

Les Nombres premiers, entre l'ordre et le chaos

Gérald Tenenbaum

Professeur à l'université de Lorraine

Michel Mendès France

Professeur émérite de l'université de Bordeaux

DUNOD

Une précédente version de cet ouvrage a été publiée
en 1997 aux Presses Universitaires de France
dans la collection « Que sais-je ? », rééditée en 2000.

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.	d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements	Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2011, 2014 pour la présente édition
ISBN : 978-2-10-070699-0

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Ce livre est dédié à la mémoire de Paul Erdős, qui nous a quittés en septembre 1996, au moment même où nous achevions la rédaction de la première édition. Il fut pour nous un oncle (ainsi que l'appelaient ses amis) et un maître. Un géant des mathématiques a disparu, mais son empreinte marquera bien des siècles à venir.

Table des matières

Avant-propos	ix
Notations et conventions	xvii
Index des notations	xix
Chapitre I La genèse : d'Euclide à Tchébychev	I
1. Introduction	I
2. Une brève histoire de ce qui va suivre	6
3. Décomposition canonique	11
4. Congruences	13
5. Intermezzo cryptographique : systèmes à clefs publiques	17
6. Résidus quadratiques	20
7. Retour sur l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers	22
8. Le crible d'Ératosthène	24
9. Les théorèmes de Tchébychev	26
10. Les théorèmes de Mertens	32
11. Le crible de Brun et le problème des nombres premiers jumeaux	36
Chapitre 2 La fonction zêta de Riemann	43
1. Introduction	43
2. Une brève histoire de ce qui va suivre	45

3.	Produit eulérien	48
4.	Prolongement analytique	51
5.	La droite $\sigma = 1$ et le théorème des nombres premiers	57
6.	L'hypothèse de Riemann	64
7.	Conséquences arithmétiques des renseignements sur les zéros	69

Chapitre 3 Répartition stochastique des nombres premiers

		73
1.	Introduction	73
2.	Une brève histoire de ce qui va suivre	74
3.	Progressions arithmétiques	77
4.	Le théorème de Green et Tao	89
5.	Le modèle de Cramér	91
6.	Le théorème de Goldston, Pintz et Yıldırım	98
7.	Le théorème de Zhang	102
8.	Équirépartition modulo un	104
9.	Vision géométrique	111

Chapitre 4 Une preuve élémentaire du théorème des nombres premiers

		115
1.	Introduction	115
2.	Intégration par parties	119
3.	Convolution des fonctions arithmétiques	121
4.	La fonction de Möbius	125
5.	Valeur moyenne de la fonction de Möbius et théorème des nombres premiers	128
6.	Entiers sans grand ou sans petit facteur premier	133
7.	La fonction de Dickman	138

8. La preuve de Daboussi, revisitée	142
Chapitre 5 Les grandes conjectures	149
Lectures complémentaires	161
Index	163

Avant-propos

Issu de notre ouvrage *Les Nombres premiers*, paru dans la collection *Que sais-je ?* et à présent épuisé, ce petit livre représente un pari sans doute ambitieux : fournir au grand public scientifique une description concise de la théorie analytique moderne des nombres premiers — à l'exclusion toutefois des apports de la théorie des formes modulaires.

Répondant à des questions posées depuis l'Antiquité — y a-t-il beaucoup de nombres premiers ?, comment se répartissent-ils ?, etc. —, ce domaine connaît depuis un siècle un essor sans précédent, dû notamment aux interactions avec la théorie des probabilités. Les tables de nombres premiers mettent en évidence un aspect chaotique, dont le désordre apparent s'accorde finalement avec des modèles aléatoires classiques, issus, par exemple, de phénomènes physiques. Là est précisément l'objet de cet opuscule : décrire, puis tenter de comprendre, comment une suite aussi hautement déterminée que celle des nombres premiers peut renfermer une telle part de hasard.

Insistons un peu sur ce point. Le hasard total, le chaos, c'est la complexité infinie. Par ailleurs, la complexité d'un nombre entier croît manifestement avec sa taille, et répondre à des questions de base devient souvent difficile : le nombre $2^{57885161} - 1$ est-il premier ?⁽¹⁾ Combien de fois son développement décimal contient-il le chiffre 7 ? etc. Au voisinage de l'infini, la suite des nombres entiers, et partant celle des nombres premiers, mime le hasard. Les directions modernes de la théorie analytique des nombres tentent de rendre compte des modalités de cette tendance.

1. Oui, d'après Curtis Cooper (2013).

Physiciens et philosophes discutent encore de l'hypothétique « variable cachée », malgré les travaux convaincants d'Alain Aspect, qui semblent en proscrire l'existence. L'école de Copenhague, avec Niels Bohr, défend la thèse que le monde subatomique est régi par le hasard. Einstein, quant à lui, rêve d'une explication sub-subatomique totalement déterministe. La suite des nombres premiers ne pourrait-elle servir de modèle aux idées d'Einstein, lui qui prétendait que Dieu ne joue pas aux dés au moment même où Mark Kac, éminent arithméticien, professait l'opinion que les nombres premiers s'adonnent secrètement au jeu de pile ou face ?

La dialectique ordre/désordre occupe les théoriciens des nombres depuis que Legendre et Gauss ont conjecturé une répartition harmonieuse des nombres premiers, à savoir que le n -ième nombre premier p_n est proche de $n \ln n$.⁽¹⁾ Une telle régularité dans l'aléatoire ne doit pas surprendre : quoi de plus imprévisible que le jet d'une pièce de monnaie alors que la probabilité qui régit l'événement, constamment égale à $\frac{1}{2}$, prévoit une tendance à l'équilibre entre les piles et les faces ? Tous ceux qui ont observé la suite des nombres premiers ont remarqué à la fois l'irrégularité et la régularité de leur distribution. À l'instar du jeu de pile ou face, le comportement en moyenne est régulier alors que les fluctuations locales, ici le passage de p_n à p_{n+1} , demeure très complexe.

Nous avons choisi de décrire ces phénomènes de répartition en nous appuyant sur le cheminement historique et l'évolution graduelle de la philosophie — c'est-à-dire la représentation archétypale — des nombres premiers. Les Chapitres 1, 2 et 4 sont principalement consacrés aux résultats de régularité, alors que le Chapitre 3 traite surtout des aspects aléatoires de la répartition. Au Chapitre 5, nous décrivons les conjectures principales qui sous-tendent la théorie et nous comprenons, *in fine*, que cette dichotomie n'est qu'apparente : hasard et nécessité se conjuguent harmonieusement pour produire de la structure, chacune des

1. Cette assertion, qui porte aujourd'hui le nom de *théorème des nombres premiers*, a été démontrée par Jacques Hadamard et Charles de La Vallée-Poussin en 1896.