

Mathématiques pour la modélisation

Roger Lewandowski
Professeur à l'Université de Rennes

DUNOD

Illustration de couverture : ©-izabell-istockphoto.com

© Dunod, 2025
11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-088243-4

Avant-propos

Ce livre a été écrit sur la base d'un cours de Master 1 que je donne à l'Université de Rennes depuis septembre 2023 dans le master « Calcul scientifique et modélisation » (master CSM) de l'UFR de Mathématiques, dans la nouvelle maquette de la formation et qui n'existait pas avant en tant que tel. Il a pour objectifs de consolider les connaissances des étudiant.e.s sur des notions apprises en licence, comme l'algèbre linéaire, et de leur apporter les outils mathématiques indispensables à la modélisation à partir des lois de la nature, et au calcul scientifique pour la création et l'utilisation de codes numériques.

Le point de départ est le programme initial de ce cours de M1, initialement nommé « Analyse pour la modélisation », qui a évolué pour devenir « Mathématiques pour la modélisation ». Cela en fait un ensemble original et transverse qui peut sembler éclectique au premier abord, en mettant bout à bout des notions d'algèbre, de géométrie et d'analyse fonctionnelle, généralement enseignées séparément à des niveaux différents.

Ce processus s'est fait d'une part en fonction de 40 années d'expérience d'enseignement à l'Université à tous les niveaux, et de l'évolution du profil des étudiant.e.s au fil du temps, et d'autre part pour compléter ce qui devait l'être pour créer une unité autonome, afin de rester en harmonie avec les progrès de la recherche mathématique, en adossant l'enseignement à la recherche, qui est le propre de la mission universitaire.

Cette extension du programme initial, fait que ce livre, initialement destiné à des étudiant.e.s de M1 CSM, pourra servir également aux étudiant.e.s de magistère, à celles et ceux qui préparent l'agrégation de mathématiques, aux étudiant.e.s en école d'ingénieur. J'espère aussi qu'il pourra être un matériel utile à mes collègues enseignant.e.s et enseignant.e.s-chercheur.e.s pour la préparation de leurs enseignements et de leurs TD sur les thèmes qui y sont abordés. La fin du livre, d'un niveau plus avancé, a été pensée comme une jonction entre le master 1 et le master 2.

Ayant été formé dans l'école de mathématiques appliquées et de calcul

intensif de Jacques-Louis Lions, un grand maître sous la direction de qui j'ai travaillé dans mes jeunes années, j'ai tenté de garder l'unité de notre école, tant dans le système de présentation et de notations que dans la manière d'aborder les sujets. C'est ce vers quoi j'espère accompagner les lectrices et les lecteurs tout au long de ce manuel. Enfin, j'ai une pensée particulière pour Haïm Brézis, qui fut mon directeur de thèse et qui nous a quittés il y a peu. C'était un grand maître et il m'a énormément influencé sur le plan mathématique.

Je remercie mes collègues du Master CSM de l'UFR de mathématiques de l'Université de Rennes, pour leur amitié, leur compétence et leur soutien constant : Geoffrey Beck, Benjamin Boutin, Loïc Le Marrec, Fabrice Mahé, et en particulier Éric Darrigrand, Julien Mathiaud et Lalao Rakotomanana Ravelonarivo qui ont relu avec attention des passages de ce livre. Je remercie également mes autres collègues du pôle analyse de l'UFR, Zied Ammari, Christophe Cheverry, L. Miguel Rodrigues, San Vũ Ngọc pour nos interactions multiples et leur amitié, et je n'oublie pas Jean-Marie Lion.

Je remercie mes doctorants talentueux François Legeais et Guillaume Le-loup pour leur confiance et la motivation qu'ils m'ont apporté.

Je salue l'assistance constante et attentive de nos gestionnaires administratives, que je remercie sincèrement : Véronique Le Goff, Annie Quemere, Marie-Aude Verger.

Merci à l'Institut de Recherches Mathématiques de Rennes (IRMAR) et son directeur Mihai Gradinaru, à l'UFR de mathématiques et son directeur Karel Pravda-Starov, à l'INRIA Rennes et l'équipe ODYSSEY dirigée par Étienne Mémin, pour leur soutien et leur confiance indéfectible.

Je remercie la SMAI, Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles, en particulier la vice-présidente éditions Amandine Véber, qui n'est pas étrangère quelque part à ce projet de livre. Je remercie également Vanessa Beunèche et El Haj Laamri pour leur lecture attentive de mon manuscrit, et Laetitia Jammet des éditions Dunod pour son accompagnement tout au long de l'écriture de ce livre.

Je remercie Frédéric Hecht et Olivier Pironneau, les créateurs du logiciel de simulation FreeFem++, à qui je dois beaucoup, ainsi que Chérif Amrouche et François Murat. Je remercie également Hervé Le Dret pour son aide constante et efficace dans les débogages du code Latex de ce livre, et les relectures de certains passages.

Enfin rien ne serait possible sans mes enfants Noé, Yann, Sarah et Marie !

Roger Lewandowski,
Professeur des Universités.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Espaces vectoriels et applications linéaires	7
1.1 Axiomes généraux	8
1.1.1 Définition	8
1.1.2 Sous-espaces vectoriels	11
1.2 Dimension finie et bases	12
1.2.1 Familles libres et familles génératrices	12
1.2.2 Bases et dimension	13
1.2.3 Théorème de la dimension	15
1.2.4 Changement de base et matrice de passage	19
1.3 Base incomplète et espaces supplémentaires	20
1.3.1 Énoncé et démonstration	20
1.3.2 Sous-espaces et sommes directes	21
1.4 Applications linéaires	23
1.4.1 Définitions, noyau, image et théorème du rang	24
1.4.2 Injection, surjection, isomorphisme	26
1.5 Espaces quotients	27
1.5.1 Définition et structure	27
1.5.2 Principaux résultats	29
1.6 Matrice d'une application linéaire	31
1.6.1 Matrices : produits, polynômes, calculs par blocs	32
1.6.2 Changement de base	35
1.6.3 Rang d'une matrice	36
1.6.4 Trace d'une matrice	38
2 Géométrie du plan et de l'espace	39
2.1 Espaces affines	40
2.1.1 Points et vecteurs	40
2.1.2 Définition d'un espace affine	41
2.1.3 Droites dans le plan	43

2.1.4	Plans et droites dans l'espace	44
2.2	Espace dual et produit scalaire dans le plan	45
2.2.1	Dualité	45
2.2.2	Produit scalaire	47
2.2.3	Orthogonalité et projection orthogonale 2D	48
2.2.4	Norme euclidienne et inégalité de Cauchy-Schwarz	50
2.3	Déterminants en dimension 2	52
2.3.1	Surfaces et forme aire	52
2.3.2	Déterminant d'un endomorphisme sur $\mathbb{R}^2$	54
2.3.3	Déterminant de matrices 2×2	56
2.4	Cas de l'espace	58
2.4.1	Produit scalaire et dualité	58
2.4.2	Forme volume et construction du produit vectoriel	59
2.4.3	Composantes du produit vectoriel	63
2.4.4	Propriétés du produit vectoriel	65
2.4.5	Tenseur de Levi-Civita	68
2.4.6	Projection orthogonale sur un plan	69
2.5	Déterminants dans $\mathbb{R}^3$	70
2.5.1	Déterminant de vecteurs	70
2.5.2	Formes trilinéaires alternées et déterminants	72
2.5.3	Déterminant d'un endomorphisme sur $\mathbb{R}^3$	73
2.5.4	Déterminant d'une matrice 3×3	75
3	Géométrie dans $\mathbb{R}^n$	77
3.1	Dualité en dimension finie	78
3.1.1	Produit scalaire et dual	78
3.1.2	Normes	79
3.1.3	Norme d'opérateurs linéaires	83
3.1.4	Opérateur adjoint	86
3.1.5	Transposition des matrices	88
3.2	Orthogonalité	89
3.2.1	Supplémentaire et projection orthogonale	89
3.2.2	Bases orthonormées et algorithme de Gram-Schmidt	91
3.2.3	Projection orthogonale dans les espaces affines	94
3.2.4	Lax-Milgram, saison 1	98
3.3	Déterminants	101
3.3.1	Formes multilinéaires	101
3.3.2	Forme volume en dimension n	103
3.3.3	Propriétés du déterminant	104
3.4	Décomposition spectrale	108
3.4.1	Valeurs propres et polynôme caractéristique	108

3.4.2	Trigonalisation	111
3.4.3	Trace et déterminant	113
3.4.4	Théorème de Cayley-Hamilton	114
3.4.5	Diagonalisation des matrices symétriques	117
4	De Euclide à Hilbert	119
4.1	Formes quadratiques	120
4.1.1	Définitions générales	120
4.1.2	Bases orthogonales et théorème d'inertie	122
4.2	Espaces pré-hilbertiens et hilbertiens	126
4.2.1	Introduction et espaces complets	126
4.2.2	Projection sur un sous-espace fermé	130
4.2.3	Inégalité de Parseval-Bessel et sommes hilbertiennes	132
4.3	Le dual topologique	135
4.3.1	Formes linéaires continues	136
4.3.2	Théorème de Riesz	138
4.4	L'espace $\ell^2(\mathbb{R})$, Fourier et $h^s(\mathbb{R})$	141
4.4.1	Définition	141
4.4.2	Polynômes trigonométriques et séries de Fourier	143
4.4.3	Espace $h^s(\mathbb{R})$	145
4.5	Lax-Milgram : saison 2	146
4.5.1	Convergence faible	147
4.5.2	Énoncé et démonstration du théorème de Lax-Milgram	150
5	Intégrales sur des courbes et des surfaces	157
5.1	Intégrale sur un segment	158
5.1.1	Représentation cartésienne	158
5.1.2	Représentation paramétrique	160
5.2	Intégrale sur une courbe cartésienne	161
5.3	Courbes paramétrées	166
5.3.1	Introduction générale	166
5.3.2	Vecteur vitesse et tangente	167
5.3.3	Longueur de l'arc et intégrale curviligne	169
5.3.4	Paramétrisation en polaire	172
5.4	Formes différentielles de degré 1	173
5.4.1	Formes différentielles, gradient, jacobienne	174
5.4.2	Intégration des formes différentielles	177
5.4.3	Formule de Green-Ostrogradski, saison 1	178
5.5	Intégrales sur des surfaces	181
5.5.1	Généralités	181
5.5.2	Paramétrisations et plan tangents	182

5.5.3	Aire et Intégrales	185
5.5.4	Formule de Green-Ostrogradski : saison 2	188
6	Équations aux dérivées partielles	191
6.1	Kit de survie dans les espaces	192
6.1.1	Espaces de Lebesgue	193
6.1.2	Espace des distributions	197
6.1.3	Espaces de Sobolev	201
6.2	Vorticité, courants, potentiels	205
6.2.1	Rotationnel	205
6.2.2	Fonction de courant	206
6.2.3	Champs irrotationnels	208
6.3	EDP de base et solutions fondamentales	209
6.3.1	Conservations de la masse et équation de transport . . .	209
6.3.2	Équation de Laplace-Poisson	211
6.3.3	L'équation de la chaleur : saison 1	216
6.3.4	L'équation des ondes	220
6.4	Problèmes aux limites	222
6.4.1	Problème de Dirichlet	223
6.4.2	Problème de Neumann	224
6.4.3	L'équation de la chaleur : saison 2	226
7	Exercices	239
7.1	Espaces vectoriels et application linéaires	239
7.2	Géométrie du plan et de l'espace	250
7.3	Géométrie dans $\mathbb{R}^n$	258
7.4	De Euclide à Hilbert	266
7.5	Intégrales sur des courbes et des surfaces	277
7.6	Équations aux dérivées partielles	291

Introduction générale

La modélisation est l'art de transformer un problème réel, qu'il soit climatique, environnemental, physique, mécanique, chimique, etc., en un problème abstrait de mathématiques. C'est la capacité à déterminer si ce problème admet des solutions, et si oui, dans quel sens. C'est aussi le transformer en un algorithme numérique pour écrire un code de résolution sur ordinateur, comparer les résultats obtenus avec les données expérimentales du problème d'origine, et boucler la boucle.

Le but de cet ouvrage est de proposer aux lectrices et aux lecteurs les outils mathématiques de base pour comprendre et utiliser les techniques de modélisation, avec pour objectifs le théorème de Lax-Milgram, les formules de Green-Ostrogradski et de Stokes, et une initiation à l'analyse des trois phénomènes fondamentaux de la nature : elliptiques, hyperboliques et paraboliques. Ces phénomènes sont régis par un certain nombre de fonctions, scalaires ou vectorielles, également appelées champs. Ces champs satisfont des équations aux dérivées partielles impliquant les opérateurs divergence, rotationnel et Laplacien.

Pour atteindre ces objectifs, nous devons d'abord poser les bases de notre univers mathématique et ses dimensions. Nous considérons dans cet ouvrage trois niveaux de dimensions :

1. Le plan de dimension 2, l'espace de dimension 3, et l'espace-temps associé : c'est là que sont écrites les équations de la nature, au moins à nos échelles.
2. La dimension n quelconque, où n peut devenir grand. C'est là que s'écrivent les algorithmes d'approximation numérique des équations, où, d'une manière générale, à la fin, on doit résoudre un système linéaire $Ax = b$, ou bien une équation différentielle linéaire,

$$G'(t) = AG(t) + B(t).$$

3. La dimension infinie, qui permet de définir les espaces de fonctions où chercher les solutions de nos équations et leur donner un sens. Les espaces charnières sont les espaces de Hilbert.

Le dénominateur commun de ces trois niveaux est l'algèbre linéaire, la grammaire des mathématiques, où l'on dessine l'univers des espaces vectoriels, où l'on explique ce que sont les applications linéaires, où l'on donne un sens à la notion de base et de dimension, à la dualité, au calcul matriciel, sachant qu'un ordinateur ne peut réaliser que des calculs linéaires. Et même si les phénomènes naturels sont souvent non linéaires par essence, on les approche pour les résoudre par une succession de problèmes linéaires. C'est pourquoi nous commençons par revisiter l'algèbre linéaire dans le chapitre 1, en choisissant une présentation entre l'axiomatique abstraite de l'école française traditionnelle et l'approche matricielle et pragmatique de l'école anglo-saxonne.

L'algèbre linéaire est naturellement mise en miroir avec l'analyse, le moteur à propulsion des mathématiques. Si l'analyse sur la droite réelle enseignée dans les cours « $\varepsilon - \delta$ » et d'intégration de licence est auto-suffisante, pour passer aux plus grandes dimensions, nous avons besoin de géométrie. La géométrie est une galaxie avec autant de systèmes solaires. Il existe plusieurs géométries : géométrie algébrique, analytique, différentielle... Pour nous, il s'agit de pouvoir mesurer des longueurs, des surfaces et des volumes, en partant des motifs de base que sont les segments de droite, les parallélogrammes et les parallélépipèdes, pour lesquels une règle suffit, ainsi qu'un compas pour mesurer les angles. Les conséquences primordiales sont le théorème de Pythagore, le produit scalaire et la notion d'orthogonalité.

Pour accéder au niveau 1, nous revenons dans le chapitre 2 aux bases des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ enseignés au lycée, aux espaces affines, à la paramétrisation des droites dans le plan, dans l'espace, et des plans dans l'espace. L'introduction de la base duale dans le plan conduit naturellement au produit scalaire, à l'orthogonalité, puis à la norme euclidienne, dont les propriétés générales permettent plus loin de définir la notion abstraite de norme. Dès ce niveau-là, nous énonçons et démontrons l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}| \leq \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{CD}\|,$$

qui est un des fils rouges de l'ouvrage. Puis, comme nous voulons mesurer des aires et des longueurs, nous devons introduire le déterminant d'un endomorphisme, ce qui est fait à partir de l'aire des parallélogrammes.

Il faut consentir à de nombreux efforts pour passer du plan à l'espace et mesurer des volumes, ce qui passe par le produit vectoriel. Nous en donnons une définition pragmatique par un argument de dualité, d'où découlent ses principales propriétés et le calcul de ses composantes, puis le déterminant 3D via la forme volume.

La généralisation de ce qui est fait dans l'espace à toutes dimensions rend possible l'accès au niveau 2 dans le chapitre 3 où l'on construit les espaces euclidiens. On passe de nouveau par la dualité, qui est comme regarder les espaces au travers un miroir, ce qui sera un thème récurrent tout au long de l'ouvrage et dont on comprendra la portée dans la formulation faible des équations de la nature dans le chapitre 6.

L'analyse vient se greffer sur l'édifice comme une fondation naturelle, dès la preuve de l'équivalence des normes en dimension finie, le théorème de projection orthogonale et une version simplifiée du théorème de Lax-Milgram, tous vus au travers de problèmes de minimisation et d'arguments de compacité. La compacité est traitée via des suites et le critère de Bolzano-Weierstrass, sans qu'il soit nécessaire de revoir la topologie générale abstraite.

Nous faisons alors passer la forme volume et le déterminant 3D à toutes dimensions, ce qui permet de traiter les incontournables pour la modélisation et l'analyse numérique, que sont les normes d'endomorphisme, la réduction des matrices et des endomorphismes, le théorème de Cayley-Hamilton démontré par une méthode d'analyse, et la diagonalisation des endomorphismes symétriques dans le groupe orthogonal.

Pour accéder au niveau 3, nous faisons « tendre la dimension n vers l'infini ». C'est un peu comme développer une fonction T -périodique, $f = f(x)$, en la somme de sa série de Fourier, c'est-à-dire, avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x).$$

Les espaces fondamentaux sont les espaces de Hilbert introduits dans le chapitre 4. Pour les construire, nous avons besoin des formes quadratiques abstraites et des produits scalaires, combinés avec la notion topologique de complétude. La grande star de ces espaces est $L^2(\Omega)$, constitué des fonctions $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dont le carré est Lebesgue intégrable, où Ω est un domaine du plan ou de l'espace. L'espace $L^2(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$\forall u, v \in L^2(\Omega), \quad (u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx,$$

intégrale qui est bien définie grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, toujours valable dans ce contexte. C'est le prototype de l'espace de Hilbert. Nous verrons différents procédés de construction de $L^2(\Omega)$ tout au long de cet ouvrage ainsi que de nombreux exemples d'espaces de Hilbert.

À un espace de Hilbert H est associé son dual topologique H' , l'espace des formes linéaires. Nous étudions soigneusement la structure de H' , en démontrant le théorème de Riesz qui dit qu'il existe une isométrie entre H et

son dual H' et en introduisant la notion de convergence faible. Néanmoins la grande question est : pourquoi fait-on tout cela ?

Un des problèmes de base de la modélisation mathématique est le problème de Dirichlet : étant donné une source $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, trouver $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, qui vérifie

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où $\Gamma = \partial\Omega$ désigne la frontière de Ω , aussi nommée le bord, $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ est le Laplacien de u , et $u = 0$ sur le bord est « la condition aux limites » de Dirichlet homogène. Nous verrons dans le chapitre 6 qu'à l'aide de la formule de Stokes, ce problème peut se mettre sous la forme d'un problème variationnel dans un espace de Hilbert H constitué de fonctions à préciser. Ce problème variationnel est basé sur une forme bilinéaire symétrique continue et coercive $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, qui modélise le Laplacien. En supposant $f \in H'$, le problème de Dirichlet devient :

$$\text{trouver } u \in H, \quad \text{tel que } \forall v \in H, \quad a(u, v) = \langle f, v \rangle.$$

La clé pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème variationnel, puis écrire un code de simulation numérique, est le théorème de Lax-Milgram, démontré dans un cadre abstrait général dans le chapitre 4 par la méthode de Galerkin.

Pour dérouler ce programme, il faut maîtriser la formule de Stokes, ou encore de Green-Ostrogradski, qui permet de déterminer la forme $a = a(u, v)$. Ces formules sont des formules d'intégration par parties. Sur $\mathbb{R}$, l'intégration par parties s'écrit formellement sous la forme suivante, pour deux fonctions $f, g \in C^1([a, b])$,

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Le terme $[f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$ est le « terme de bord ».

La généralisation à d'autres dimensions se fait, par exemple, dans l'espace pour $i = 1, 2, 3$,

$$\iiint_{\Omega} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dV(x) = \iint_{\Gamma} f(x)g(x)n_i(x) dS(x) - \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(x) dV(x),$$

où $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x) = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))$ est le vecteur normal sortant en chaque point $x \in \Gamma$. Cette formule se vérifie également dans le plan.

Le point délicat pour appréhender cette formule, dite de Stokes, est la compréhension du « terme de bord » $\iint_{\Gamma} f(x)g(x)n_i(x) dS(x)$. C'est pourquoi, dans le chapitre 5, nous détaillons l'intégration des champs scalaires et

vectoriels, ainsi que des formes différentielles, sur les courbes et les surfaces. Cela utilise pleinement les notions d'algèbre, de géométrie et d'analyse abordées dans les premiers chapitres, afin d'introduire les bases indispensables de géométrie différentielle, en particulier sur les différentes paramétrisations des courbes et des surfaces, le calcul des longueurs et des aires, et la définition du vecteur normal.

Nous ne donnerons pas la démonstration la plus générale de la formule de Stokes, ou dans sa version de base Green-Ostrogradski, basée sur des fondements abstraits de géométrie différentielle au-delà du cadre de cet ouvrage. Nous exposerons cependant des démonstrations élémentaires de la formule « à la main » au fur et à mesure pour des domaines Ω avec des géométries simples, des polygones, des convexes.

L'opérateur divergence,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

pour un champ de vecteurs sur Ω , $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3(x))$, s'inscrit naturellement dans ce cadre, puisque la formule générique de Green-Ostrogradski relie la divergence de $\mathbf{v}$ à son flux de surface par la formule

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v}(x) dV(x) = \iint_{\Gamma} \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{n}(x) dS(x).$$

Nous verrons comment la divergence du champ vectoriel $\mathbf{v}$ détermine sa capacité à transformer les volumes dans la dynamique qu'il génère. Cette formule est à la base des équations de conservation écrites dans le chapitre 6.

Ce chapitre 6 constitue l'aboutissement du travail fourni depuis le début, et est le point de jonction vers le niveau Master 2. Il doit permettre la prise en main rapide d'un logiciel de simulation d'équations aux dérivées partielles comme FreeFem++¹.

Pour garantir qu'il soit complet et compréhensible de manière autonome, nous avons inclus un kit de survie sur la théorie de l'intégrale de Lebesgue, des distributions et des espaces de Sobolev, sans démonstrations, afin d'équiper les étudiant.e.s des outils nécessaires pour suivre le reste. Cela ne les dispense pas pour autant de consulter les références citées pour approfondir leurs connaissances sur ces sujets.

On introduit ensuite dans ce chapitre les principales équations aux dérivées partielles que sont :

— l'équation de Laplace-Poisson (équation elliptique),

1. Se connecter à <https://freefem.org/>, logiciel freeware.

- l'équation de la chaleur (équation parabolique),
- l'équation des ondes (équation hyperbolique).

On expliquera comment modéliser chacune de ces équations à partir des lois fondamentales de la nature : loi de conservation de la masse, loi de Gauss sur le champ électrique, loi de Fourier sur la conduction thermique, principe fondamental de la dynamique.

Historiquement, on cherchait à calculer des solutions à ces équations par des formulations intégrales avec des noyaux et/ou des séries de Fourier, qui restent des points de vue incontournables, étudiés dans ce chapitre.

En vue de la préparation à l'étude des méthodes numériques modernes, telles que les éléments finis, les volumes finis, les méthodes spectrales, et l'écriture des codes correspondants, nous introduisons les formulations variationnelles déjà évoquées plus haut, avec différents types de conditions aux limites : conditions de Dirichlet, de Neumann, de flux. En particulier, la démonstration de l'existence d'une unique solution faible à l'équation de la chaleur avec condition de flux, qui vérifie le bilan d'énergie, est la synthèse des travaux entrepris dans ce livre, puisque l'essentiel de ce qui a été étudié y est utilisé.

Le livre s'achève par un chapitre d'exercices corrigés, organisés chapitre par chapitre. Les exercices varient en niveau et en inspiration : certains sont techniques, comme ceux sur les intégrales sur les courbes et les surfaces du chapitre 6, tandis que d'autres sont plus conceptuels, comme celui sur les éléments finis en une dimension du chapitre 4.

Chapitre 1

Espaces vectoriels et applications linéaires

Ce chapitre est notre fondation de l'algèbre linéaire, réduit à ce qui nous semble indispensable pour la suite de notre propos et nos objectifs. On reprend en grande partie des notions abordées dans les cours de licence, pour les consolider et gagner en aisance dans leur pratique.

On introduit d'abord les espaces vectoriels, leurs sous-espaces vectoriels et les applications linéaires, qui vont d'un espace vectoriel vers un autre en conservant les structures. Par commodité, on se limite au cas des espaces sur $\mathbb{R}$, mais les choses fonctionnent de la même manière sur $\mathbb{C}$, ou encore un corps quelconque.

Une fois les axiomes et définitions généraux énoncés, on considère les espaces vectoriels de dimension finie, le prototype étant l'espace cartésien $\mathbb{R}^n$. Le point délicat de l'édifice est la définition de la dimension, ce qui passe par la définition des bases et du théorème de la dimension, qui dit que toutes les bases ont même cardinal, la dimension donc. La démonstration proposée ici repose sur la résolution de systèmes linéaires.

Vient ensuite le théorème de la base incomplète, qui permet de voir une base comme une famille libre maximale et qui est un des piliers de l'algèbre linéaire.

On discute ensuite du changement de base, en utilisant tout de suite le calcul matriciel pour plus de fluidité dans la narration, calcul matriciel repris en fin de chapitre, incluant les incontournables trace et rang.

L'autre point délicat du chapitre est le théorème du rang qui relie les dimensions du noyau et de l'image d'une application linéaire. Nous avons fait le choix de passer par les espaces quotients pour le démontrer. Si l'investissement abstrait peut paraître coûteux, on gagne considérablement en universalité et en efficacité.