MP/MP*

PHYSIQUE CHIMIE

1 DEVOIR CORRIGÉ PAR SEMAINE



avec annales
& corrigés commentés

Clément Colléaux
Benjamin Monnet
Clem de la Salle

ellipses

MP/MP*

PHYSIQUE CHIMIE

1 DEVOIR CORRIGÉ PAR SEMAINE



Clément COLLÉAUX
Professeur agrégé au lycée Hoche, Versailles

Benjamin MONNET
Professeur agrégé au lycée Condorcet, Paris

Clem DE LA SALLE
Professeur agrégé au lycée Jean Zay, Thiers

ellipses

Conception graphique couverture : Nathalie FOULLOY

ISBN 9782340-118201

Dépôt légal : août 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

La deuxième année de CPGE est particulièrement intense et exigeante à cause de l'approche des concours. Afin d'en tirer les meilleurs résultats, il est nécessaire d'avoir une méthode de travail claire et efficace. Le plus important est bien évidemment de relire et d'apprendre régulièrement son cours, la veille du cours suivant, autrement dit quasiment tous les jours. Viennent ensuite les TD et les DM qui servent à préparer les DST qui eux-mêmes ont pour but de vous préparer aux concours. Il est impératif de maintenir un travail constant dans les différentes matières et éviter de travailler par à-coups : il est plus bénéfique sur le long terme de travailler un peu chaque matière tous les jours plutôt que de se concentrer sur une seule matière par jour.

Néanmoins, même avec une bonne méthodologie de travail, il arrive régulièrement de se sentir désemparé lors des DST : la difficulté, l'originalité des sujets et les attentes sont souvent bien différents de ce que l'on a pu travailler par le passé. Cet ouvrage propose modestement un moyen de mieux se préparer en vue des DSTs et des concours en s'exerçant sur des sujets typiques d'écrit. Il en contient une vingtaine, triés par thèmes en respectant l'ordre du programme (qui est rarement l'ordre suivi pendant l'année). Afin de vous y retrouvez facilement, les thèmes explorés par les différents devoirs sont indiqués dans la table des matières et en en-tête de devoir. Les problématiques abordées par les différents sujets sont des "classiques", que l'on voit régulièrement revenir dans les concours. Le temps recommandé pour faire au propre un sujet est indiqué au début de celui-ci et avoisine en général les deux heures.

Chaque sujet est évidemment accompagné de son corrigé, dans lequel vous trouverez des rappels de cours (théorèmes, définitions ou lois particulièrement importantes) ainsi que des conseils et les erreurs classiques à éviter.
Enfin, l'ouvrage se termine par deux sujets de concours récents avec leur corrigé pour donner l'occasion de se confronter aux attendus du jour J, tout en ayant une correction détaillée pour s'aider à mieux les cerner. Et concernant le jour J, voici quelques conseils supplémentaires pour vous préparer pour les épreuves qui vous attendent :

Préparation aux écrits :

Ce livre, ainsi que les DST et DM réalisés tout au long de vos deux années de CPGE, constituent votre arme principale pour préparer convenablement les écrits : ce sont des sujets longs en terme de temps et de questions, balayant plusieurs thèmes vus au cours de l'année. Il est judicieux, en plus de cela, d'aller se confronter aux sujets de concours tombés les deux ou trois dernières

années afin de vous familiariser d'autant plus avec le type de devoirs qui vous attend. Il est important d'essayer de faire, au moins une fois de temps en temps, un sujet en "conditions réelles" : temps limité, rédaction propre et lisible (avec encadrement des réponses et titres/numéros des questions soulignés) et aucune distraction. Il n'est toutefois pas pertinent d'adopter cette méthode en permanence car elle est particulièrement chronophage.

Pendant l'épreuve : attention à ne s'entêter sur une question que vous ne savez pas traiter. La priorité est de parcourir le sujet pour répondre à un maximum de questions avant de revenir sur celles qui vous ont posé problème. Dans une bonne partie des cas, il est précisé si les (sous-)parties d'un devoir sont indépendantes ou non. Et dans tous les cas, il est intéressant de se rattacher aux questions du type "montrez que" qui vous donne une formule que vous pouvez ré-exploiter en général dans la suite du sujet.

Préparation aux oraux :

Pour ce qui est des oraux, le style des exercices donnés est drastiquement différents : les énoncés sont plus courts, moins guidés et vous demandent souvent de réaliser des tâches plus complexes par vous-mêmes. Les exercices de TD ainsi que les exercices de colle que vous avez pu avoir tout au long de votre CPGE constituent un bon repère de ce qui vous attend. Il est bien évidemment toujours aussi important de connaître parfaitement son cours : une définition mal donnée, une mauvaise utilisation d'un terme scientifique ou une formule oubliée peuvent vite mener à une note particulièrement basse. Il faudra donc penser à continuer de travailler les cours jusqu'au bout. Encore une fois, il peut être intéressant de s'entraîner ponctuellement en "conditions réelles" : temps de préparation identique au concours visé, passage au tableau en parlant (seul ou avec un ou une camarade qui a connaissance du corrigé pour vous guider en cas d'erreur) et temps de passage limité. Il ne faut pas hésiter à s'appuyer sur d'autres ressources que vos TD pour avoir l'occasion de travailler de nouveaux sujets régulièrement et prendre l'habitude de vous confronter à des raisonnements nouveaux.

Pendant l'épreuve : le but de l'oral est de montrer au maximum ce que vous savez faire en un minimum de temps. N'hésitez donc pas à faire des commentaires physiques, à faire des liens entre l'exercice que vous traitez avec des concepts ou des parties de cours vus pendant l'année ou encore à parler d'ordres de grandeur lorsque cela vous semble pertinent. Cela vous permettra de mettre en avant vos connaissances et de montrer votre recul sur les thèmes abordés.

Nous espérons que ces conseils et cet ouvrage sauront vous aider tout au long de votre année pour vous permettre de réussir au mieux.
Bonne année et bon courage.

Sommaire

Index thématique 4

Devoirs

- Devoir 1 7
- Devoir 2 13
- Devoir 3 17
- Devoir 4 23
- Devoir 5 29
- Devoir 6 35
- Devoir 7 41
- Devoir 8 47
- Devoir 9 51
- Devoir 10 57
- Devoir 11 65
- Devoir 12 71
- Devoir 13 77
- Devoir 14 83
- Devoir 15 89
- Devoir 16 95
- Devoir 17 99
- Devoir 18 105
- Devoir 19 111

Annales

- Annale 1 119
- Annale 2 127

Corrigés

- Corrigé du devoir 1 141
- Corrigé du devoir 2 153
- Corrigé du devoir 3 161
- Corrigé du devoir 4 169
- Corrigé du devoir 5 179
- Corrigé du devoir 6 193
- Corrigé du devoir 7 205
- Corrigé du devoir 8 215
- Corrigé du devoir 9 225
- Corrigé du devoir 10 235
- Corrigé du devoir 11 247
- Corrigé du devoir 12 255
- Corrigé du devoir 13 265
- Corrigé du devoir 14 275
- Corrigé du devoir 15 285
- Corrigé du devoir 16 297
- Corrigé du devoir 17 305
- Corrigé du devoir 18 315
- Corrigé du devoir 19 325
- Corrigé de l'annale 1 335
- Corrigé de l'annale 2 363

Index thématique

Mécanique

Devoirs 1, 2, 3 et Annale 1

Traitement du signal

Devoir 4

Optique

Devoirs 5, 6 et Annale 2

Électromagnétisme

Devoirs 3, 7, 8, 9, 10 et Annales 1 et 2

Thermodynamique

Devoirs 11, 12

Physique quantique

Devoirs 13, 14 et Annale 1

Thermodynamique statistique

Devoir 15

Transformations chimiques de la matière

Devoirs 16, 17, 18

Électrochimie

Devoir 19 et Annale 2

DEVOIRS

Devoir 1

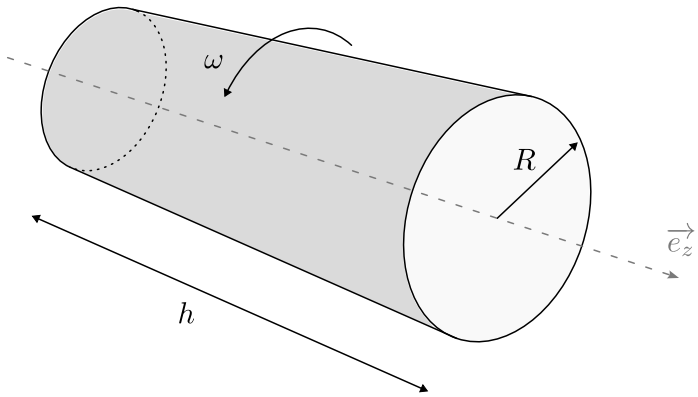
Station Cooper

2h

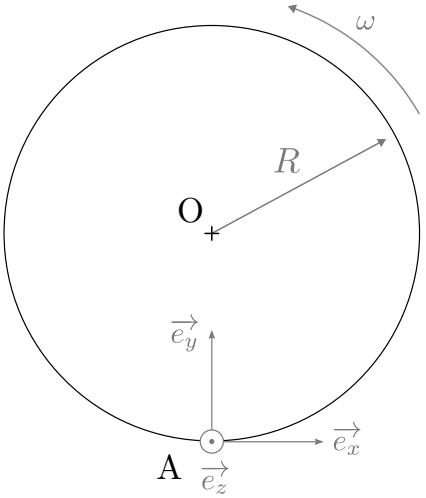
Thèmes abordés :

Référentiel non-galiléen, forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

Dans le film *Interstellar*, l'humanité s'est dotée d'une station habitable en orbite autour de Saturne : la Station Cooper. Il s'agit d'une capsule de forme cylindrique, de rayon $R = 800\,\text{m}$ et de hauteur $h = 4\,\text{km}$ tournant autour de son axe à un vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega} = \omega\,\overrightarrow{e_z}$.



9



Pour étudier les caractéristiques de la station, on sera amené · es à utiliser le référentiel d'un individu A dans cette station. On lui attachera la base orthonormée directe $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, comme représenté dans la vue en coupe ci-contre.

Le vecteur $\overrightarrow{e_x}$ est dirigé dans le sens de la vitesse tangentielle, $\overrightarrow{e_y}$ est vertical ascendant (dirigé vers le centre O de la coupe du cylindre) et $\overrightarrow{e_z}$ est l'axe de la station.

Dans tout l'énoncé, l'observateur A (de masse m) reste fixe par rapport au sol de la station. On notera $\mathcal{R} = (\mathrm{A}, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ son référentiel, et $\mathcal{R}_s$ le référentiel extérieur de centre O, visant trois étoiles fixes lointaines.

1 Simulation de la gravité

1. À partir de la relation de dérivation composée, exprimer $\overrightarrow{v_s}$ et $\overrightarrow{a_s}$, respectivement la vitesse et l'accélération de A dans $\mathcal{R}_s$, en fonction de $\overrightarrow{\omega}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

2. En déduire un bilan des forces sur A, dans $\mathcal{R}$.

3. Montrer que la situation permet de reproduire l'effet du champ de gravité à la surface de la terre (d'intensité $g = 9.81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$). Donner une relation liant R, ω et g pour obtenir une pesanteur comparable à celle sur terre. Mener l'analyse numérique sur ω, que l'on exprimera en $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, puis en tr/min.

4. Que vaut la vitesse tangentielle de A du point de vue d'un observateur extérieur à la station ?

2 Balistique

Dans le film, on voit un court extrait de match de baseball. Le frappeur envoie la balle un peu haute, sa trajectoire semble alors complètement incompréhensible et fini dans la fenêtre d'une maison de l'autre côté de la station.

Le but de cette partie est d'étudier les trajectoires de projectiles. En particulier, on se demandera comment lancer une balle pour que celle-ci revienne exactement dans les mains du lanceur. On notera pour cela

- $\overrightarrow{v_0}$: la vitesse initiale dans le référentiel $\mathcal{R}$;
- α : l'angle initial (par rapport à $\overrightarrow{e_x}$) dans le référentiel $\mathcal{R}$;
- $\overrightarrow{v_{0s}}$: la vitesse initiale dans le référentiel $\mathcal{R}_s$;
- α_s : l'angle initial (par rapport à $\overrightarrow{e_x}$) dans le référentiel $\mathcal{R}_s$.

Par commodité, on pose les grandeurs adimensionnées suivantes :

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{R\omega}{v_0} \\ \gamma = \dfrac{v_0}{v_{0s}} \end{cases} \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} v_0 = ||\overrightarrow{v_0}|| \\ v_{0s} = ||\overrightarrow{v_{0s}}|| \end{cases}$$

Le mouvement étudié se fera uniquement dans le plan $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ (pas de composante selon $\overrightarrow{e_z}$ pour la vitesse initiale).

2.1 Dans le référentiel extérieur

On cherche une première réponse au problème en menant l'étude dans le référentiel extérieur $\mathcal{R}_s$.

5. a) Exprimer $\overrightarrow{v_{0s}}$ en fonction de $\overrightarrow{v_0}$ et des paramètres de l'énoncé.
   b) En déduire l'expression de γ en fonction de β et α.
   c) D'autre part, montrer que le rapport $\dfrac{\sin\alpha_s}{\sin\alpha}$ peut s'écrire uniquement en fonction de γ. Donner cette expression.
6. Quelle type de trajectoire la balle suit-elle dans $\mathcal{R}_s$? Faire un schéma faisant apparaître :
   - la position initiale A, $\overrightarrow{v_{0s}}$ et α_s;
   - la trajectoire de la balle ainsi que sa position finale B (lorsque qu'elle retouche le sol);
   - l'angle $\theta = \widehat{\mathrm{AOB}}$, balayé par la balle entre son lancer et sa chute.
7. Montrer que $\theta = 2\alpha_s$.
8. En déduire que la durée Δt du mouvement, en fonction de R, α_s et v_{0s}.
9. Exprimer la différence d'angle balayé φ entre la balle et le lanceur (resté fixe au sol), pendant ce temps Δt. Montrer que:

$$\frac{\varphi}{2} = \arcsin(\gamma\sin\alpha) - \beta\gamma^2\sin\alpha = f(\alpha,\beta)$$

On donne le graphe des valeurs absolues de $f(\alpha, \beta)$:

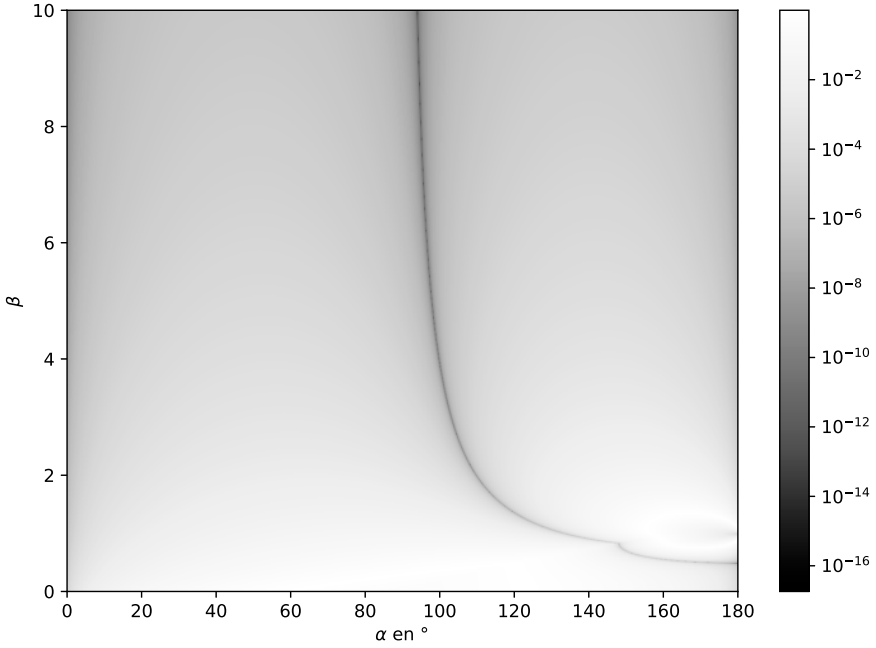


Figure 1: Graphe de $f(\alpha, \beta)$. Les valeurs de f (teintes de gris) sont données en échelle logarithmique.

10. Dans quelle plage de valeur de α le lanceur peut-il lancer sa balle, s'il veut qu'elle lui revienne directement dans les mains sans bouger ?

11. S'il lance sa balle avec un angle de 45° par rapport au sol, quelle valeur de β lui permettra de recevoir la balle sans bouger ? En déduire la vitesse avec laquelle il faut la lancer dans cette direction (vous vous servirez de l'analyse numérique effectuée en question 4). Commenter.

2.2 Dans le référentiel intérieur

On se place à présent dans le référentiel $\mathcal{R}$. Les notations n'ont pas changé.

12. Donner l'expression des pseudo-forces subies en fonction de $\overrightarrow{\omega}$, $\overrightarrow{v}$ la vitesse de la balle dans $\mathcal{R}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

13. En déduire que les équations du mouvement suivantes:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\,\dot{y} - \omega^2\,x = 0 \\ \ddot{y} + 2\omega\,\dot{x} - \omega^2\,y = -\omega^2 R \end{cases}$$

NB: On rappelle que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y} + z\,\overrightarrow{e_z}$.

Ces équations différentielles sont couplées, mais il existe une astuce pour les résoudre : on pose

$$\underline{u} = x + i(y - R)$$

14. Donner l'équation différentielle vérifiée par $\underline{u}$.

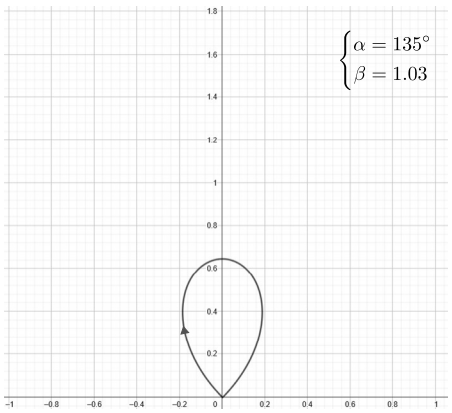
15. Résoudre cette équation et en donner la solution unique, grâce conditions initiales. On exprimera le résultat en fonction de t, ω, v_0 et α.

    NB: La forme des solutions générales est la même que pour une équation différentielle dans $\mathbb{R}$, mais les constantes d'intégration pourront être complexes.

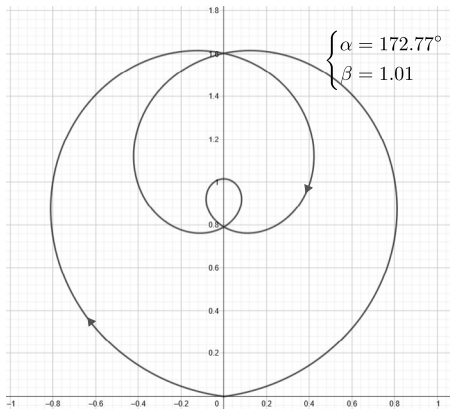
16. En déduire les expressions horaires de $x(t)$ et $y(t)$.

On représente ci-dessous deux trajectoires calculées à partir des équations précédentes, dans un repère (A, x, y). Les axes sont normalisés par rapport au rayon R.

Trajectoire 1:



Trajectoire 2:



17. Faire le lien entre la trajectoire 1 et votre réponse à la question 11.

18. Décrire la situation correspondant à la trajectoire 2, du point de vue d'un observateur en dehors de la station (référentiel $\mathcal{R}_s$). Cette trajectoire apparaît-elle en figure 1 ? Pourquoi ?

19. Au vu du résultat à la question 3, que peut-on dire du produit ωt, pour un simple lancer de quelques secondes ? En déduire que l'on peut approximer $x(t)$ ainsi :

    $$x(t) = v_0 t \cos\alpha + v_0 \omega t^2 \sin\alpha$$

    En déduire une condition sur α pour que la trajectoire soit similaire à celle d'une balle lancée sur terre.

Le mouvement stick-slip

2h

Thèmes abordés :

Frottements solides (dynamique, énergétique).

Introduction

On s'intéresse dans ce devoir au mouvement collé-glissé (*stick-slip* en anglais). Lors de ce mouvement, un objet en translation sur un support alterne les phases d'adhérence et les phases de glissement. Ce phénomène est observé notamment avec une craie et un tableau noir, quand la craie trace, sous certaines conditions, une ligne discontinue. Ce mouvement s'observe aussi lors du passage d'un archet sur des cordes de violon.

Formulaire :

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R},\ \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

1 Exemple introductif

On considère tout d'abord un bloc parallélépipédique, de masse m, pouvant se déplacer sur un support fixe horizontal. Les frottements solides entre ce bloc et le support sont caractérisés par un coefficient de frottement statique μ_s et un coefficient dynamique $\mu_d < \mu_s$.

L'étude dynamique des parties 1 et 2 sera menée dans le repère cartésien plan direct $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$, avec $\overrightarrow{e_y}$ ascendant vertical. Le bloc sera représenté comme un solide de volume non-nul mais sera traité comme un point matériel; on ne considère pas ses rotations.

Ce bloc est tiré par une force $\overrightarrow{F} = F(t)\overrightarrow{e_x}$, appliquée sur sa face droite, et dont la norme évolue linéairement avec le temps, $F(t) = \alpha t, \alpha > 0$.

1. Rappeler les lois de Coulomb du frottement solide, pour un solide en translation sur un support fixe. On fera intervenir les coefficients de frottement statique μ_s et dynamique μ_d.
2. Schématiser la situation en représentant et en listant les forces s'exerçant sur le bloc pour $t > 0$.
3. Expliquer sans calculs pourquoi, aux temps courts, le bloc reste immobile.
4. Déterminer l'expression de la réaction totale du support $\overrightarrow{R}(t)$ valable tant que le bloc est immobile.
5. En déduire la norme F_1 de la force qui met en mouvement le bloc, ainsi que l'instant T_1 auquel elle est atteinte.
6. La force appliquée reste de norme F_1 pendant une durée T_2. Exprimer $x(t)$ pour $T_1 < t \leqslant T_2$.
7. Quand le bloc a une vitesse notée v, on annule la force motrice. Par un raisonnement énergétique, déterminer la distance d parcourue par le bloc jusqu'à son arrêt, en fonction notamment de v.
8. Déterminer la norme de la force motrice nécessaire pour que le bloc soit en mouvement uniforme. Pourquoi dit-on qu'il est "plus facile" de garder un objet en mouvement que de le mettre en mouvement ?

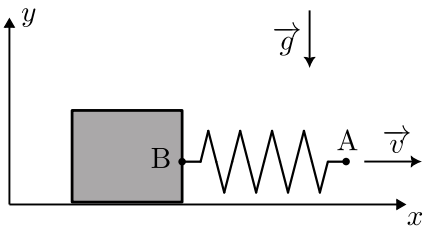
2 Le phénomène stick-slip

Le bloc est maintenant relié par un point B à un ressort dont l'autre extrémité, A, est mobile. Le ressort est linéaire, de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.

La position de la masse est repérée par $x(t) = x_B(t)$, on note $\ell(t)$ la longueur du ressort et $X(t) = \ell(t) - \ell_0$ son allongement.

Initialement, $x = 0$, le ressort n'est ni étiré ni comprimé et le bloc est immobile. Pour $t \geqslant 0$, l'extrémité A du ressort se déplace comme $x_A(t) = \ell_0 + v_0 t, v_0 > 0$. Le mouvement du bloc ne sera étudié que horizontalement.

On s'intéresse à la première phase du mouvement.



9. Exprimer la force exercée par le ressort sur la masse, en fonction de k, x, v_0, t, ℓ_0 et d'un vecteur unitaire.

10. Pour $t > 0$, l'extrémité A du ressort est mise en mouvement à vitesse constante $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{e_x}, v_0 > 0$. Déterminer la force de frottement statique $\overrightarrow{T}$ à un temps t auquel le bloc est encore immobile.

11. Déterminer l'instant T_1 de mise en mouvement de la masse, ainsi que l'allongement maximal du ressort X_m.

12. Donner l'expression de $X(t)$, pour $0 \leqslant t < T_1$.

On s'intéresse ensuite à la deuxième phase, une fois que la masse est en mouvement.

13. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ peut se mettre sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = {\omega_0}^2 v_0 t - k(x + \ell_0) - \mu_\mathrm{d} g.$$

On donnera le nom et l'expression de la grandeur ω_0.

14. On choisit une nouvelle origine des temps en $t = T_1$, soit $t = T_1 + \tau$. Justifier que $x(\tau)$ vérifie l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} + {\omega_0}^2 x = {\omega_0}^2 v_0 \tau + (\mu_\mathrm{s} - \mu_\mathrm{d})g.$$

15. Déterminer une solution particulière constante x^p de cette équation.

16. Résoudre entièrement cette équation différentielle. On pourra chercher une solution particulière du second membre comme $x(\tau) = v_0\tau + x^\mathrm{p}$.

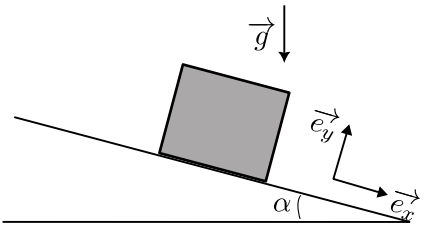
17. On note T_2 la durée de la phase de glissement. Trouver une relation entre $T_2, \omega_0, \mu_\mathrm{s}, \mu_\mathrm{d}, g$ et v_0.

18. Expliquer sans calculs le mouvement du bloc pour $t > T_1 + T_2$. Justifier l'appellation "collé-glissé".

19. On admet $T_2 \ll T_1$ et $X(\tau = T_2) = \dfrac{(2\mu_\mathrm{d} - \mu_\mathrm{s})mg}{k} > 0$. Tracer l'évolution de $X(t)$, pour $0 < t < 3T_1$ en indiquant les valeurs particulières de X. Justifier l'allure de la courbe.

3 Mesure expérimentale

On présente l'expérience suivante pour mesurer le coefficient de frottement statique μ_s entre ce même bloc et le support. Partant de l'horizontale, le support est progressivement incliné d'un angle α croissant. On note l'angle α_{lim} à partir duquel le bloc se met à glisser. Pour ces dernières questions, la base cartésienne $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ est inclinée comme le support.



20. Relier l'angle α_{lim} au coefficient μ_{lim}.

21. Déterminer la valeur de μ_s pour $m = 100$ g et $\alpha_s = 24°$. On donnera la résultat avec deux chiffres significatifs.

Devoir 3

L'effet Janssen

2h

Thèmes abordés :

Bilan des forces, frottements solides, moment dipolaire magnétique.

Introduction

On appelle milieu granulaire un milieu constitué d'un ensemble de particules solides. Un tas de sable ou un paquet de riz correspondent à des milieux granulaires que nous pouvons croiser au quotidien. Dans un tel milieu, la répartition des forces d'une particule sur ces voisines peut générer des phénomènes surprenants et innatendus. En particulier, il est arrivé qu'un silo contenant un milieu granulaire soit brisé en deux à cause des forces appliquées par les particules sur ses parois.

Le but de ce sujet est d'essayer de comprendre et d'étudier en surface ce phénomène.

1 Effet Janssen classique

1.1 Exemple introductif en 2D

On considère le cas représenté figure 1 en 2 dimensions. Trois grains de rayons R sont disposés dans un passage de largeur $4R$. On note m la masse des grains. Le grain du dessus (numéro 1) est posé parfaitement au milieu des deux autres grains (numéro 2 et 3).

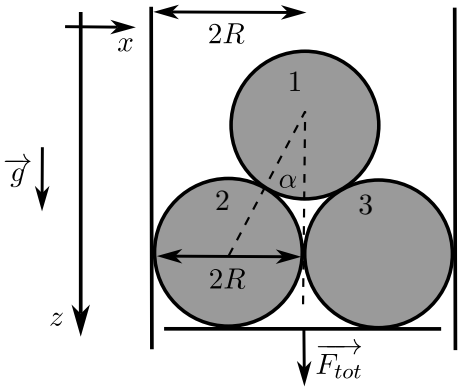


Figure 1: Schémas de trois grains de rayon R disposé dans un passage de largeur $4R$.

On notera $\overrightarrow{F_{ij}}$ la force de contact du grain i sur le grain j et on fera les hypothèses suivantes :

- Les murs formant le passage de longueur $4R$ bougent vers le haut, ce qui implique que les grains frottent contre la paroi (on considère que les grains ne tournent pas).
- Le matériau des grains et le matériau des parois sont les mêmes et on note μ le coefficient de frottements entre les grains.
- La plateau reçoit de la part des grains du bas (numéro 2 et 3) une force totale F_{tot} vers le bas (chaque grain contribue de manière équivalente). Les murs ne touchent pas ce plateau.
- Les trois grains sont à l'équilibre.
- $F_{23} = 0$.

1. Rappeler les lois de Coulomb.
2. Que peut-on dire du coefficient de frottements des grains sur les parois par rapport au coefficient de frottements entre les grains ?
3. Proposer une méthode expérimentale permettant de mesurer un coefficient de frottement entre deux matériaux.
4. Établir le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} F_{21} & = & F_{31}, \\ mg & = & 2F_{21}\cos\alpha. \end{array} \right. \tag{1}$$

5. Établir ensuite l'égalité suivante :

$$\frac{1}{2}F_{tot} = mg + F_{12}(\cos\alpha - \mu\sin\alpha). \tag{2}$$

6. En déduire que
$$F_{tot} = mg(3 - \mu \tan \alpha). \tag{3}$$

7. Donner la valeur de l'angle α représenté sur la figure 1.

8. Déterminer la masse apparente m_a ressentie par le plateau définie par $F_{tot} = m_a g$ et la comparer à la masse totale de grains dans la colonne. Comment expliquer ce phénomène ?

1.2 Effet Janssen 3D

On cherche à généraliser l'étude faite dans la partie précédente à un cas 3D avec une nombre illimité de grains. On considère donc une colonne de grains circulaires de rayon R dans un tuyau cylindrique de rayon R' (voir figure 2). On note ϕ la proportion d'espace occupée par les grains. La masse volumique du milieu vaut donc $\rho = \phi\rho_g + (1 - \phi)\rho_{air}$ où ρ_g est la masse volumique des grains et ρ_{air} la masse volumique de l'air. On s'intéresse à une couche de grains entre z et $z + \mathrm{d}z$:

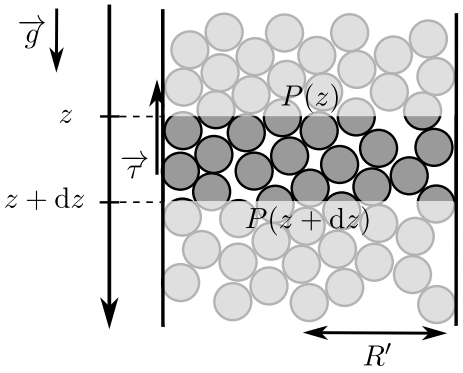


Figure 2: Schémas d'une colonne de grains dans un cylindre de rayon R'.

On fait les hypothèses suivantes :

- Les grandeurs du problème ne dépendent que de z.
- Au niveau des parois, il existe une pression lié aux frottements qui vaut $\tau(z) = \mu P(z)$ où $P(z)$ est la pression à l'altitude z, exercé par les grains sur la paroi du cylindre.
- Le milieu est à l'équilibre.

9. Justifier que la masse volumique de la couche entre z et $z+\mathrm{d}z$ vaut $\rho \approx \phi\rho_g$.

10. À l'aide d'un bilan de forces sur la couche de grains comprise entre z et $z + \mathrm{d}z$ montrer que
$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{2\mu}{R'} P(z) + \rho_g \phi g = 0 \tag{4}$$

11. Montrer qu'une longueur caractéristique λ apparait dans cette équation et donner son expression. Que vaut cette longueur pour $R' = 10$ mm et $\mu = 0.5$?

12. En prenant l'origine au niveau de la surface des grains, montrer que la pression en fonction de z vaut

$$P(z) = P_0 \left(1 - e^{-z/\lambda}\right) \tag{5}$$

en précisant l'expression de P_0 en fonction de ρ_g, ϕ, g, R' et μ. Vérifier que l'expression trouvée de P_0 est bien homogène à une pression.

13. Donner la masse de grains $m(z)$ contenu dans une hauteur z.

14. En déduire que la masse mesurée en bas d'une colonne de grains de hauteur z contenant une masse m de grains vaut

$$m_{mes} = m_0 \left(1 - e^{-m/m_0}\right) \tag{6}$$

où l'expression de m_0 est $m_0 = \dfrac{\phi \rho_g \pi R'^3}{2\mu}$.

15. En déduire que la masse apparente d'une colonne de grains est majorée.

16. La figure 3 représente la masse apparente d'une colonne de grains en fonction de la masse réellement introduite dans celle-ci. En déduire la valeur de la masse volumique de grains pour $\phi = 0.78$.

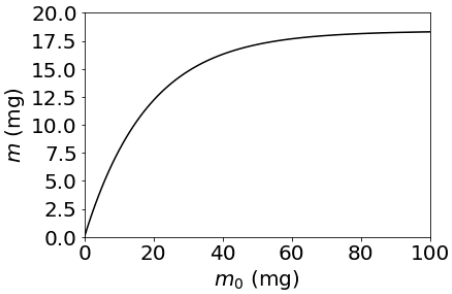


Figure 3: Évolution de la masse apparente de la colonne de grains en fonction de la masse de grains introduite.

2 Effet Janssen magnétique

On considère maintenant que les grains sont ferromagnétiques et plongés dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ orienté vers le haut. Ils acquièrent alors

tous un moment magnétique $\overrightarrow{m} \propto \overrightarrow{B}$. On note $D = 2R$ le diamètre des grains.
On considère uniquement 2 grains collés l'un à l'autre (voir figure 4). On note θ l'angle le moment magnétique et la droite entre les deux grains. La force magnétique d'un dipole magnétique sur un autre vaut

$$\overrightarrow{F} = \frac{3\mu_0}{4\pi r^5}\left[2(\overrightarrow{m}.\overrightarrow{r})\overrightarrow{m} + (\overrightarrow{m}.\overrightarrow{m})\overrightarrow{r} - 5\frac{(\overrightarrow{m}.\overrightarrow{r})^2}{r^2}\overrightarrow{r}\right] \tag{7}$$

où r est la distance entre les deux grains et $\overrightarrow{r}$ est le vecteur qui part du grain qui applique la force magnétique et qui va vers celui qui la subit.

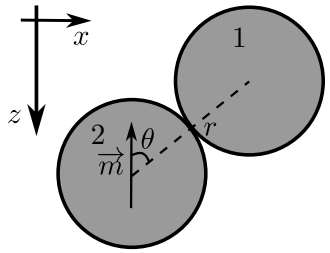


Figure 4: Schéma de geux grains aimantés en contact.

17. Montrer que la force du grain 2 sur le grain 1, projetée selon les axes $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_z}$ donne

$$\begin{cases} F_x &= \dfrac{3\mu_0}{4\pi D^4} m^2 \sin\theta \left(1 - 5\cos^2\theta\right), \\ F_z &= \dfrac{3\mu_0}{4\pi D^4} m^2 \cos\theta \left(5\cos^2\theta - 3\right). \end{cases} \tag{8}$$

18. Montrer que deux grains alignés verticalement s'attirent.

19. Montrer que deux grains alignés horizontalement se repoussent.

On se replace maintenant dans le cas de la première partie où 3 grains sont disposés dans un passage de largeur $2R$. Ils ont maintenant un moment magnétique $\overrightarrow{m}$. On note F_{mij} la norme de la force magnétique du grain i sur le grain j respectivement selon x et z.

20. Montrer que la force magnétique du grain 2 sur le grain 1 s'écrit

$$\begin{cases} F_{m21,x} &= \beta F_{m0} \sin\alpha, \\ F_{m21,z} &= \gamma F_{m0} \cos\alpha, \end{cases} \tag{9}$$

avec $\beta = -\dfrac{11}{4}$, $\gamma = \dfrac{3}{4}$ et $F_{m0} = m^2 \dfrac{3\mu_0}{4\pi D^5}$.

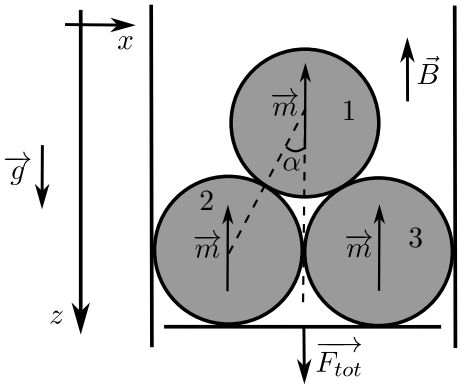


Figure 5: Schémas de trois grains aimantés de rayon R disposé dans un passagede largeur $4R$.

21. Montrer que la force magnétique du grain 3 sur le grain 2 s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{lcl} F_{m32,x} & = & -F_{m0} \\ F_{m32,z} & = & 0. \end{array} \right. \tag{10}$$

22. Obtenir le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} F_{21} & = & F_{31}, \\ mg & = & 2(F_{21} - \gamma F_{m0}) \cos\alpha. \end{array} \right. \tag{11}$$

23. Montrer que la réaction normale du mur sur le grain 2 vaut

$$R_N = F_{m0}(1 + \beta \sin\alpha) + F_{21} \sin\alpha. \tag{12}$$

24. En déduire que

$$\frac{F_{tot}}{2} = mg(3 - \mu \tan\alpha) - F_{m_0}\mu(1 + (\beta + \gamma)\sin\alpha). \tag{13}$$

25. La masse apparente mesurée est-elle plus faible avec ou sans le caractère magnétique des grains ?

Devoir 4

Filtre à quartz

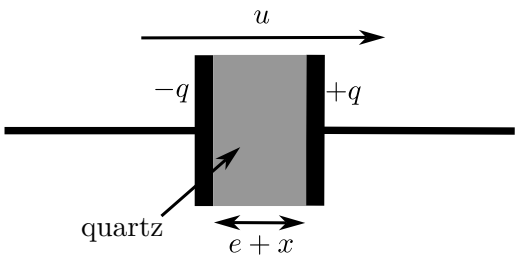
2h

Thèmes abordés :

Analogie électro-mécanique, traitement du signal, filtre analogique et filtre numérique.

1 Quartz et analogie électro-mécanique

On considère un cristal de quartz, d'épaisseur e au repos, que l'on met en contact avec deux électrodes. Le quartz étant un matériau piézoélectrique, la variation de son épaisseur, que l'on note x, implique une variation de la tension u à ses bornes ainsi qu'à l'apparition d'une charge $\pm q$ au niveau des électrodes.



On peut montrer que x et u sont reliés par le système

$$\begin{cases} \dfrac{q}{C} + \alpha x = u \\ m\ddot{x} + \delta\dot{x} + kx + \alpha q = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où on note $\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et les constantes C, δ, α, k et m sont positives. On suppose que la vitesse du quartz est nulle à l'instant initial.

1. Proposer une interprétation des constantes m, δ et k.

2. Donner l'équation différentielle vérifiée par x en fonction de u.

3. Dans cette question, on considère $u = 0$. Quelle(s) condition(s) doi(ven)t vérifier les différentes constantes du problème pour que le système soit stable ?

4. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $v = \dot{x}$ en fonction de u.

5. Montrer que cette équation différentielle se réécrit

$$\ddot{v} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{v} + \omega_0^2 v = -\frac{C\alpha}{m}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

en précisant l'expression de ω_0 et de Q.

6. Le cristal est initialement au repos. On applique un échelon de tension au quartz, c'est-à-dire

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \mathrm{t} < 0, \\ E & \text{si} \quad \mathrm{t} \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

Montrer que, pour $Q > 1/2$,

$$v(t) = Ae^{-t/\tau}\sin(\omega_0' t) \tag{4}$$

et donner les expression de τ et ω_0' en fonction de Q et ω_0. On ne cherchera pas à exprimer la constante A.

On considère à présent le cas où l'on soumet le quartz à une tension sinusoïdale de pulsation ω. On note j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$. On note $\underline{u} = U_0 e^{j\omega t+\varphi}$ la grandeur complexe associée à $u(t)$. On définit le courant $\underline{i}$ en convention récepteur et on définit l'impédance complexe du dipôle obtenu par

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$

7. Donner la relation entre $\underline{q}$, ω et $\underline{\mathrm{i}}$.

8. Donner l'expression de $\dfrac{1}{\underline{Z}}$ en fonction des constantes ω, k, α, m, δ et C.

9. En déduire que

$$\underline{Z} = \frac{k - \alpha^2 C}{j\omega C k} \times \frac{1 + j\omega\dfrac{\delta}{k - \alpha^2 C} - \dfrac{m}{k - \alpha^2 C}\omega^2}{1 + j\omega\dfrac{\delta}{k} - \dfrac{m}{k}\omega^2} \tag{5}$$

On souhaite maintenant obtenir un équivalent électrocinétique au système mécanique étudié plus haut. On considère le circuit suivant dont on note $\underline{Z_e}$ l'impédance :

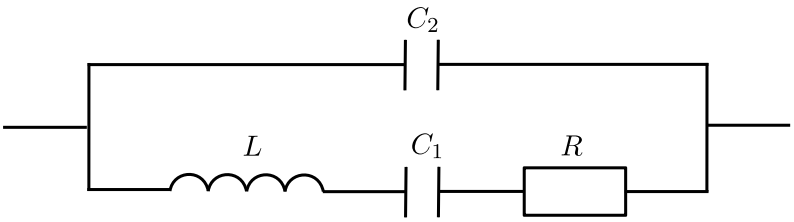


Figure 1: Schéma électrocinétique analogue au modèle mécanique du quartz.

10. Donner l'expression de $\dfrac{1}{\underline{Z_e}}$ en fonction de R, C_1, C_2 et L.
11. En déduire les valeurs de R, C_1, C_2 et L en fonction de celles de $k,\ \alpha,\ m,\ \delta$ et C.
12. Pour un quartz, $Q \gg 1$. On se place donc dans la limite $R = 0$. Montrer que l'impédance $\underline{Z_e}$ s'écrit alors

$$\underline{Z_e} = \frac{1}{j(C_1 + C_2)\omega} \times \frac{1 - \omega^2/\omega_1^2}{1 - \omega^2/\omega_2^2} \tag{6}$$

où l'on donnera l'expression de ω_1 et ω_2 en fonction de $L,\ C_1$ et C_2.

En traçant le module de l'impédance en donction de la pulsation ω on obtient la courbe suivante.

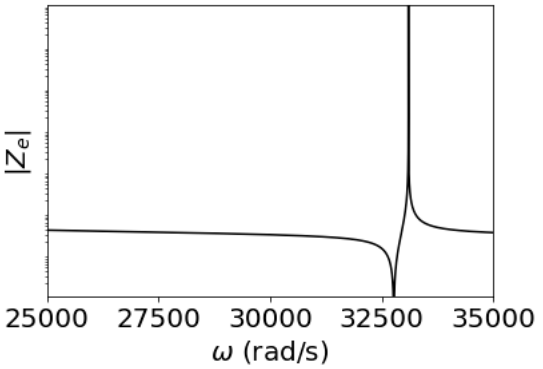


Figure 2: $|Z_e|$ en fonction de ω.

13. En déduire les valeurs de ω_1 et ω_2. Vérifier que l'on a bien $\dfrac{1}{Q} = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \ll 1$. Donner les valeurs de C_1 et C_2 sachant que $L = 10^5$ H.

14. Dans les limites $\omega \ll \omega_1$ et $\omega \gg \omega_1$, à quel type de filtre équivaut le filtre à quartz ?

2 Étude expérimental du filtre à quartz

2.1 Observation expérimentale du filtre

On peut montrer théoriquement que si $u(t)$ est une impulsion de tension

$$u(t) = \begin{cases} +\infty \text{ si } t = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{7}$$

alors le spectre du signal de $i(t)$ correspond à l'impédance $|\underline{Z_e}|$.

15. Proposer une manière d'approcher expérimentalement la condition

$$u(t) = \begin{cases} +\infty \text{ si } t = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{8}$$

16. On récupère numériquement le signal $i(t)$ dans le but d'observer la résonance et l'anti-résonance du spectre montré sur la figure 2. Comment doit-on choisir la fréquence d'échantillonage pour atteindre notre objectif ?

17. On suppose que la condition ci-dessus est respectée. À quoi ressemble alors le spectre du signal $i(t)$ obtenu numériquement ?

2.2 Utilisation du filtre

On envoie sur le filtre à quart les signaux suivants :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u_{10}\cos(\omega_1 t) + u_{11}\cos(\omega_2 t) \\ u_2(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} u_{2k}\cos\left(k\frac{\omega_2}{3}t\right) \end{aligned} \tag{9}$$

18. Déterminer qualitativement l'allure signal $i(t)$ en précisant votre raisonnement.

2.3 Simulation numérique du filtre

On considère un signal analogique $s(t)$ infiniment dérivable.

19. Dans le cas où s est un signal discétisé $\{s_n\}_{1\leq n\leq N}$ à intervales régulier T_e, réécrire l'expression de la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.

20. En déduire l'expression de la dérivée seconde $\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$ discrétisée.

21. Montrer que si l'on passe en complexe, on a l'équivalence suivante entre l'écriture en complexe et l'écriture discrétisée

$$j\omega s \leftrightarrow \frac{s_n - s_{n-1}}{T_e} \quad \text{et} \quad -\omega^2 \mathrm{s} \leftrightarrow \frac{\mathrm{s_n} + \mathrm{s_{n-2}} - 2\mathrm{s_{n-1}}}{\mathrm{T_e^2}}. \tag{10}$$

On note $\{u_n\}_{1\leq n\leq N}$ la tension discrétisée aux bornes du Quartz et $\{i_n\}_{1\leq n\leq N}$ le courant discrétisé qui le traverse.

22. Donner le lien entre $u_n, u_{n-1}, u_{n-2}, u_{n-3}$ et i_n, i_{n-1}, i_{n-2} en faisant apparaitre C_1, C_2, R et L.

23. En déduire un moyen de simuler numériquement le comportement du filtre à quartz.

Extension spatiale de fentes interférométriques

2h

Thèmes abordés :

Optique scalaire, interféromètre à division du front d'onde, intensité lumineuse, diffraction.

Formulaire de trigonométrie

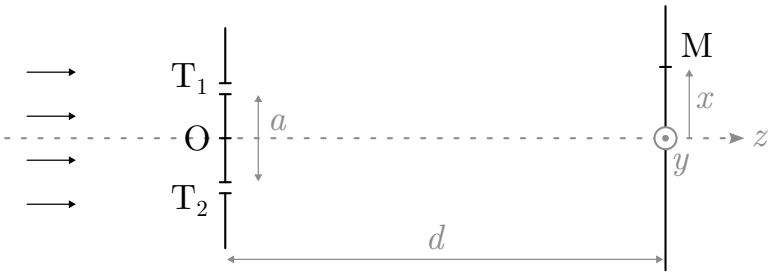
Pour vous aider dans les questions de ce problème, vous pourrez être amené · e à utiliser certaines des relations suivantes. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2x)\right)$$
$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

1 Cas de trous infiniment fins

1.1 Interféromètre à fentes d'Young

Un laser envoie une onde plane progressive harmonique (longueur d'onde λ) en incidence normale sur un obstacle dans lequel deux trous (assimilés à des points S_1 et S_2) ont été percés avec une distance a les séparant. On place un écran à une distance d selon l'axe de propagation de l'onde (Oz), où O est le milieu du segment T_1T_2. On considèrera un point M mobile sur l'écran, dont on repérera la position par les coordonnées $(x, y, z = d)$.



La distance d est très grande devant toutes les autres longueurs du problème (longueur d'onde, taille de l'objet, taille de l'écran). On note également $\frac{I_0}{2}$ l'intensité lumineuse émise par chaque trou.

1. Définir et exprimer la différence de marche δ de l'onde au point M, en fonction des paramètres de l'énoncé et des coordonnées x, y, dans le cadre de l'hypothèse précédemment explicitée.

2. Exprimer l'intensité lumineuse $I(x, y)$ sur l'écran. Décrire en une phrase ce que l'on observe concrètement.

3. Définir l'interfrange i et donner son expression en fonction des distances de l'énoncé.

4. Que se passe-t-il si l'on déplace les trous dans la direction (Oy) ? En déduire l'intérêt d'utiliser des fentes, plutôt que des trous.

1.2 Réseau interférométrique

On généralise la précédente situation en augmentant le nombre N de trous (notés T_1, T_2, ..., T_N). Le paramètre a désigne alors la distance entre deux trous successifs. Les notations des grandeurs caractéristiques et les hypothèses associées restent identiques. En particulier on a toujours $d \gg \lambda, a, x, y$.

I_0 désigne toujours l'intensité lumineuse totale passant les fentes (donc chaque fente laisse passer $\frac{I_0}{N}$).

5. Montrer avec des arguments géométriques qu'en un point $M = (x, y, d)$ de l'écran, on peut observer des interférences purement constructives si et seulement si
$$x = p\frac{\lambda d}{a} \qquad \text{avec} \quad p \in \mathbb{Z}$$

On cherche à présent à calculer l'expression exacte de l'intensité lumineuse sur l'écran. Pour cela, notons $\underline{s_n}$, l'amplitude complexe du signal reçue en M, par l'onde ayant traversé le trou $\mathrm{T_n}$.

6. Montrer que
$$\underline{s_{n+1}} = \underline{s_n}\, e^{2\pi j \frac{ax}{\lambda d}}$$

Pour simplifier les notations, posons $\varphi = \pi \dfrac{ax}{\lambda d}$.

7. En déduire que l'amplitude totale reçue en M est
$$\underline{s} = \underline{s_1} e^{j(N-1)\varphi}\, \frac{\sin(N\varphi)}{\sin\varphi}$$

8. Montrer que pour un signal sinusoïdal $s = \mathrm{Re}\ \underline{s}$, l'intensité lumineuse peut se calculer comme
$$I \underset{\substack{\uparrow \\ \text{définition}}}{=} \langle s^2 \rangle = \frac{1}{2} \underline{s}\, \underline{s}^*$$

9. En déduire l'expression de $I(x)$ en fonction de I_0, a, λ, d et x. Tracer l'allure de cette fonction pour $N = 2$, $N = 3$ et $N = 8$.

2 Cas des fentes étendues

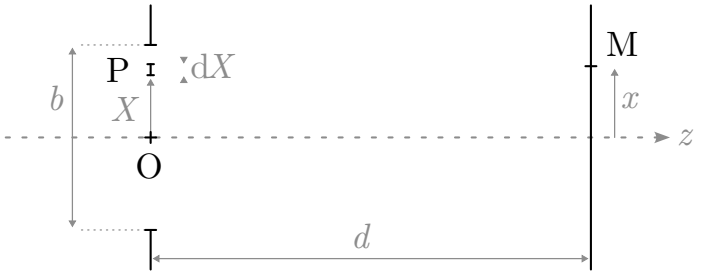
2.1 Fente simple

On souhaite à présent étudier la figure formée par une fente simple de largeur b (centrée en O), à la place des trous. Lorsque l'on éclaire un tel objet avec un laser monochromatique tel que $\lambda \sim b$, il apparaît la figure suivante sur l'écran :



10. Nommer le phénomène à l'œuvre ici. Rappeler la taille de la tâche centrale sur l'écran en fonction de b, λ et d.

Pour comprendre le problème, on reprend le raisonnement établi pour les réseaux : on modélise la fente par plusieurs tronçons de taille infinitésimale $\mathrm{d}X$. La fente est en fait un trou ponctuel élargi dans la direction $(\mathrm{O}X)$. On repère un point P de la source par les coordonnées $(X, 0, 0)$.



Pour simplifier nos calculs, on considère un point $\mathrm{M} = (x, 0, d)$ de l'écran, mobile uniquement selon l'axe $(\mathrm{O}x)$ (bloqué en $y = 0$). On modélise chacun des tronçons par une source ponctuelle sphérique d'amplitude réelle infinitésimale $\mathrm{d}s_0 = A\,\mathrm{d}X$. On pourra poser les grandeurs suivantes pour alléger les notations:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad ; \quad \omega = kc$$

Où c est la vitesse de la lumière dans l'air. On considère toujours que l'écran est situé loin de la source, en particulier que $d \gg X$.

11. Définir le signal complexe total $\underline{s_0}$ traversant la fente (en $z = 0$) à l'aide d'une intégrale. En déduire que l'intensité qui passe la fente s'exprime ainsi :
$$I_0 = \frac{1}{2}(Ab)^2$$

12. Exprimer la distance PM entre un point $\mathrm{P} = (X, 0, 0)$ de la source et un point $\mathrm{M} = (x, 0, d)$ de l'écran. Développer cette expression à l'ordre le plus bas, faisant apparaître la dépendance en X.

13. Montrer que le signal complexe de l'onde émise en P et reçue en M peut s'écrire
$$\mathrm{d}\underline{s} = A\,e^{j\left(\omega t - kd - \frac{kx^2}{2d} - \frac{kxX}{d}\right)}\,\mathrm{d}X$$

14. Définir et calculer $\underline{s}(t, x)$, le signal total reçu en M, en fonction des constantes de l'énoncé. La mettre sous la forme
$$\underline{s}(t, x) = Ab\,\mathrm{sinc}\left(2\pi\frac{bx}{\lambda d}\right)\,e^{j\varphi(t,x)}$$
Avec $\mathrm{sinc} : u \longrightarrow \dfrac{\sin u}{u}$ la fonction sinus cardinal, et $\varphi(t, x)$ à exprimer.

15. En déduire l'expression de $I(x)$ en fonction de b, λ, d et I_0.

16. Dessiner schématiquement la forme de $I(x)$. Faire le lien avec la question 10.

2.2 Fentes d'Young étendues

On tente à présent de considérer l'extension spatiale des fentes d'Young étudiées en partie 1.1. On considérera des fentes de largeur b, centrées en T_1 et T_2, deux points distants d'une longueur a.

17. En reprenant un calcul similaire à celui développé en partie 2.1, montrer que l'intensité lumineuse en $M = (x, 0, d)$ s'écrit:

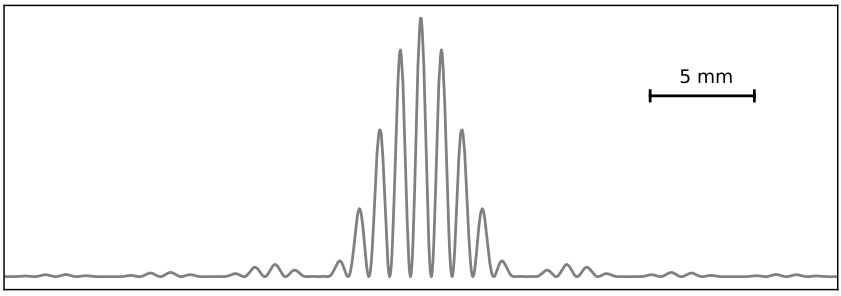
$$I(x) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \frac{kxb}{2d} \left(1 + \cos \frac{kxa}{d}\right)$$

Où I_0 est l'intensité totale traversant les deux fentes.

18. Mettre en évidence deux termes : l'un caractéristique de la présence des deux trous, l'autre traduisant leur extension spatiale. Commenter leurs expressions mathématiques, au regard des réponses aux parties précédentes.

19. On mène l'expérience et on obtient le résultat ci-dessous :





Donner les valeurs de a et b, sachant que l'on utilise un laser de longueur d'onde $\lambda = 500\,\text{nm}$ et que l'écran est situé à exactement $d = 1.00\,\text{m}$ des fentes.

Détermination de l'épaisseur d'une bulle

2h

Thèmes abordés :

Ondes électromagnétiques, optique scalaire, interféromètre à division d'amplitude.

Introduction

Une goutte est constituée d'une fine couche de liquide (contenant souvent du surfactant) emprisonnant de l'air. Lorsque l'on regarde une goutte, on peut observer diverses couleurs témoignant d'un phénomène d'interférences lumineuses. Nous allons voir comment nous pouvons exploiter ceci afin de déterminer l'épaisseur de la goutte.
Quelques rappels sont donnés à la fin de l'énoncé.

1 Propagation d'une onde électromagnétique dans l'eau

On considère que l'eau est un milieu diélectrique linéaire et homogène, c'est-à-dire que les moments dipolaires de l'eau répondent au champ électrique extérieur selon la relation

$$\overrightarrow{P} = \epsilon_0 \chi \overrightarrow{E} \tag{1}$$