes tienen cierres diferentes.

Los espacios topológicos en los que dos abiertos cualesquiera (no vacíos) se cortan, se denominan *irreducibles*. Si un espacio tiene un punto denso, es

irreducible, luego la propiedad (4) dice que si nilradical $\mathfrak{N}$ de A es un ideal primo, X es un espacio irreducible. El recíproco también es cierto:

Proposición 1.7. *$X = \text{Spec } A$ es irreducible si y solo si el nilradical $\mathfrak{N}$ de A es un ideal primo. En particular, si A es un anillo íntegro, el ideal 0 es primo, $\text{Spec } A$ es irreducible y el punto $x_0 \in \text{Spec } A$ que define es un punto denso, denominado el punto genérico.*

Demostración. Basta ver que si X es irreducible, $\mathfrak{N}$ es un ideal primo. Sean a, b elementos de A tales que $ab \in \mathfrak{N}$. Entonces ab pertenece a todos los ideales primos, luego $X_{ab} = \emptyset$. Como $X_{ab} = X_a \cap X_b$ por (5) de la Proposición 1.1, y X es irreducible, uno de los dos abiertos X_a, X_b es vacío, es decir, uno de los elementos a, b pertenece a $\mathfrak{N}$. $\square$

Definición 1.8. Se llama *espectro maximal* de A al subespacio $\text{Spec}_{\max} A \subseteq \text{Spec } A$ del espectro de A formado por los puntos cerrados, es decir, por los que corresponden a ideales maximales.

$\text{Spec}_{\max} A$ tiene una topología, que es la que hereda de la topología de Zariski de $\text{Spec } A$.

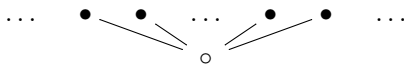
Cuando A es un álgebra sobre un cuerpo k , para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A , se tiene una extensión de cuerpos $k \hookrightarrow A/\mathfrak{m}$.

Definición 1.9. Sea A una k -álgebra. Se dice que un punto $x \in \text{Spec}_{\max} A$ es *racional* (sobre k), si $k \simeq A/\mathfrak{m}_x$, siendo $\mathfrak{m}_x$ el ideal maximal correspondiente a x . Se llama *espectro racional* de A al subespacio $\text{Spec}_{\text{rac}} A$ del espectro maximal de A formado por los puntos racionales.

Ejemplo 1.10. Si k es un cuerpo, $\text{Spec } k$ se reduce a un punto.

Ejemplo 1.11. Si A es un dominio de ideales principales, todo ideal primo no nulo es maximal, luego $X = \text{Spec } A$ tiene un punto genérico x_0 correspondiente al ideal 0 y el resto de los puntos son cerrados pues corresponden a ideales maximales. La topología de X se describe muy sencillamente: los cerrados de X no triviales (es decir, los que no son ni el total ni el vacío), son los subconjuntos finitos que no contienen al punto genérico. En efecto, como los puntos diferentes del genérico son cerrados, cualquier conjunto finito de ellos también es cerrado. Veamos que todo cerrado $V((f)) = (f)_0$ ($f \neq 0$ y no es una unidad) es de esta forma. Como en los dominios de ideales principales existe descomposición euclídea, el ideal (f) admite una descomposición $(f) = (p_1)^{\alpha_1} \cdots (p_m)^{\alpha_m}$ siendo (p_i) ideales primos, y esta descomposición es única salvo el orden. En consecuencia, los únicos ideales primos que contienen a (f) son $(p_1), \dots, (p_m)$. Por tanto, $(f)_0 = \{(p_1), \dots, (p_m)\}$ es un conjunto finito de puntos cerrados. Los ideales maximales se corresponden así con los elementos irreducibles de A , módulo unidades del anillo, en el sentido de que $(a) = (b)$ si y solo si $b = ua$ siendo $u \in A$ invertible.

La figura



representa el espectro de un dominio de ideales principales con los puntos cerrados encima y el punto genérico debajo; las líneas indican la relación de orden.

Ejemplo 1.12. Como un caso particular del ejemplo anterior, el espectro del anillo de los números enteros, $\text{Spec } \mathbb{Z}$ tiene un punto genérico, el ideal (0) , y tantos ideales maximales (p) como números enteros primos positivos (puesto que p y $-p$ generan el mismo ideal).

Ejemplo 1.13. Otro caso particular es $\text{Spec } k[x]$ siendo k un cuerpo. De nuevo se tiene un punto genérico, el ideal (0) y tantos ideales maximales $(p(x))$ como polinomios irreducibles de primer coeficiente 1 (puesto que las unidades de $k[x]$ son las de k). El espectro de $k[x]$ se conoce como la *recta afín* $\mathbb{A}^1(k)$ sobre k . Se tiene una aplicación inyectiva

$$\begin{aligned} k &\rightarrow \text{Spec}_{\max} k[x] \\ \lambda &\mapsto (x - \lambda) \end{aligned}$$

cuya imagen es el espectro racional $\text{Spec}_{\text{rac}} k[x]$ y que es biunívoca si y solo si k es un cuerpo algebraicamente cerrado.

Ejemplo 1.14. Se denomina *espacio afín* de n dimensiones sobre un anillo A al espectro $\mathbb{A}_A^n = \text{Spec } A[x_1, \dots, x_n]$ del anillo de polinomios en n indeterminadas sobre A . Cuando $A = k$ es un cuerpo, se tiene una aplicación inyectiva

$$\begin{aligned} k^n &\rightarrow \text{Spec}_{\max} k[x_1, \dots, x_n] \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\mapsto (x_1 - \lambda_1, \dots, x_n - \lambda_n) \end{aligned}$$

cuya imagen es el espectro racional de $k[x_1, \dots, x_n]$, como en el ejemplo anterior. Veremos más adelante (Corolario 11.36) que cuando k es algebraicamente cerrado esta aplicación es biunívoca, lo que es una forma débil del celebrado Nullstellensatz (teorema de los ceros) de Hilbert. De este modo el espectro maximal de $k[x_1, \dots, x_n]$ se identifica con el «espacio afín» de la geometría elemental.

1.2. Aplicaciones inducidas entre espectros por un morfismo de anillos

Vamos a estudiar los morfismos entre espectros de diferentes anillos.

Recordemos que si $\phi: A \rightarrow B$ es un morfismo de anillos, para todo ideal J de B , $\phi^{-1}(J)$ es un ideal de A que es primo si lo es J . De este modo se

define una aplicación

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec} B &\xrightarrow{\phi^*} \mathrm{Spec} A \\ \mathfrak{q} &\mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{q})\end{aligned}$$

Sin embargo, si I es un ideal de A , $\phi(I)$ puede no ser un ideal de B , aunque genera un ideal $\phi(I)B$, que es el mínimo que le contiene. Las propiedades básicas de la aplicación ϕ^* inducida entre los espectros se resumen en la siguiente:

Proposición 1.15.

- (1) Para todo ideal I de A , se tiene $(\phi^*)^{-1}(V(I)) = V(\phi(I)B)$, es decir, ϕ^* es una aplicación continua.
- (2) Para todo ideal J de B , $\overline{\phi^*(V(J))} = V(\phi^{-1}(J))$.
- (3) Si $\psi: B \rightarrow C$ es otro morfismo de anillos, $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$.

Demostración. Sea $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec} B$. Entonces, $\mathfrak{q} \in (\phi^*)^{-1}(V(I))$ si y solo si $I \subseteq \phi^{-1}(\mathfrak{q})$, es decir, si y solo si $\phi(I) \subseteq \mathfrak{q}$. Eso prueba (1).

(2) Si $\mathfrak{p} \in \phi^*(V(J))$ se tiene que $\mathfrak{p} = \phi^{-1}(\mathfrak{q})$ para cierto ideal primo $\mathfrak{q}$ de B que contiene a J , luego $\phi^{-1}(J) \subseteq \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p} \in V(\phi^{-1}(J))$. Así, $\phi^*(V(J)) \subseteq V(\phi^{-1}(J))$, luego $\overline{\phi^*(V(J))} \subseteq \overline{V(\phi^{-1}(J))}$, ya que $V(\phi^{-1}(J))$ es cerrado. Sea $\mathfrak{p} \in V(\phi^{-1}(J))$. Si $\mathfrak{p} \notin \overline{\phi^*(V(J))}$, existirá un cerrado de la base $(f)_0$ que contiene a $\phi^*(V(J))$ y tal que $\mathfrak{p} \notin (f)_0$, es decir, $f \notin \mathfrak{p}$. Como $\phi^*(V(J)) \subseteq (f)_0$, es $f \in \phi^*(\mathfrak{q}) = \phi^{-1}(\mathfrak{q})$ para todo ideal primo $\mathfrak{q} \in V(J)$, es decir, $\phi(f) \in \mathfrak{q}$ para todo ideal primo $\mathfrak{q} \in V(J)$. Por tanto, $\phi(f)$ está en el radical del ideal J , es decir, $\phi(f)^n \in J$ para cierto n . Pero entonces, $f^n \in \phi^{-1}(J) \subseteq \mathfrak{p}$, luego $f \in \mathfrak{p}$, ya que $\mathfrak{p}$ es primo y se llega a una contradicción. En consecuencia, $\mathfrak{p} \in \overline{\phi^*(V(J))}$ y se concluye.

(3) es muy sencillo. □

Particular atención merece el caso de un epimorfismo de anillos. En este caso, para todo ideal I de A , $\phi(I) = \phi(I)B$ es un ideal y es primo cuando lo es I . Además $\phi^{-1}(\phi(I)) = I + \mathrm{Ker} \phi$, con lo que $\phi^{-1}(\phi(I)) = I$ si y solo si I contiene a $\mathrm{Ker} \phi$. Del mismo modo, si J es un ideal de B y H es otro ideal de B que contiene a J , $\phi^{-1}(H)$ es un ideal de A que contiene a $\phi^{-1}(J)$ y si I es un ideal de A que contiene a $\phi^{-1}(J)$, $\phi(I)$ es un ideal de V que contiene a $\phi(\phi^{-1}(J)) = J$. Además, $\phi^{-1}(\phi(I)) = I$ pues $I \supseteq \phi^{-1}(J) \supseteq \mathrm{Ker} \phi$. En consecuencia, se tiene una correspondencia biunívoca:

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{c} \text{Ideales de } B \\ \text{que contienen a } J \end{array} \right\} &\simeq \left\{ \begin{array}{c} \text{Ideales de } A \\ \text{que contienen a } \phi^{-1}(J) \end{array} \right\} \\ H &\mapsto \phi^{-1}(H)\end{aligned}$$

Considerando solo los ideales primos, resulta:

Proposición 1.16. *Si $\phi: A \rightarrow B$ es un epimorfismo de anillos, la aplicación $\phi^*: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ es una inmersión cerrada que establece un homeomorfismo*

$$\text{Spec } B \xrightarrow{\sim} V(\text{Ker } \phi).$$

Demostración. Tomando $J = 0$ en el diagrama anterior, resulta que ϕ^* establece una correspondencia biunívoca $\phi^*: \text{Spec } B \xrightarrow{\sim} V(\text{Ker } \phi)$. Además, ϕ^* es continua por la Proposición 1.15, luego para demostrar que es un homeomorfismo con su imagen, basta ver que es cerrada; pero eso sigue de que $\phi^*(V(J)) = V(\phi^{-1}(J))$ para todo ideal J de B por el diagrama anterior. $\square$

Corolario 1.17. *Si I es un ideal de un anillo A , el epimorfismo de paso al cociente $\pi: A \rightarrow A/I$ establece una inmersión cerrada*

$$\pi^*: \text{Spec } A/I \hookrightarrow \text{Spec } A,$$

que es un homeomorfismo con su imagen $V(I)$. En particular, tomando $I = \mathfrak{R}$ como el nilradical de A , se obtiene un homeomorfismo natural

$$\text{Spec } A/\mathfrak{R} \xrightarrow{\sim} \text{Spec } A$$

entre el espectro del anillo reducido $A/\mathfrak{R}$ y el de A .

Corolario 1.18. *Si I es un ideal de un anillo A , el cerrado $V(I)$ es irreducible si y solo si $\mathfrak{r}(I)$ es un ideal primo. En consecuencia, los cerrados irreducibles del espectro son los definidos por los ideales primos, $Y = V(\mathfrak{p})$.*

Demostración. Se sigue del corolario anterior gracias a la Proposición 1.7. $\square$

Ejemplo 1.19. Sea A un dominio de ideales principales. Para todo ideal $I = (f)$ de A , $\text{Spec } A/I$ es un conjunto finito con la topología discreta. En efecto, por el Corolario 1.17, $\text{Spec } A/(f)$ es homeomorfo a $V((f))$. Como vimos en el ejemplo 1.11, si $(f) = (p_1)^{\alpha_1} \cdots (p_m)^{\alpha_m}$ es la descomposición de (f) en producto de ideales primos, $V((f)) = (f)_0 = \{(p_1), \dots, (p_m)\}$, que es un conjunto finito de puntos cerrados. En resumen,

$$\text{Spec } A/(f) \xrightarrow{\sim} V((f)) = \{(p_1), \dots, (p_m)\},$$

siendo $(p_1), \dots, (p_m)$ los divisores primos de (f) .

En particular son conjuntos finitos con la topología discreta los espectros de los siguientes anillos:

- $\mathbb{Z}/(n)$ para todo entero n .
- $k[\xi] = k[x]/(q(x))$ siendo k un cuerpo.

Veremos más adelante otros ejemplos de anillos cuyo espectro es también un conjunto finito con la topología discreta.

Ejemplo 1.20. Sea p un número entero primo y $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ el cuerpo de clases de restos módulo p . Consideremos el anillo $\mathbb{F}_p[i] = \mathbb{F}_p[x]/(x^2 + 1)$, y vamos a calcular su espectro. Por el ejemplo 1.19, $\text{Spec } \mathbb{F}_p[i]$ se identifica con el conjunto de los divisores primos de $x^2 + 1$. Si existe $a \in \mathbb{F}_p$ tal que $a^2 + 1 = 0$, se tiene una descomposición $x^2 + 1 = (x - a)(x + a)$. En caso contrario, $x^2 + 1$ es primo. Es decir,

$$\text{Spec } \mathbb{F}_p[i] \simeq \begin{cases} 2 \text{ puntos,} & \text{si existe } a \in \mathbb{F}_p \text{ tal que } a^2 = -1 \\ 1 \text{ punto,} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

o, lo que es lo mismo:

El espectro de $\mathbb{F}_p[i]$ consta de dos puntos si -1 es un cuadrado módulo p y de uno en caso contrario.

Proposición 1.21. *Sea $\phi: A \rightarrow B$ un morfismo de anillos, I un ideal de A y $\bar{\phi}: A/I \rightarrow B/\phi(I)B \simeq B \otimes_A A/I$ el morfismo inducido. Si se identifican $\text{Spec } A/I \simeq V(I)$ y $\text{Spec } B/\phi(I)B \simeq V(\phi(I)B)$ mediante el Corolario 1.17, la aplicación $\bar{\phi}^*: \text{Spec } B/\phi(I)B \rightarrow \text{Spec } A/I$ coincide con la restricción de ϕ^* a $V(\phi(I)B) = (\phi^*)^{-1}(V(I))$ (Proposición 1.15). Es decir, se tiene un diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} & \text{Spec } B & \xrightarrow{\phi^*} \text{Spec } A \\ & \uparrow & \uparrow \\ \text{Spec } B/\phi(I)B \simeq V(\phi(I)B) & \xrightarrow{(\phi^*)^{-1}} V(I) & \xrightarrow{\phi^* = \bar{\phi}^*} V(I) \simeq \text{Spec } A/I \end{array}$$

Demostración. Se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ A/I & \xrightarrow{\bar{\phi}} & B/\phi(I)B \end{array}$$

que induce en espectros un diagrama conmutativo de aplicaciones continuas

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } B & \xrightarrow{\phi^*} & \text{Spec } A \\ \uparrow \pi^* & & \uparrow \pi^* \\ \text{Spec } B/\phi(I)B & \xrightarrow{\bar{\phi}^*} & \text{Spec } A/I \end{array}$$

Para concluir basta observar que por el Corolario 1.17, las flechas verticales son los homeomorfismos mediante los que se identifican $\text{Spec } A/I$ con $V(I)$ y $\text{Spec } B/\phi(I)B$ con $V(\phi(I)B)$. $\square$

El análogo a la Proposición 1.16 para morfismos inyectivos sería que en ese caso el morfismo inducido entre los espectros fuera epiyectivo. En general eso es falso, pero se tiene:

Proposición 1.22. *Si $\phi: A \hookrightarrow B$ es un morfismo inyectivo de anillos, la imagen de $\phi^*: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ es densa en el espectro de A .*

Demostración. Por (2) de la Proposición 1.15, $\overline{\phi^*(V(0))} = V(\phi^{-1}(0))$. Como ϕ es inyectivo, $\phi^*(V(0)) = V((0)) = \text{Spec } A$. $\square$

1.3. Variedades algebraicas afines

Los espectros de los anillos son los objetos básicos de la Geometría Algebraica. Desde su formulación moderna debida sobre todo a Grothendieck, esta disciplina se ocupa fundamentalmente del estudio de los *esquemas*. En este libro no vamos a definir la noción de esquema, pero sí podemos decir, que los esquemas son «espacios geométricos» que se construyen «pegando» espectros de anillos, del mismo modo que las variedades diferenciables se obtienen «pegando» adecuadamente espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$. Dentro de esta terminología, se define

Definición 1.23. Un *esquema afín* es el espectro $X = \text{Spec } A$ de un anillo A .

Puesto que anillos diferentes pueden tener el mismo espectro (ver por ejemplo el Corolario 1.17), al referirnos a un esquema afín como al espectro $X = \text{Spec } A$ de un anillo A , hablamos en realidad de la pareja $(A, X = \text{Spec } A)$ y no simplemente de X como espacio topológico.

No emplearemos la denominación esquema afín, prefiriendo casi siempre hablar de un anillo y su espectro.

Los espectros de anillos cualesquiera son objetos demasiado generales, para capturar la idea clásica de variedad algebraica afín como el lugar de ceros de una familia de polinomios, necesitamos restringir los anillos empleados:

Definición 1.24. Una *variedad algebraica afín* sobre un anillo A es el espectro $X = \text{Spec } A[\xi_1, \dots, \xi_n]$ de una A -álgebra de tipo finito.

En la mayor parte de los casos el anillo A será un cuerpo k , que en muchas aplicaciones tomaremos *algebraicamente cerrado*, como por ejemplo, el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

La terminología no es del todo general, en muchos libros se reserva la palabra «variedad» para el caso *irreducible*, es decir, para los espectros de los anillos de nilradical primo, por ejemplo íntegros (Proposición 1.7), pero para los objetivos de este libro, en el que no se pretende abordar la Geometría Algebraica en toda su generalidad, creemos preferible usar este término.

El primer ejemplo de variedad algebraica afín sobre un anillo A es el *espacio afín* de r dimensiones,

$$\mathbb{A}_A^r = \text{Spec } A[x_1, \dots, x_r], \quad (\text{Ejemplo 1.14}).$$

Si $X = \text{Spec } A[\xi_1, \dots, \xi_r]$ es una variedad algebraica afín, se tiene una sucesión exacta

$$0 \rightarrow J \rightarrow A[x_1, \dots, x_r] \rightarrow A[\xi_1, \dots, \xi_r] \rightarrow 0$$

que induce una inmersión cerrada

$$X \hookrightarrow \mathbb{A}_k^r,$$

que identifica $X \cong V(J)$ con los ceros del ideal J .

Cuando $A = k$ es un cuerpo, veremos más adelante (Corolario 5.32 y Proposición 5.16) que todo ideal de $k[x_1, \dots, x_r]$ admite un número finito de generadores, de modo que $J = (P_1(x_1, \dots, x_r), \dots, P_m(x_1, \dots, x_r))$. Por tanto, tenemos

$$X \cong V(J) = (P_1)_0 \cap \dots \cap (P_m)_0$$

(Proposición 1.1), lo que describe la variedad algebraica afín X como el lugar de ceros de los polinomios $(P_1, \dots, P_m)$. Expresamos este hecho diciendo que las «ecuaciones» de X en $\mathbb{A}_k^r$ son

$$P_1(x_1, \dots, x_r) = \dots = P_m(x_1, \dots, x_r) = 0.$$

Hay que hacer énfasis en que lo que caracteriza a una variedad algebraica afín (y en general a cualquier espectro), es el anillo y no la topología del espectro. Puesto que el anillo es $A = k[\xi_1, \dots, \xi_r] = k[x_1, \dots, x_r]/J$, decir, el anillo equivale a decir, el ideal J , o sea las ecuaciones $(P_1, \dots, P_m)$. Por ejemplo, las variedades algebraicas definidas en el plano afín $\mathbb{A}_k^2 = \text{Spec } k[x, y]$ por las ecuaciones

$$X_1 \equiv y = 0, \quad X_2 \equiv y^2 = 0,$$

tiene los mismos puntos, pero son algebraicamente diferentes, pues vienen dadas por

$$X_1 = \text{Spec } k[x, y]/(y), \quad X_2 = \text{Spec } k[x, y]/(y^2)$$

de modo que X_1 es el «eje OX » mientras que X_2 es el «eje OX contado dos veces». La topología es la misma, pero la «estructura infinitesimal» no. Nociones geométricas como la tangencia dependen de esta estructura infinitesimal, y por eso es mejor estudiar los anillos que la topología de sus espectros.

1.4. Introducción a la dimensión de un anillo. Dimensión de las variedades algebraicas afines

Vamos a dar la definición de dimensión de un anillo, lo que nos permitirá definir la dimensión de una variedad algebraica afín. No disponemos todavía de las herramientas necesarias para estudiar en toda su profundidad la teoría de la dimensión, de la que nos ocuparemos en el Capítulo 9 al que nos referiremos para algunos resultados.

Sea A un anillo.

Definición 1.25. Se llama *dimensión de Krull*, o simplemente *dimensión* de A al supremo $\dim(A)$ de las longitudes n de las cadenas irrefinables de ideales primos:

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n .$$

Llamaremos *dimensión del espectro* $X = \operatorname{Spec} A$ a la dimensión

$$\dim X = \dim A$$

de A . Podemos también definir geoméricamente $\dim X = \dim A$ como el supremo de las longitudes n de las cadenas irrefinables

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n , \quad (x_i \leftrightarrow \mathfrak{p}_i)$$

de puntos de X .

La dimensión puede ser finita o infinita. Se conviene en que el anillo 0 tiene dimensión -1 . Si A es de dimensión finita n existe una cadena irrefinable

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$$

de longitud n . En esta cadena, $\mathfrak{p}_n$ es maximal y $\mathfrak{p}_0$ es minimal.

Si $\mathfrak{a}$ es un ideal y $\pi: A \rightarrow A/\mathfrak{a}$ es el morfismo de paso al cociente, dada una cadena irrefinable $\bar{\mathfrak{p}}_0 \subset \cdots \subset \bar{\mathfrak{p}}_m$ de ideales primos en $A/\mathfrak{a}$, $\pi^{-1}(\bar{\mathfrak{p}}_0) \subset \cdots \subset \pi^{-1}(\bar{\mathfrak{p}}_m)$ es una cadena irrefinable de ideales primos en A . Por tanto

Proposición 1.26. Para todo ideal $\mathfrak{a}$ de A ,

$$\dim(A/\mathfrak{a}) \leq \dim(A) ,$$

o geoméricamente, $\dim Y \leq \dim X$, siendo $Y = \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \hookrightarrow X$ el cerrado de X definido por el ideal $\mathfrak{a}$. $\square$

Ejemplo 1.27. Los cuerpos son anillos de dimensión 0. Los dominios de ideales principales son anillos de dimensión 1, pues todo ideal primo no nulo es maximal. En particular $\dim \mathbb{Z} = 1$, $\dim k[x] = 1$ (siendo k un cuerpo).

Observación 1.28. Veremos más adelante (Proposición 9.44) que la dimensión del anillo de polinomios $k[t_1, \dots, t_r]$ es finita e igual a r ,

$$\dim \mathbb{A}_k^r = \dim[t_1, \dots, t_r] = r .$$

Es decir, que lo que hemos definido como «espacio afín de r dimensiones», tiene realmente dimensión r .

Una consecuencia del resultado mencionado es

Corolario 1.29. Si k es un cuerpo, las k -álgebras de tipo finito $k[\xi_1, \dots, \xi_r]$ son de dimensión finita y menor o igual que r

$$\dim(k[\xi_1, \dots, \xi_r]) \leq r .$$

En otras palabras, las variedades algebraicas afines $\operatorname{Spec} k[\xi_1, \dots, \xi_r]$ (Definición 1.24) son de dimensión finita.

Demostración. $k[\xi_1, \dots, \xi_r]$ es un cociente de $k[x_1, \dots, x_r]$, luego su dimensión es menor o igual que la dimensión de $k[x_1, \dots, x_r]$ (Proposición 1.26), que es r por la Proposición 9.44. $\square$

Del mismo modo que para las variedades afines abstractas (Definición 9.19), tenemos:

Definición 1.30. Se llaman *curvas algebraicas afines*, *superficies algebraicas afines*, *variedades tridimensionales algebraicas afines*, etc, (sobre un cuerpo k) a las variedades algebraicas afines sobre k de dimensión 1, 2, 3 etc.

A lo largo del libro, y sobre todo en los ejercicios, nos referiremos a curvas, superficies, etc. La demostración de que en realidad tienen dimensión 1, 2, etc. requiere los resultados del Capítulo 9. En todos los ejemplos y ejercicios que aparecen antes de dicho capítulo, se trata únicamente de una cuestión terminológica, pues no usaremos realmente cuanto vale la dimensión. Así hablaremos de la curva plana definida por un polinomio $p(x, y)$, pero no utilizaremos, de hecho, que la dimensión de su anillo $k[x, y]/(p(x, y))$ es igual a 1.

1.5. Ejercicios

1.31. Calcular $\text{Spec } A$ en cada uno de los siguientes casos:

- (a) $A = k[x, y]/(y^3 - x^2, x^3 + y^3 + x^4)$ para $k = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$.
- (b) $A = \mathbb{Q}[x, y]/(y^2 - x^2 + x^3, y + x + x^2 + y^2)$.
- (c) $A = k[x, y]/(y^2 - x^3, y^3 + 3x^6)$ para $k = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$.

Solución. (a) A partir del Corolario 1.17, se tiene que $\text{Spec } A = V(I)$ siendo $I = (y^3 - x^2, x^3 + y^3 + x^4)$. Si $y^3 - x^2 = 0$ y $x^3 + y^3 + x^4 = 0$, entonces $x^2(x^2 + x + 1) = 0$, luego, según el apartado (6) de la Proposición 1.1, $V(I) = V(I_1) \cup V(I_2)$ donde $I_1 = (y^3 - x^2, x^3 + y^3 + x^4, x^2)$ e $I_2 = (y^3 - x^2, x^3 + y^3 + x^4, x^2 + x + 1)$. Calculemos cada uno de estos dos cerrados. Como el espectro de un anillo coincide con el del anillo reducido (Corolario 1.17), tenemos que

$$V(I_1) = V((y^3 - x^2, x^3 + y^3 + x^4, x)) = \{\mathfrak{m}_1 = (x, y)\}.$$

Si $k = \mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, el polinomio $x^2 + x + 1$ es irreducible en k y

$$V(I_2) \simeq \text{Spec } k(\epsilon)[y]/(y^3 - \epsilon^2)$$

siendo ϵ una raíz de $x^2 + x + 1$. En $\mathbb{Q}(\epsilon)[y]$ el polinomio $y^3 - \epsilon^2$ es irreducible, luego

$$V(I_2) = \{\mathfrak{m}_2 = (x^2 + x + 1, y^3 - x^2)\}$$

y $\text{Spec } A = \{\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2\}$ para $k = \mathbb{Q}$. En $\mathbb{R}(\epsilon)[y] \simeq \mathbb{C}[y]$ la descomposición en factores primos de $y^3 - \epsilon^2$ es

$$(y - (a + b\epsilon))(y - \epsilon(a + b\epsilon))(y - \epsilon^2(a + b\epsilon))$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, luego

$$V(I_2) = \{\mathfrak{m}_3 = (x^2 + x + 1, y - (a + b\epsilon)), \mathfrak{m}_4 = (x^2 + x + 1, y - \epsilon(a + b\epsilon)), \mathfrak{m}_5 = (x^2 + x + 1, y - \epsilon^2(a + b\epsilon))\}$$

y $\text{Spec } A = \{\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_3, \mathfrak{m}_4, \mathfrak{m}_5\}$ para $k = \mathbb{R}$. Si $k = \mathbb{C}$, entonces $x^2 + x + 1 = (x - \epsilon)(x - \epsilon^2)$. Si $J_1 = (y^3 - x^2, x^3 + y^3 + x^4, x - \epsilon)$ y $J_2 = (y^3 - x^2, x^3 + y^3 + x^4, x - \epsilon^2)$, se tiene que

$$V(I_2) = V(J_1) \cup V(J_2) \simeq \text{Spec } \mathbb{C}[y]/(y^3 - \epsilon^2) \cup \text{Spec } \mathbb{C}[y]/(y^3 - \epsilon) = \{\mathfrak{m}_6, \mathfrak{m}_7, \mathfrak{m}_8\} \cup \{\mathfrak{m}_9, \mathfrak{m}_{10}, \mathfrak{m}_{11}\}$$

siendo $\mathfrak{m}_6 = (x - \epsilon, y - (a + b\epsilon))$, $\mathfrak{m}_7 = (x - \epsilon, y - \epsilon(a + b\epsilon))$, $\mathfrak{m}_8 = (x - \epsilon, y - \epsilon^2(a + b\epsilon))$, $\mathfrak{m}_9 = (x - \epsilon^2, y - (a' + b'\epsilon))$, $\mathfrak{m}_{10} = (x - \epsilon^2, y - \epsilon(a' + b'\epsilon))$ y $\mathfrak{m}_{11} = (x - \epsilon^2, y - \epsilon^2(a' + b'\epsilon))$ con $a', b' \in \mathbb{R}$. Por tanto, $\text{Spec } A = \{\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_6, \mathfrak{m}_7, \mathfrak{m}_8, \mathfrak{m}_{10}, \mathfrak{m}_{11}\}$ para $k = \mathbb{C}$.

(b) Utilizando de nuevo el Corolario 1.17, tenemos que $\text{Spec } A = V(I)$ con $I = (y^2 - x^2 + x^3, y + x + x^2 + y^2)$. Como la resultante de esos dos polinomios es $x^3(x^3 - 4x^2 + 2x + 5)$, tenemos que $V(I) = V(I_1) \cup V(I_2)$ siendo $I_1 = (y^2 - x^2 + x^3, y + x + x^2 + y^2, x^3)$ e $I_2 = (y^2 - x^2 + x^3, y + x + x^2 + y^2, x^3 - 4x^2 + 2x + 5)$. Igual que en el apartado anterior, como el

espectro de un anillo coincide con el de su reducido, $V(I_1) = \{\mathbf{m}_1 = (x, y)\}$. En $\mathbb{Q}[x]$ el polinomio $x^3 - 4x^2 + 2x + 5$ es irreducible, luego si ϵ denota una de sus raíces y $\mathbf{m}_2 = (x^3 - 4x^2 + 2x + 5, y - x^3 - 2x^2 - x)$,

$$V(I_2) \simeq \text{Spec } \mathbb{Q}(\epsilon)[y]/(y + \epsilon^3 - 2\epsilon^2 - \epsilon) = \{\mathbf{m}_2\}.$$

Entonces, $\text{Spec } A = \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2\}$.

(c) Razonando como en los dos apartados anteriores se llega a que

$$\text{Spec } A = V(I_1) \cup V(I_2)$$

siendo $I_1 = (y^2 - x^3, y^3 + 3x^6, x^3)$ e $I_2 = (y^2 - x^3, y^3 + 3x^6, y + 3x^3)$. Además $V(I_1) = \{\mathbf{m}_1 = (x, y)\}$ y

$$V(I_2) = V((y^2 - x^3, y + 3x^3)) \simeq \text{Spec } k[x]/(9x^3 - 1)x^3.$$

En $\mathbb{Q}[x]$, el polinomio $9x^3 - 1$ es irreducible, luego $V(I_2) = \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 = (9x^3 - 1, y + 3x^3)\}$ y $\text{Spec } A = \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2\}$ para $k = \mathbb{Q}$. En $\mathbb{R}[x]$, la descomposición en factores irreducibles de dicho polinomio es

$$9x^3 - 1 = 9(x - \sqrt[3]{\frac{1}{9}})(x^2 + \sqrt[3]{\frac{1}{9}}x + (\sqrt[3]{\frac{1}{9}})^2)$$

Por tanto,

$$V(I_2) = \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_3 = (x - \sqrt[3]{\frac{1}{9}}, y + 3x^3), \mathbf{m}_4 = ((x^2 + \sqrt[3]{\frac{1}{9}}x + (\sqrt[3]{\frac{1}{9}})^2, y + 3x^3)\}$$

y $\text{Spec } A = \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4\}$ para $k = \mathbb{R}$. Por último, si $k = \mathbb{C}$, entonces

$$9x^3 - 1 = 9(x - \sqrt[3]{\frac{1}{9}})(x - \epsilon\sqrt[3]{\frac{1}{9}})(x - \epsilon^2\sqrt[3]{\frac{1}{9}})$$

donde ϵ es una raíz cúbica de la unidad. Por tanto,

$$V(I_2) = \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_5 = (x - \epsilon\sqrt[3]{\frac{1}{9}}, y + 3x^3), \mathbf{m}_6 = (x - \epsilon^2\sqrt[3]{\frac{1}{9}}, y + 3x^3)\}$$

y $\text{Spec } A = \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_5, \mathbf{m}_6\}$ para $k = \mathbb{C}$. $\square$

1.32. Sea p un número primo diferente de 2. Si $\mathbb{F}_p$ es el cuerpo con p elementos y $a \in \mathbb{F}_p^*$, probar que

$$\sqrt{a} \in \mathbb{F}_p^* \iff \left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p} = 1.$$

La aplicación $\left(\frac{\cdot}{p}\right) : \mathbb{F}_p^* \longrightarrow \{-1, 1\}$ se denomina «símbolo de Legendre» y verifica las siguientes propiedades:

$$(a) \quad \left(\frac{\alpha \cdot \beta}{p}\right) = \left(\frac{\alpha}{p}\right) \cdot \left(\frac{\beta}{p}\right);$$

$$(b) \quad \text{Si } n = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}, \text{ entonces } \left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{n_1} \cdots \left(\frac{p_r}{p}\right)^{n_r};$$

- (c) Si r es el resto al dividir n entre p , entonces $\binom{n}{p} = \binom{r}{p}$;
- (d) $\binom{1}{p} = 1$;
- (e) $\binom{-1}{p} = \begin{cases} 1 & \text{si } p \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{si } p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$

Solución. Si $(\mathbb{F}_p^*)^2$ es el subgrupo de $\mathbb{F}_p^*$ formado por los elementos que admiten raíz cuadrada, a partir de la sucesión exacta de grupos

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \{-1, 1\} & \longrightarrow & \mathbb{F}_p^* & \longrightarrow & (\mathbb{F}_p^*)^2 \longrightarrow 1 \\ & & & & x & \longmapsto & x^2 \end{array},$$

se tiene que $\#(\mathbb{F}_p^*)^2 = \frac{\#\mathbb{F}_p^*}{\#\{-1, 1\}} = \frac{p-1}{2}$.

Además, si $\alpha \in \mathbb{F}_p^*$ se tiene que $\alpha^{p-1} = 1$ y, por tanto, existe un morfismo epiyectivo de grupos

$$\begin{array}{ccc} \varphi: \mathbb{F}_p^* & \longrightarrow & \{-1, 1\} \\ \alpha & \longmapsto & \alpha^{\frac{p-1}{2}} \end{array}.$$

Dado que $(\mathbb{F}_p^*)^2 \subseteq \text{Ker } \varphi$ y tienen el mismo orden, se concluye que

$$\sqrt{\alpha} \in \mathbb{F}_p^* \iff \alpha^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p} = 1.$$

Las propiedades enumeradas del símbolo de Legendre se siguen directamente de la definición. $\square$

1.33. Demostrar que $\binom{2}{p} = \begin{cases} 1 & \text{si } p \equiv \pm 1 \pmod{8} \\ -1 & \text{si } p \equiv \pm 3 \pmod{8} \end{cases}$

Solución. Si ϵ es una raíz octava primitiva de la unidad, se tiene que $\epsilon^4 = -1$, de donde $\epsilon^2 + \epsilon^{-2} = 0$. Por tanto, si denotamos $y = \epsilon + \epsilon^{-1}$, se tiene que $y^2 = 2$ y, por tanto,

$$\binom{2}{p} = y^{p-1} \pmod{p}.$$

Como $y^p = \epsilon^p + \epsilon^{-p}$, el resultado buscado se sigue del hecho de verificarse que

$$y^p = \begin{cases} y & \text{si } p \equiv \pm 1 \pmod{8} \\ -y & \text{si } p \equiv \pm 3 \pmod{8} \end{cases}.$$

$\square$

1.34. Sea p un número primo diferente de 2 y $q = p^n$. Si $\mathbb{F}_q$ es el cuerpo con q elementos y $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$, se denomina norma de α , y se denota por $N_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}$, al determinante de la aplicación $\mathbb{F}_p$ -lineal

$$\begin{array}{ccc} h_\alpha: \mathbb{F}_q & \longrightarrow & \mathbb{F}_q \\ z & \longmapsto & \alpha \cdot z \end{array},$$

que es un elemento de $\mathbb{F}_p^*$.

Demostrar que $N_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\alpha) = \alpha^{\frac{p^n-1}{p-1}}$.

Solución. Dado que $\mathbb{F}_q$ es una extensión de $\mathbb{F}_p$ de orden n , se tiene que $\mathbb{F}_q \simeq \mathbb{F}_p(\beta) = \mathbb{F}_p[x]/p(x)$, siendo β cierto elemento de $\mathbb{F}_q$ y $p(x)$ el polinomio mínimo de β con coeficientes en $\mathbb{F}_p$.

Si consideramos el automorfismo de Frobenius,

$$\begin{aligned}\tau: \mathbb{F}_q &\longrightarrow \mathbb{F}_q \\ z &\longmapsto z^p\end{aligned},$$

se tiene que $\mathbb{F}_p$ es invariante por τ . Por lo tanto, si a es raíz de $p(x)$ se verifica que $\tau(a)$ también es raíz, y las raíces del polinomio $p(x)$ son $\beta, \beta^p, \dots, \beta^{p^{n-1}}$.

Entonces, si $\alpha = s(\beta) \in \mathbb{F}_p(\beta)$, se verifica que

$$\begin{aligned}N_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\alpha) &= \det h_\alpha = s(\beta) \cdot s(\beta^p) \cdots s(\beta^{p^{n-1}}) = \\ &= \alpha \cdot \alpha^p \cdots \alpha^{p^{n-1}} = \alpha^{\frac{p^n-1}{p-1}}.\end{aligned}$$

□

1.35. Sea p un número primo diferente de 2 y $q = p^n$. Si $\mathbb{F}_q$ es el cuerpo con q elementos y $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$, demostrar que

$$\sqrt{\alpha} \in \mathbb{F}_q^* \iff \left(N_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\alpha) \right)_p = 1.$$

Solución. De manera análoga al problema 1.32 se tiene que

$$\sqrt{\alpha} \in \mathbb{F}_q^* \iff \alpha^{\frac{p^n-1}{2}} = 1.$$

Por lo tanto, del problema anterior deducimos que

$$\sqrt{\alpha} \in \mathbb{F}_q^* \iff \left(N_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\alpha) \right)_p = \left(\alpha^{\frac{p^n-1}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{2}} = \alpha^{\frac{p^n-1}{2}} = 1.$$

□

1.36. Determinar la existencia de las siguientes raíces cuadradas:

- (a) $\sqrt{x+1}$ en $\mathbb{F}_{11}[x]/(x^2+5)$.
- (b) $\sqrt{1-x}$ en $\mathbb{F}_7[x]/(x^2+1)$.

Solución. (a) Si $h_{x+1}: \mathbb{F}_{11}[x]/(x^2+5) \rightarrow \mathbb{F}_{11}[x]/(x^2+5)$ denota la homotecia de razón $x+1$, su matriz en la base $\{1, x\}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces la norma de $x+1$ vale $N(x+1) = \det A = 6$. Utilizando las propiedades elementales del símbolo de Legendre, se llega fácilmente a que

$$\left(\frac{6}{11} \right) = -1, \text{ y, por tanto, } \sqrt{x+1} \text{ no existe en el cuerpo } \mathbb{F}_{11}[x]/(x^2+5).$$

(b) En este caso, la matriz de la homotecia $h_{1-x}: \mathbb{F}_7[x]/(x^2 + 1) \rightarrow \mathbb{F}_7[x]/(x^2 + 1)$, también en la base $\{1, x\}$, es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, $N(1 - x) = \det B = 2$. Según el ejercicio anterior, tenemos que $\binom{2}{7} = 1$ y, por consiguiente, $\sqrt{1 - x}$ existe en $\mathbb{F}_7[x]/(x^2 + 1)$. □

1.37. Calcular $\text{Spec } A$ en los siguientes casos

- (a) $A = \mathbb{F}_{11}[x, y]/(x^2 + y^2 + x^4, y^2 + x^2 + y^4)$.
(b) $A = \mathbb{F}_7[x, y]/(x^2 + y^2 + x, y^2 + x^2 - x^3)$.

Solución. (a) Si $x^2 + y^2 + x^4 = 0$ e $y^2 + x^2 + y^4 = 0$, entonces $x^6(x^2 + 2) = 0$. Luego, utilizando el Corolario 1.17 y la Proposición 1.1, tenemos que $V(I) = V(I_1) \cup V(I_2)$ donde $I_1 = (x^2 + y^2 + x^4, y^2 + x^2 + y^4, x^6)$ e $I_2 = (x^2 + y^2 + x^4, y^2 + x^2 + y^4, x^2 + 2)$. Dado que el espectro de un anillo coincide con el de su reducido (Corolario 1.17), $V(I_1) = \{\mathfrak{m}_1 = (x, y)\}$. Por otro lado, las soluciones de $x^2 + 2 = 0$ y $x^2 + y^2 + y^4 = 0$ en $\mathbb{F}_{11}$ son $x = \pm 3$ e $y = \pm 3$, luego

$$\begin{aligned} V(I_2) &= \{\mathfrak{m}_2 = (x - 3, y - 3), \mathfrak{m}_3 = (x - 3, y + 3), \\ &\quad \mathfrak{m}_4 = (x + 3, y - 3), \mathfrak{m}_5 = (x + 3, y + 3)\} \end{aligned}$$

y $\text{Spec } A = \{\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \mathfrak{m}_4, \mathfrak{m}_5\}$.

(b) Si $x^2 + y^2 + x = 0$ e $y^2 + x^2 - x^3 = 0$, entonces $x(x^2 + 1) = 0$. Por tanto, como en el apartado anterior, $\text{Spec } A = V(I_1) \cup V(I_2)$ con $I_1 = (x^2 + y^2 + x, y^2 + x^2 - x^3, x)$ e $I_2 = (x^2 + y^2 + x, y^2 + x^2 - x^3, x^2 + 1)$. Por un lado, $V(I_1) = \{\mathfrak{m}_1 = (x, y)\}$. Como, según el Ejercicio 1.36, $\sqrt{1 - x}$ existe en $\mathbb{F}_7[i]$, si denotamos $\sqrt{1 - x} = a + bx$, entonces

$$y^2 - 1 + x = (y - (a + bx))(y + (a + bx))$$

y $V(I_2) = \{\mathfrak{m}_2 = (x^2 + 1, y - (a + bx)), \mathfrak{m}_3 = (x^2 + 1, y + (a + bx))\}$. Entonces, $\text{Spec } A = \{\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3\}$. □

1.38. Demostrar que $\text{Spec } A = C_1 \amalg C_2$, con C_1 y C_2 cerrados para la topología de Zariski (y, por tanto, abiertos), si y solo si $A \simeq A_1 \times A_2$. Además, en este caso, es $C_i = \text{Spec } A_i$, $i = 1, 2$.

Solución. Supongamos que $\text{Spec } A = C_1 \amalg C_2$ siendo $C_1 = V(I_1)$ y $C_2 = V(I_2)$ para ciertos ideales I_1 e I_2 de A . De que $V(I_1 + I_2) = \emptyset$, deducimos que existen elementos $i_1 \in I_1$ e $i_2 \in I_2$ con $i_1 + i_2 = 1$ y, de que $V(I_1 \cdot I_2) = \text{Spec } A$, tenemos que $I_1 \cdot I_2 \subseteq \mathfrak{r}(A)$, y, por tanto, $(i_1 \cdot i_2)^n = 0$ para cierto n . Como $1 = (i_1 + i_2)^n = i_1^n + i_2^n + a$ con $a \in I_1 \cdot I_2$, resulta que $i_1^n + i_2^n$ no está en ningún ideal primo $\mathfrak{p}$ de A , pues en otro caso $1 = i_1 + i_2 \in$

$\mathfrak{p}$, lo que es imposible; por tanto, $i_1^n + i_2^n$ es invertible en A y es posible considerar $j_1 = \frac{i_1^n}{i_1^n + i_2^n}$ y $j_2 = \frac{i_2^n}{i_1^n + i_2^n}$. Como $j_1 + j_2 = 1$ y $j_1 \cdot j_2 = 0$, el teorema chino de los restos implica que $A \simeq A/(j_1) \times A/(j_2)$. Supongamos, recíprocamente que $A \simeq A_1 \times A_2$. Sean $(1, 0), (0, 1) \in A$. Como $(1, 0)_0 \cup (0, 1)_0 = (0, 0)_0$, es $\text{Spec } A_1 \cup \text{Spec } A_2 = \text{Spec } A$ y, como $(1, 0)_0 \cap (0, 1)_0 = (1, 1)_0$, es $\text{Spec } A_1 \cap \text{Spec } A_2 = \emptyset$. Tomando $C_1 = \text{Spec } A_1$ y $C_2 = \text{Spec } A_2$ concluimos el ejercicio. $\square$

1.39. Probar que A es íntegro si y solo si A es reducido y $\text{Spec } A$ es irreducible.

Solución. Supongamos que el anillo A es íntegro. Como todo nilpotente es un divisor de cero, A es reducido. Si $\text{Spec } A = V(I_1) \cup V(I_2)$, entonces $I_1 \cap I_2 \subseteq \mathfrak{r}(A)$, y, por tanto, $I_1 \cap I_2 = 0$. Como para cualesquiera elementos $i_1 \in I_1$ e $i_2 \in I_2$ es $i_1 \cdot i_2 \in I_1 \cap I_2$, tenemos que $i_1 = 0$ o $i_2 = 0$. Luego $V(I_1) = \text{Spec } A$ o $V(I_2) = \text{Spec } A$ lo que implica que $\text{Spec } A$ es irreducible. Supongamos ahora que A es reducido y $\text{Spec } A$ es irreducible. Sean $a, b \in A$ con $a \cdot b = 0$. Si $a = b$, a es nilpotente y, por tanto, cero. Si $a \neq b$, se tiene que $\text{Spec } A = (a)_0 \cup (b)_0$. Entonces $(a)_0 = \text{Spec } A$ o $(b)_0 = \text{Spec } A$. El que A sea reducido implica $a = 0$ o $b = 0$. Luego A no tiene divisores de cero. $\square$

1.40. Demostrar que las componentes irreducibles de $\text{Spec } A$ equivalen a los primos minimales de A .

Solución. Por el Corolario 1.18, los cerrados irreducibles de $\text{Spec } A$ se corresponden con los ideales primos de A . Teniendo en cuenta que las componentes irreducibles de $\text{Spec } A$ son los cerrados irreducibles maximales, el enunciado del ejercicio sigue del apartado (3) de la Proposición 1.1 según el cual si $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{q}$ son ideales primos de A , $V(\mathfrak{p}) \subseteq V(\mathfrak{q})$ si y solo si $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. $\square$

1.41. Sea $f: A \rightarrow B$ un morfismo de anillos. Si I es un ideal de A , se denota $I^e = f(I) \cdot B$ y, si J es un ideal de B , escribimos $J^c = f^{-1}(J)$. Demostrar que $I^{ece} = I^e$ y que $J^{cec} = J^c$.

Solución. Es evidente que $I \subseteq I^e$ y que $J^{ce} \subseteq J$. De la primera inclusión, llegamos a que $I^{ece} \subseteq I^e$ y, considerando como ideal J el propio I^e en la segunda inclusión, tenemos que $I^e \subseteq I^{ece}$. Luego $I^{ece} = I^e$. Razonando del mismo modo se llega a que $J^{cec} = J^c$. $\square$

1.42. Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff. Probar que para cada punto $x \in X$, el conjunto $\mathfrak{m}_x = \{f \in C^0(X, \mathbb{R}) \mid f(x) = 0\}$ es un ideal maximal. Demostrar también que la aplicación $\phi: X \rightarrow \text{Spec}_{\max} C^0(X, \mathbb{R})$ definido por $x \mapsto \mathfrak{m}_x$ es un homeomorfismo.

Solución. Para cada $x \in X$ el ideal $\mathfrak{m}_x$ es maximal, pues es el núcleo del morfismo epiyectivo $C^0(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ que aplica f en $f(x)$. Probemos a continuación que para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $C^0(X, \mathbb{R})$ verifica $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_x$ para algún $x \in X$. En efecto, si no es así, para cada $x \in X$, existe una función $f_x \in \mathfrak{m}$, de