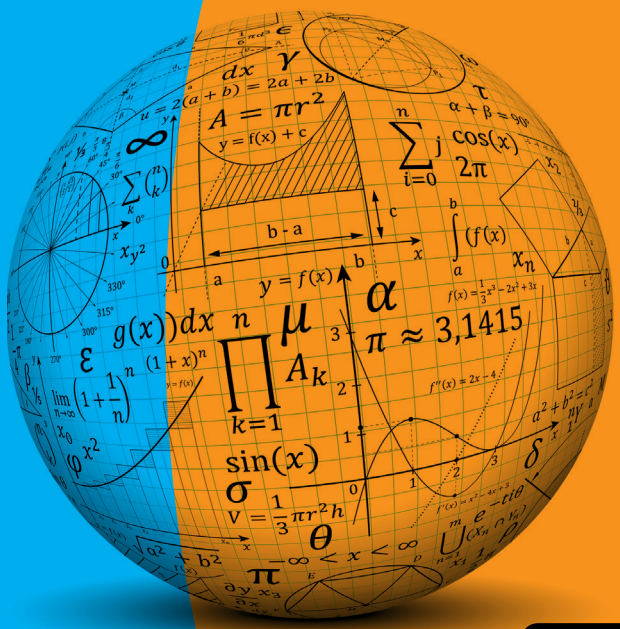
Christophe Fiszka

MATHÉMATIQUES

L'intégrale d'ECS1



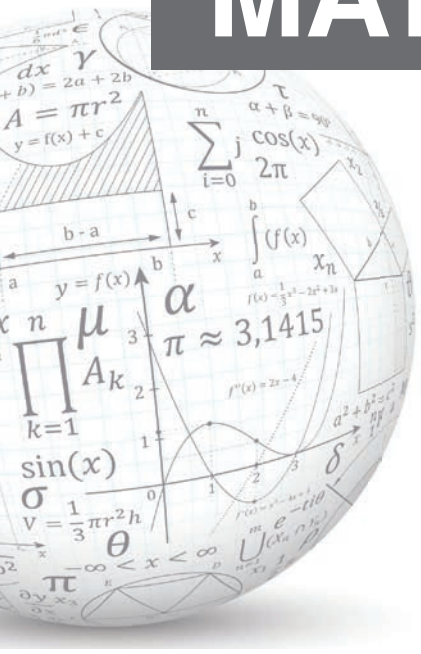
- Le cours complet
- Plus de 550 exercices avec les solutions détaillées
- Les méthodes et les pièges à éviter
- Le cours et les travaux pratiques en informatique

ellipses

MATHÉMATIQUES

L'intégrale d'ECS1

MATHÉMATIQUES



L'intégrale d'ECS1

Christophe FISZKA
Professeur agrégé en ECS1,
lycée Jacques Decour (Paris IX^{e})

avec la participation de

Sarah CHAMBARD
Professeure agrégée,
lycée Jacques Prévert
(Boulogne-Billancourt)

Camille CHANAUD
Professeure agrégée,
lycée Pablo Picasso
(Fontenay-sous-Bois)

Mathilde DURANDEAU
Professeure agrégée,
lycée Jacques Prévert
(Boulogne-Billancourt)

Ilham EL HAFIDI
Professeure agrégée,
lycée Jacques Decour
(Paris IX^{e})

Alexandra SUSBIELLE
Professeure agrégée,
lycée Louise Weiss
(Achères)

ellipses

Remerciements

Ce cours est issu du cours d'ECS1 du lycée Jacques Decour des rentrées 2016 à 2018. Je remercie mes étudiants pour leurs questions et leurs remarques qui m'ont permis d'améliorer la qualité de cet ouvrage.
Je tiens à remercier mes collègues et amis qui, à travers nos discussions, leurs conseils, leurs idées, ont contribué à l'élaboration de ce livre (Hugues Zuber, Jean-François Husson, Hélène et Virgile Robbe, Julien Deschamps, Alexandre Gewirtz, Alexis Gryson, Adrien Sirieys, Xan Duhalde et bien d'autres). Je remercie également mes anciens professeurs (dont Hervé Menevis, Francis Dorra) ainsi que Camille, Ilham, Alexandra, Mathilde pour leurs relectures précieuses.
Merci à ma compagne Sarah d'être toujours présente à mes côtés et à notre enfant à venir que nous attendons avec impatience.

ISBN 99782340-053366
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2019
32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Chaque chapitre se compose :

• D'un cours complet avec les définitions, théorèmes et preuves. Rappelons qu'il ne faut pas négliger la lecture des preuves. Faire des mathématiques consiste à produire des démonstrations. De plus, la bonne connaissance des démonstrations est source de méthode pour la résolution des exercices.
Le cours est complété par :

-  : Des exercices d'application directe.
-  : Des points méthodes.
-  : Un rappel des pièges à éviter.
-  : Des éléments de culture scientifique et économique.

• D'exercices d'approfondissement afin de mettre en pratique les différentes notions du chapitre et faire le lien avec les chapitres précédents.
La difficulté des exercices est indiquée par le nombre d'étoiles. De l'exercice simple ($\star$) à l'exercice complexe ($\star\star\star\star$).

• Certains chapitres sont complétés par des travaux pratiques en informatique.
Même s'il est conseillé de télécharger le logiciel libre Scilab, la majorité des exercices ne nécessite pas l'utilisation d'un ordinateur.
Dans le cas contraire, la question est repérée par le pictogramme .

• Le chapitre se conclut par les solutions des exercices d'application, des exercices d'approfondissement et des travaux pratiques.

Le livre se termine sur un résumé des programmes et commandes Scilab de première année, un formulaire et un index.

Bonne lecture !

Sommaire

Semestre I

Chapitres

1. Fonctions de la variable réelle et représentation Page 7
2. Nombres complexes et équations polynomiales 37
3. Les raisonnements mathématiques 63
4. Ensembles et applications 85
5. Dénombrement 119
6. Calculs de sommes et produits 143
7. L'ensemble $\mathbb{R}$ 161
8. Suites numériques 183
9. Limites et continuité 231
10. Dérivabilité d'une fonction de la variable réelle 267
11. Intégration sur un segment 297
12. Systèmes linéaires 333
13. Matrices 349
14. Introduction aux espaces vectoriels 385
15. Polynômes 419
16. Probabilités sur un univers fini 455
17. Variables aléatoires finies 485

Semestre II

Chapitres

18. Espaces vectoriels de dimension finie Page 519
19. Applications linéaires 545
20. Applications linéaires en dimension finie 577
21. Analyse asymptotique des suites (équivalence et négligeabilité) 621
22. Séries numériques 639
23. Étude locale des fonctions de la variable réelle (équivalence et négligeabilité) 665
24. Intégrales sur un intervalle quelconque 681
25. Formules de Taylor et développements limités 709
26. Optimisation : extremum et convexité 739
27. Généralités sur les espaces probabilisés 755
28. Variables aléatoires discrètes 787
29. Variables aléatoires à densité 811
30. Convergence des variables aléatoires 841

Compléments

Chapitres

31. Informatique, Scilab Page 863
32. Formulaire 887

Index 896

I

Premier semestre

CHAPITRE 1

Fonctions de la variable réelle et représentation

Ce premier chapitre est une révision du programme de Terminale S. Le but de la première section est de se familiariser avec le calcul algébrique. Ensuite, on définit et représente les fonctions de la variable réelle. On termine avec les fonctions usuelles en rappelant les théorèmes importants.

I Calculs algébriques

Dans la suite, une expression algébrique est une expression de la forme :

$$x^2+2x, \qquad x^3+(2x+4)(x^2+x^4)+\frac{x+1}{x^2+5}, \qquad xy+y^3...$$

où les quantités x, y sont des nombres réels ou complexes. Pour étudier de telles expressions, on utilisera principalement les **identités remarquables** suivantes (valables pour $a, b \in \mathbb{C}$)

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2; \qquad & a^2-b^2 &= (a-b)(a+b);\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2; \qquad & a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2).\end{aligned}$$

Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right).$$



Exercice 1.1. 1. Développer puis réduire les expressions suivantes :

$$\mathrm{A}(x)=(x+1)(x+2)(x-1)(x-2) \quad \text{et} \quad \mathrm{B}(x,y)=(x-3y)(x+3y)(x^2+9y^2)(x^4+81y^4).$$

2. Factoriser les expressions suivantes :

$$\mathrm{C}(x)=(4x+8)(x-2)+(4-2x)x+(x+3)(6-3x), \qquad \mathrm{D}(x)=x^3-x^2-x+1$$

$$\mathrm{E}(x)=x^5-3x^4-2x^3+6x^2+x-3 \quad \text{et} \quad \mathrm{F}(x,y)=9x^2y^4-3x^4y^2-6x^3y^2+18xy^4.$$

Un des premiers objectifs du calcul algébrique est de **résoudre des équations**.
Par exemple, résoudre l'équation $\mathrm{C}(x)=0$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}$, c'est trouver tous les nombres complexes x vérifiant $\mathrm{C}(x)=0$. La factorisation obtenue

$$\mathrm{C}(x)=-(x-2)(x+1)$$

permet de conclure qu'il y a exactement deux solutions $x = 2$ et $x = -1$. En effet, un produit de complexes est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est.
Dans le cas de nombres réels, on peut se poser la question du signe de l'expression. En reprenant l'exemple précédent, on peut regarder les cas où

$$\mathrm{C}(x) \geqslant 0 \quad \text{avec} \quad x \in \mathbb{R}.$$

On **résout une inéquation**. Pour cela, on fait un **tableau de signe**.

x	$-\infty$		-1		2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$	
$-(x+1)$	$+$	0	$-$		$-$	
$\mathrm{C}(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	

En conclusion, $\mathrm{C}(x)$ est strictement négatif pour x strictement inférieur à -1 ou strictement supérieur à 2, égale à 0 si $x = 2$ ou $x = -1$ et strictement positif sinon.



Exercice 1.2. 1. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$x^4 + 4 = 4x^2 \quad \text{et} \quad (x^4 - x^3 + 4x - 1)^2 = (x^4 + x^3 - 4x - 1)^2.$$

2. Résoudre les inéquations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$2x^2 \leqslant 18, \quad (x-1)(x^2+9) < 6(x-1)x \quad \text{et} \quad \frac{3x}{x^2+x+1} < 1.$$

II Représentation d'une fonction de la variable réelle

Pour rappel, définir une fonction f de la variable réelle sur un ensemble $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}$, c'est associer à tout élément x de D un unique nombre noté $f(x)$.



Attention. On prendra garde de bien distinguer l'expression $f(x)$ de la fonction f.

Scilab. Pour définir une fonction avec le logiciel de calcul Scilab , on peut utiliser la ligne de commande

`function` $\cdots$ `endfunction`.

Par exemple, les fonctions $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 4x\exp(x^2)$ et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{x+4}{x^2+1}$ sont obtenues et évaluées par :

```
function y=f(x);
  y=4*x*exp(x^2);
endfunction

 function y=g(x)
   y=(x+4)/(x^2+1)
 endfunction
```

```
--> f(2), g(1)
       ans  =
           436.7852

       ans  =
            2.5
```

II.1 Graphe et symétrie

Définition — **Graphe d'une fonction**

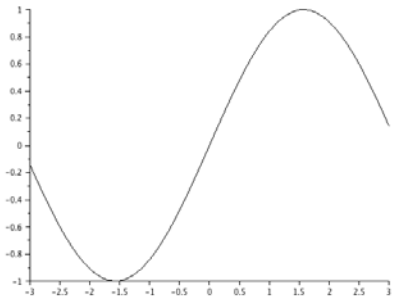
*Soit $f : \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$. Le **graphe** de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :*

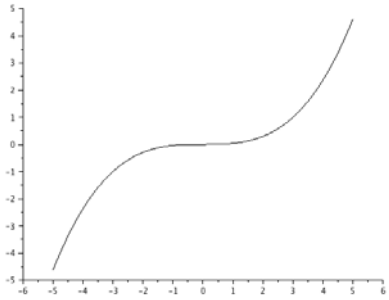
$$\mathrm{G} = \Big\{ \big(x, f(x)\big) \,|\, x \in \mathrm{D}_f \Big\}.$$

Scilab. Pour tracer le graphe d'une fonction, on ne peut évidemment pas calculer l'ordonnée $f(x)$ pour tout x appartenant au domaine de définition de f. On considère plutôt quelques abscisses, puis on évalue la fonction en ces valeurs. On relie ensuite les points obtenus.
C'est ce principe qui est utilisé par Scilab pour tracer le graphe d'une fonction f. Pour cela, on définit les quelques points (répartis uniformément suivant un certain **pas**), on calcule $y = f(x)$ puis on trace via la commande **plot2d**. Les points sont alors reliés par des segments.
Voici le code pour tracer le graphe des fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)$ et $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3/27$ respectivement sur $[-3; 3]$ et $[-5; 5]$.

```
x=-3:0.1:3;     // pas de 0.1
y=sin(x);
plot2d(x,y)
```

```
x=-5:0.1:5;
z=1/27*x^3;
plot2d(x,z)
```







Exercice 1.3. ($\star$). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction. Quel est le lien entre le graphe de f et celui de $g : x \mapsto f(-x)$? Même question avec $h : x \mapsto -f(x)$ et $i : x \mapsto f(x-1) + 2$.

Définition — **Parité**

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ où I est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ symétrique (si $x \in \mathrm{I}$ alors $-x \in \mathrm{I}$), on dit que :

- *f est **paire** si pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a $f(-x) = f(x)$;*
- *f est **impaire** si pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a $f(-x) = -f(x)$.*

Exemples.
- Les fonctions cosinus, valeur absolue et $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ sont paires;
- Les fonctions linéaires, sinus et $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ sont impaires.

Définition **Périodicité**

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{T} \in \mathbb{R}_*^+$. On dit que :

- *f est T-**périodique** si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x + \mathrm{T}) = f(x)$.*
- *f est **périodique** s'il existe $\mathrm{T} \in \mathbb{R}_*^+$ tel que f soit T-périodique.*

Exemples. • Les fonctions cosinus et sinus sont $2\pi-$périodiques.

• Les fonctions constantes sont T-périodiques pour tout réel $\mathrm{T} > 0$.



Exercice 1.4. Pour chacune des fonctions périodiques, préciser une période.

$$g : \ x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(\pi x) \quad \text{et} \quad h : \ x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x-1)\cos(2x) + 2.$$

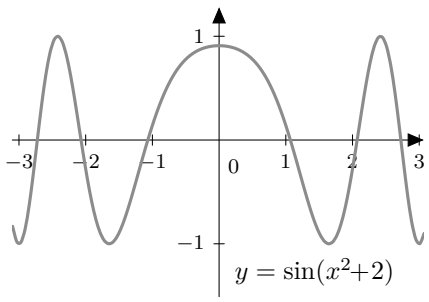
Remarques. • Une fonction T-périodique est aussi 2T-périodique, 3T-périodique.. De plus, la somme et le produit de fonctions T périodiques restent une fonction T-périodique.

• Dans la suite, on se place dans un repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthogonal.

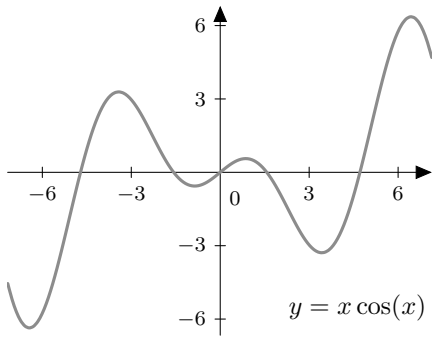
Graphiquement, dire que la fonction est paire (respectivement impaire) signifie que la courbe représentative de f a une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (resp. une symétrie centrale par rapport à l'origine).

Le graphe représentatif d'une fonction T-périodique est invariant par une translation de vecteur $\mathrm{T}\vec{\imath}$.

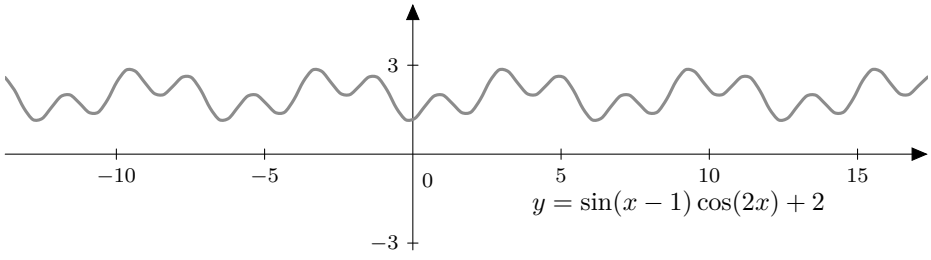
Paire



Impaire



Périodique



• En pratique, ces diverses symétries permettent de réduire l'intervalle d'étude de la fonction. Pour une fonction paire ou impaire, on se limite à $\mathrm{I} \cap \mathbb{R}^+$ et à $[0; \mathrm{T}]$ (ou $[-\mathrm{T}/2; \mathrm{T}/2]$) dans le cas T-périodique.

II.2 Graphe et monotonie

Définition — **Monotonie**

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, on dit que :

- *f est **croissante sur** I si pour tous $x, y \in \mathrm{I}$, $x \leqslant y$ implique $f(x) \leqslant f(y)$;*
- *f est **décroissante sur** I si pour tous $x, y \in \mathrm{I}$, $x \leqslant y$ implique $f(x) \geqslant f(y)$;*
- *f est **monotone sur** I si elle est croissante ou décroissante sur I.*

Exemples.
- $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
- $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$;
- La fonction cosinus est décroissante sur $[0; \pi/2]$;
- $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$. En effet, on a par exemple,
$$-2 \leqslant 2 \quad \text{mais} \quad \frac{1}{-2} < \frac{1}{2}.$$
- Une fonction à la fois croissante et décroissante est constante.

Remarques. • La courbe d'une fonction croissante "monte" alors que la courbe d'une fonction décroissante "descend".
• On définit aussi la **stricte croissance/décroissance** en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes. Par exemple, f est strictement croissante sur I si pour tous $x, y \in \mathrm{I}$, $x < y$ implique $f(x) < f(y)$.



Exercice 1.5. ($\star\star$). Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et périodique ?



Exercice 1.6. *Vrai ou faux ?*
1. La somme de deux fonctions croissantes est croissante.
2. Le produit de fonctions croissantes est une fonction croissante.

Proposition — **Monotonie et composition**

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $g : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$.
On suppose que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \in \mathrm{J}$, de sorte que la composée $g \circ f : x \in \mathrm{I} \mapsto g\big(f(x)\big)$ soit bien définie.
On suppose de plus que f et g sont monotones sur I.

- *Si f et g ont le même sens de variations, alors $g \circ f$ est croissante.*
- *Si f et g n'ont pas le même sens de variations, alors $g \circ f$ est décroissante.*

Preuve. Prouvons le cas où f et g sont respectivement croissante et décroissante. Les autres cas étant similaires.
Soient $x, y \in \mathrm{I}$, par décroissance de f, puis par croissance de g,

$$x \leqslant y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geqslant f(y) \quad \Rightarrow \quad g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) \geqslant g\big(f(y)\big) = g \circ f(y).$$

La fonction $g \circ f$ est décroissante. ■



Exercice 1.7. ($\star$). Étudier, *sans dérivation*, la monotonie des fonctions :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+x^2}, \quad g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x^2}{1+x^2} \quad \text{et} \quad h : x \in \mathbb{R} \mapsto \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2.$$

Lorsque la fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est dérivable (I est un *intervalle*), il existe un bon critère pour étudier les variations de la fonction : le signe de la dérivée.

Proposition — **Dérivabilité et croissance**

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction avec I un intervalle. Alors

f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.

De plus, f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.



Exercice 1.8. Que pensez-vous de la rédaction suivante ?

La fonction $f(x) = 1/x$ est définie pour $x \neq 0$. De plus, on a $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \leqslant 0$. La dérivée est négative, d'après le théorème précédent, la fonction $1/x$ est décroissante.

Remarque. On en déduit qu'une fonction f, définie sur un intervalle I, est constante si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) = 0$.

III Les fonctions usuelles

III.1 Polynômes et fractions rationnelles

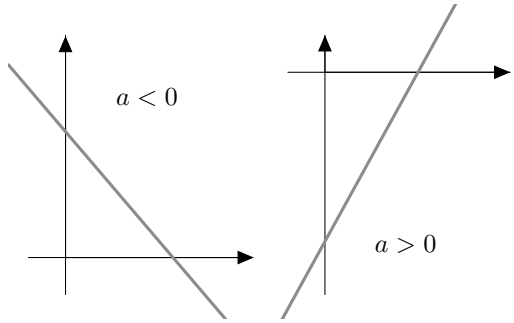
Les fonctions polynomiales de degré 1 et 2

- Une **fonction polynomiale de degré 1** (ou fonction affine) est définie par

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{R}.$$

  - a représente la **pente** ou encore le **coefficient directeur de** f;
  - b est **l'ordonnée à l'origine** (puisque $f(0) = b$).

La courbe représentative d'une fonction affine est une droite. Deux cas sont possibles suivant le signe du coefficient directeur a.



- Une **fonction polynomiale de degré deux** (ou trinôme) est définie par

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2 + bx + c \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad b,\, c \in \mathbb{R}.$$

On réécrit l'expression précédente sous **forme canonique**

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

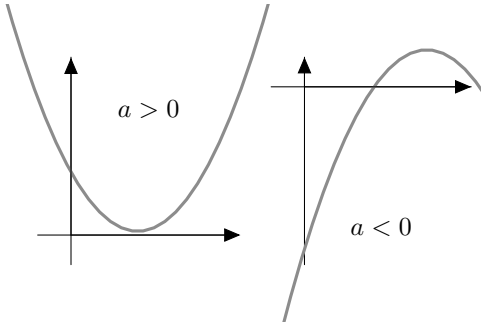
En effet, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = a\Big[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{a}{c}\Big] = a\left[\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \Big(\frac{b}{2a}\Big)^2 + \frac{a}{c}\right] = a\left[\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Les courbes repésentatives sont des **paraboles**. Le sommet de la parabole est donné par le point de coordonnées

$$\big(-b/(2a), -\Delta/(4a)\big)$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$ désigne le **discriminant.** Deux cas sont possibles suivant le signe de a. Dans le premier cas ($a > 0$), on parle de **convexité** et il existe un unique minimum, dans le second cas ($a < 0$), on parle de **concavité** et il existe un unique maximum.



Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ sont les racines de la fonction polynomiale. Il y a au plus deux racines pour une fonctions polynomiale de degré 2 :

- $\Delta > 0$, il y a deux solutions réelles distinctes données par $x_\pm = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;

- $\Delta = 0$, il y a une solution dite double donnée par $x = \dfrac{-b}{2a}$;

- $\Delta < 0$, il n'y a pas de solutions réelles.

Les fonctions polynomiales de degré supérieur à 3

On définit une fonction polynomiale de degré $p \in \mathbb{N}^*$ par

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_0 \quad \text{avec} \quad a_p \neq 0.$$

Étudions un exemple : posons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \in \mathbb{R}$.
Les fonctions polynomiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la dérivée de f est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

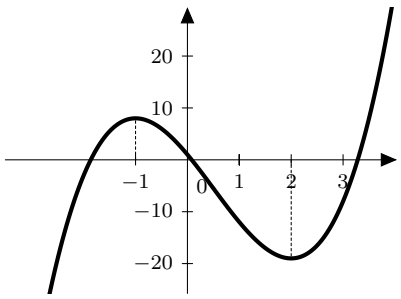
$$f'(x) = 6(x^2 - x - 2) = 6(x-2)(x+1).$$

Pour calculer les limites en $\pm\infty$, on peut écrire

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = x^3\Big(2 - \frac{3}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{1}{x^3}\Big) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty.$$

On peut conclure en donnant le tableau de variations et le graphe de f.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-19	$\nearrow$	$+\infty$



Remarque. Revenons au cas général. On a pour tout réel $x \neq 0$,

$$f(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_0 = a_p x^p\Big(1 + \frac{a_{p-1}}{a_p x} + \cdots + \frac{a_0}{a_p x^p}\Big).$$

On en déduit le tableau de limites suivant.

	$a_p < 0$	$a_p > 0$
p pair	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$
p impair	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Fractions rationnelles

Les fonctions rationnelles sont les quotients de deux fonctions polynomiales :

$$\mathrm{F} = \frac{p}{q} \text{ avec } p, q \text{ deux fonctions polynomiales avec } q \text{ non identiquement nulle.}$$

Contrairement aux fonctions polynomiales, l'ensemble de définition n'est plus nécessairement $\mathbb{R}$. C'est un intervalle ou une réunion d'intervalles inclus dans l'ensemble $\mathrm{D_F} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, q(x) \neq 0\}$.
Une fraction rationnelle est dérivable (donc continue) sur son ensemble de définition.

Méthode. <u>Comment calculer les limites d'une fraction rationnelle ?</u>

On factorise par le terme de plus haut degré du numérateur au numérateur et du dénominateur au dénominateur. Précisons par l'exemple :

$$\frac{2x^5+x^3-2}{-x^4+3x^2+2} = \frac{2x^5\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^5}\right)}{-x^4\left(1-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^4}\right)} = -2x\cdot\frac{1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^5}}{1-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^4}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty.$$

Exercice 1.9. Calculer les limites en $\pm\infty$ des fractions rationnelles suivantes :

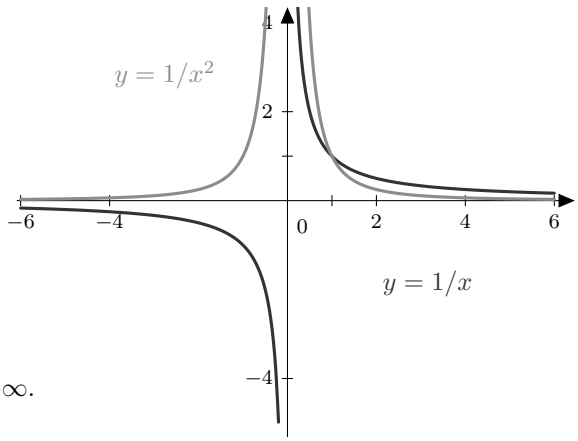
$$\mathrm{F}(x) = \frac{x^3+x-2}{x^4+6x^2+1}, \quad \mathrm{G}(x) = \frac{x^5+x^3-2}{x^2+1} \quad \text{et} \quad \mathrm{H}(x) = \frac{2x^5+12x^3-1}{x^5+2x^2-1}.$$

Après le calcul des limites en $\pm\infty$, il est utile de regarder les limites aux autres bornes de l'ensemble de définition. Considérons deux cas représentatifs de la situation:

$$\mathrm{F}_1(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \mathrm{F}_2(x) = \frac{1}{x^2}.$$

L'ensemble de définition est $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Les graphes de ces fonctions sont tracés à droite.
Les limites en 0 sont :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$



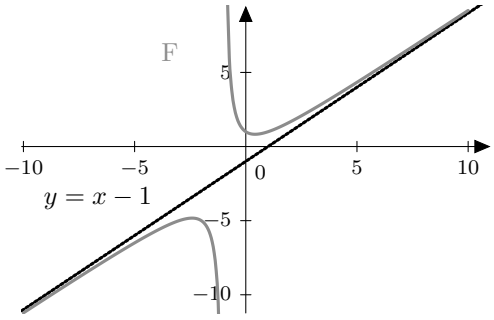
Les cas précédents sont des cas particuliers d'**asymptote verticale**. On dit que F_1 et F_2 admettent une asymptote verticale d'équation $x = 0$ (à gauche et à droite).

Notion d'asymptotes obliques

On pose $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x) &= \frac{x^2-1+2}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} + \frac{2}{x+1} \\ &= \underbrace{(x-1)}_{\substack{\text{équation}\\ \text{d'une droite}}} + \underbrace{\frac{2}{x+1}}_{\substack{\text{limite nulle}\\ \text{en } \pm\infty}}.\end{aligned}$$

Autrement dit, le graphe de F se rapproche de la droite d'équation $y = x-1$ en $\pm\infty$.



Méthode. Comment justifier l'existence d'une asymptote oblique ?

Pour démontrer que fonction f (non nécessairement rationnelle) admet une **asymptote oblique** et déterminer son équation, on vérifie l'existence des limites finies

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a \quad \text{et} \quad f(x) - ax \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} b.$$

Dans ce cas, on a une asymptote d'équation $y = ax + b$.
Reprenons l'exemple précédent avec F.

$$\frac{\mathrm{F}(x)}{x} = \frac{x^2+1}{x(x+1)} = \frac{x^2\big(1+1/x^2\big)}{x^2\big(1+1/x^2\big)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Et,
$$\mathrm{F}(x) - x = \frac{x^2+1}{x+1} - x = \frac{-x+1}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -1.$$

Ainsi, on a une asymptote d'équation $y = x - 1$.
Précisons que la position relative de la courbe représentative de f par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $f(x) - ax - b$.

Exercice 1.10. ($\star$). Étudier les asymptotes éventuelles et les positions relatives de la courbe représentative des fonctions étudiées par rapport aux asymptotes.

$$x \mapsto \frac{2x^3 - 4x - 4}{x^2 + x + 1} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{x+1}{x-1}.$$

Exercice 1.11. ($\star$). On considère la fonction définie par $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{x^3 - x - 3}{2x^2 + 1}$.

1. Montrer que f admet une asymptote oblique d'équation $y = x/2$.
2. Représenter le graphe de f sous Scilab ainsi que l'asymptote.
   On impose la taille de la fenêtre $[-1; 7]$.

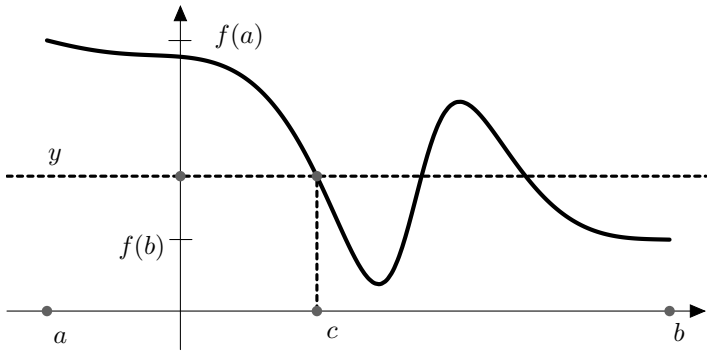
III.2 Fonctions racines

Commençons par deux rappels, le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection.

Théorème — **des valeurs intermédiaires**

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue.
Alors pour $a, b \in \mathrm{I}$ avec $a < b$, pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = y$.

Remarques. • Cela signifie que tout réel y, compris entre $f(a)$ et $f(b)$, admet au moins un antécédent.



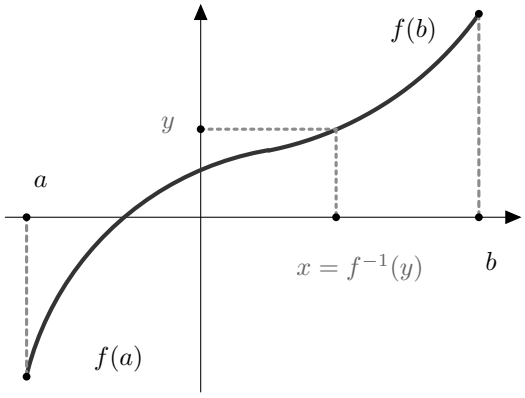
• Ce théorème est un "théorème d'existence", il ne donne ni la valeur de c, ni le nombre de réels qui vérifient $f(c) = y$.

Corollaire — **Théorème de la bijection**

Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$.
Si f est une fonction continue, strictement monotone, alors f réalise une bijection entre $[a; b]$ et l'intervalle fermé dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$.

Autrement dit, tout point de l'intervalle fermé dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$ admet un unique antécédent. Ou encore

Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel x dans $[a; b]$ tel que $f(x) = y$.



Ce réel x, est unique, on le note

$$x = f^{-1}(y).$$

Par exemple, si f est strictement croissante, cela définit une fonction

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} [a; b] & \to & [f(a); f(b)] \\ y & \mapsto & f^{-1}(y). \end{array} \right.$$

f^{-1} est la bijection réciproque de f.
La fonction f et sa réciproque ont le même sens de variation.

Remarque. La courbe représentative de la réciproque s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice (c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$).

Le théorème précédent se généralise aux intervalles quelconques. Par exemple,

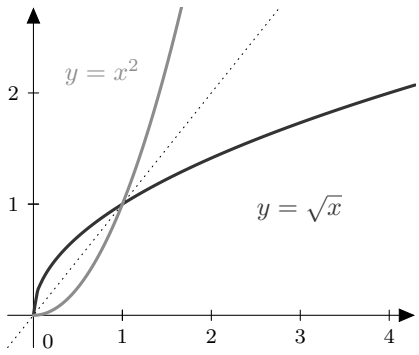
• Si f est définie sur $[a; +\infty[$, continue et strictement croissante, alors f réalise une bijection entre $[a; +\infty[$ et $[f(a); \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$;

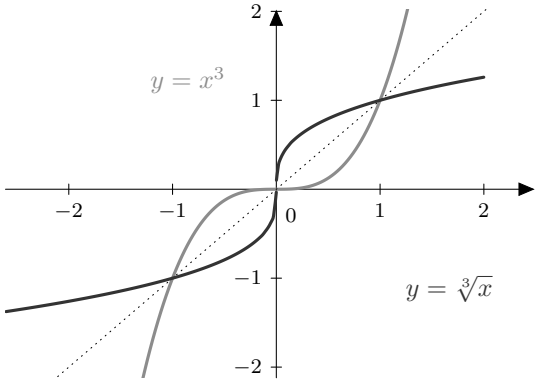
• Si f est définie sur $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$, continue et strictement décroissante, alors f réalise une bijection entre $]-\infty;+\infty[$ et $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$.

Application. *Les fonctions racine carrée et racine cubique.*

Les applications $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}^+$ et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ sont strictement croissantes, continues. De plus, $f(0) = 0$, $\lim_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim_{\pm\infty} g = \pm\infty$. Par conséquent, f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, et g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Les bijections réciproques sont respectivement désignées par **racine carrée et racine cubique** et notées $\sqrt{\cdot}$ et $\sqrt[3]{\cdot}$.

On a tracé ci-dessous le graphe de ces fonctions :





Remarque. Justifions que pour tous réels x, y positifs :

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}.$$

On a par définition de la racine $(\sqrt{x})^2 = x$ et $(\sqrt{y})^2 = y$. Ainsi, $\left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}\right)^2 = (\sqrt{x})^2 \cdot (\sqrt{y})^2 = xy$. Résumons : $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ est un réel positif dont le carré est xy. Il n'y a qu'un nombre qui vérifie cette propriété, ce nombre est, par définition, $\sqrt{xy}$.

⚠ **Attention.** L'égalité $\sqrt{x^2} = x$ n'est valable que pour x positif. Sinon, on a pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ est positif} \\ -x & \text{si } x \text{ est négatif.} \end{cases}$$



Exercice 1.12. Simplifier les expressions suivantes :

$$a = \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}} \quad \text{et} \quad b = \frac{\sqrt{125} - \sqrt{20} - 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}.$$

On peut donner maintenant un énoncé général pour $n \in \mathbb{N}^*$ en distinguant le cas pair et le cas impair.

Définition - Proposition — **Fonctions racines**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- *Si n est pair, la fonction $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^n \in \mathbb{R}^+$ est bijective.*
- *Si n est impair, la fonction $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto x^n \in \mathbb{R}$ est bijective.*

*La fonction réciproque est appelée la **racine n-ème**, elle est notée $\sqrt[n]{\cdot}$. Autrement dit,*

- *Si n est pair, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,* $\sqrt[n]{x^n} = x \quad$ *et* $\quad (\sqrt[n]{x})^n = x.$
- *Si n est impair, pour tout $x \in \mathbb{R}$,* $\sqrt[n]{x^n} = x$ *et* $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x.$

⚠ **Attention.** Les ensembles de définition dépendent de la parité de n.

III.3 Fonctions exponentielle et logarithme

La fonction exponentielle

Théorème — **Existence et unicité**

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\text{pour tout réel } x, \quad f'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

*Cette unique fonction est appelée **fonction exponentielle** et est notée* exp. *De plus, cette fonction vérifie la relation fonctionnelle suivante : pour tous réels a et b*

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b).$$

— On admet l'existence d'une telle fonction —

Preuve. Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f' = f, \quad f(0) = 1 \quad \text{et} \quad g' = g, \quad g(0) = 1.$$

- *Résultats préliminaires.*

Prouvons que f ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.
Étudions la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = f(x) \times f(-x)$. Φ est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables. Pour tout réel x :

$$\Phi'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times \big(-f'(-x)\big) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x).$$

Or, d'après la définition de f, $f'(x) = f(x)$ pour tout réel x et donc également $f'(-x) = f(-x)$ pour tout réel x. Par conséquent, pour tout réel x, $\Phi'(x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$.
Ainsi, Φ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Or $\Phi(0) = 1 \times 1 = 1$, donc pour tout réel x, $\Phi(x) = 1$ soit $f(-x) \times f(x) = 1$. Donc, $f(x) \neq 0$ et $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

• *Unicité.*

Introduisons alors la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et pour tout réel x,

$$\psi'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f^2(x)} = \frac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{f^2(x)} = 0 \quad \text{car} \quad f' = f \quad \text{et} \quad g' = g.$$

Donc ψ est constante sur $\mathbb{R}$. Or $\Psi(0) = 1$ donc pour tout réel x, $\psi(x) = 1$ c'est-à-dire $f(x) = g(x)$. Ceci démontre l'unicité.

• *Preuve de la relation fonctionnelle.*

Soit b un réel quelconque et soit $g : x \mapsto \dfrac{\exp(x+b)}{\exp(b)}$ définie sur $\mathbb{R}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = \frac{1 \times \exp(x+b)}{\exp(b)} = g(x).$$

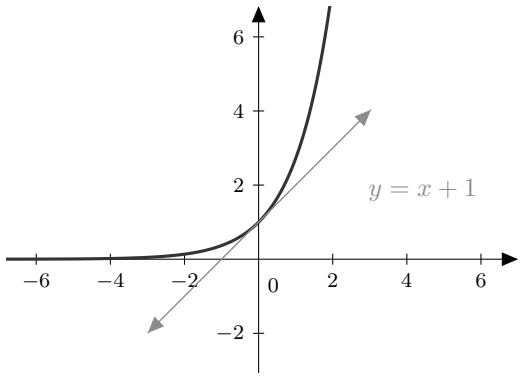
De plus $g(0) = \dfrac{\exp(b)}{\exp(b)} = 1$ donc g vérifie les deux propriétés de définition de l'exponentielle. Par unicité, $g = \exp$, c'est-à-dire pour tout réel x , $\exp(x) = \dfrac{\exp(x+b)}{\exp(b)}$.

On applique cette égalité en un réel quelconque a et on obtient alors $\exp(a) = \dfrac{\exp(a+b)}{\exp(b)}$.

En conclusion, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

■

• Le graphe de la fonction exponentielle est :



• On rappelle une limite classique : $\dfrac{\exp(x) - 1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1.$

• De plus, si $u : x \in \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable sur I, on montre que la fonction composée $x \in \mathrm{I} \mapsto \exp\big(u(x)\big)$ est aussi dérivable sur I et que la dérivée est donnée par $x \in \mathrm{I} \mapsto u'(x)\exp\big(u(x)\big)$.



Exercice 1.13. Donner les dérivées des fonctions suivantes :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp\left((x+1)^4\right) \quad \text{et} \quad g : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \exp(x^3 + 2x + 2).$$

La fonction logarithme

Définition - Proposition — Fonction logarithme

*La **fonction logarithme népérien**, notée* ln*, est la fonction réciproque de la fonction exponentielle $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x) \in \mathbb{R}_*^+$. Ainsi :*

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \ln\big(\exp(x)\big) = x,$$

$$\text{pour tout } y \in \mathbb{R}_*^+, \quad \exp\big(\ln(y)\big) = y.$$

De plus, cette fonction vérifie la relation fonctionnelle suivante : pour tous a et b réels strictement positifs

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b).$$

Preuve. La fonction exponentielle est strictement croissante et continue avec

$$\exp(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \exp(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Le théorème de la bijection s'applique, la fonction exponentielle est donc bien une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_*^+$.

Soient a et b deux réels strictement positifs. Posons $x = \ln(a)$ et $y = \ln(b)$ on a $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ donc

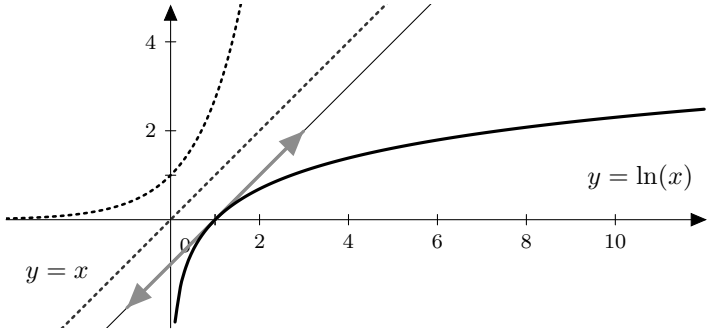
$$\exp\big(\ln(a) + \ln(b)\big) = \exp\big(\ln(a)\big) \times \exp\big(\ln(b)\big) = ab.$$

Puis, $$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \times b).$$

■

Remarques. • Autrement dit, la fonction logarithme népérien est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ qui à tout réel $x > 0$ associe l'unique solution de l'équation $e^y = x$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}$.

• Le graphe s'obtient par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ à partir du graphe de la fonction exponentielle :



• On a la limite : $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

• La fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
De plus, si $u : x \in \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}_*^+$ est dérivable sur I, la fonction composée $x \in \mathrm{I} \mapsto \ln\big(u(x)\big)$ est aussi dérivable sur I et la dérivée est donnée par $x \in \mathrm{I} \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Exercice 1.14. 1. Simplifier

$$\mathrm{A} = \ln\left(e\sqrt{e}\right), \quad \mathrm{B} = \ln\left(2+\sqrt{3}\right) + \ln(2-\sqrt{3}) \quad \text{et} \quad \mathrm{C} = \ln\left(\sqrt{1+\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}\right).$$

2. Établir que pour $x \in \mathbb{R}$, $\ln\left(e^x+1\right) - \ln\left(e^{-x}+1\right) = x$ et $\ln\left(e^x+3x\right) - \ln(1+3xe^{-x}) = x$.

Application aux puissances réelles

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance la fonction définie par

$$\boxed{\forall\, x \in]0,+\infty[, \qquad x^\alpha = \exp\left(\alpha \ln(x)\right).}$$

On dispose des règles de calculs suivantes :

- Pour tout réel $x > 0$, on a $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$. Plus généralement, pour tout réel α et $x > 0$

$$x^{-\alpha} = \left(x^{-1}\right)^\alpha = \frac{1}{x^\alpha}.$$

- Pour tous réels $x, y > 0$, et tout réel α : $\quad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \quad$ et $\quad \left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}.$

- Pour tous réels α, β et $x > 0$: $\quad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta} \quad$ et $\quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$

⚠ **Attention.** Les puissances réelles généralisent les fonctions racines vues auparavant. Il y a toutefois une distinction à faire entre $x^{1/3}$ et $\sqrt[3]{x}$, la première est définie par l'expression $x^{1/3} = \exp\left(\ln(x)/3\right)$ et ne vaut que pour $x > 0$ alors que la seconde est définie par la réciproque de le fonction cubique, elle est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque. On pose

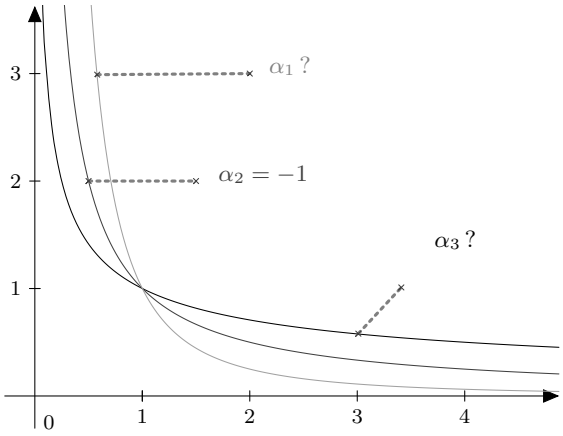
$$\boxed{e = \exp(1) \simeq 2,72,}$$

de sorte que $\ln(e) = 1$ et $e^\alpha = \exp\left(\alpha \ln(e)\right) = \exp(\alpha)$. On vient de monter que la fonction exponentielle est la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$.
La relation fonctionnelle de l'exponentielle se réécrit pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

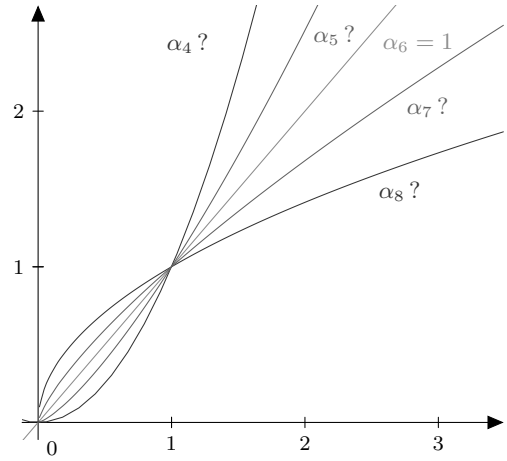
$$\boxed{e^{a+b} = e^a e^b.}$$

Exercice 1.15. ($\star$). *Position relative des graphes de $x \mapsto x^\alpha$.*
Attribuer pour chaque α_i, une valeur parmi : $\quad -2, \quad -1/2, \quad 2, \quad 4/3, \quad 3/4, \quad 1/2.$

• Valeurs de α négatives.



• Valeurs de α positives.



On constate que $x^\alpha \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ si $\alpha > 0$ et 1 si $\alpha = 0$. On convient de poser

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}_*^+, \qquad 0^\alpha = 0 \quad \text{et} \quad 0^0 = 1.$$

On dit que l'on **prolonge** la fonction par **continuité** (en $x = 0$).

• Par composition, les fonctions puissances sont dérivables sur leurs ensembles de définition : retenons que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \boxed{f_\alpha(x) = x^\alpha, \qquad f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.}$$

En effet, $\qquad f_\alpha(x) = \exp\big(\alpha \ln(x)\big)$, puis $f'_\alpha(x) = \dfrac{\alpha}{x}\exp\big(\alpha \ln(x)\big) = \alpha\dfrac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

Quelques limites - les croissances comparées

Nous avons vu en terminale, les limites :

$$x\exp(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \frac{\exp(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Nous verrons les versions plus générales : pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\lim_{x\to-\infty} x^\alpha \exp(x) = 0; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^\alpha} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x^\beta \ln(x) = 0.$$



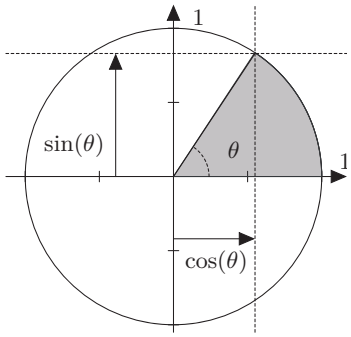
Exercice 1.16. Calculer les limites en $+\infty$ de

$$x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \frac{\ln(x)}{\exp(x)} \quad \text{et} \quad x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \frac{\exp\big(x + 2\ln(x)\big)}{x^4+1}.$$

III.4 Fonctions trigonométriques

Les applications sinus et cosinus

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
À tout nombre t, on associe par enroulement de la droite numérique un unique point M du cercle trigonométrique. Le point M a pour coordonnées $\big(\cos(t);\sin(t)\big)$.



- La fonction qui à tout réel t, associe le réel $\cos(t)$ est appelée **fonction cosinus**.

$$\cos : t \in \mathbb{R} \mapsto \cos(t) \in \mathbb{R}.$$

- La fonction qui à tout réel t, associe le réel $\sin(t)$ est appelée **fonction sinus**.

$$\sin : t \in \mathbb{R} \mapsto \sin(t) \in \mathbb{R}.$$

Quelques valeurs à connaître :

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos(\theta)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin(\theta)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0



Exercice 1.17. ($\star\star$). À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre l'équation et inéquations :

$$\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leqslant \cos\big(x\big) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(x) \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \sin(x) \leqslant \cos(x) \quad \text{où} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Proposition — **Propriétés des fonctions trigonométriques**

- *Pour tout nombre réel t,*

$$-1 \leqslant \cos(t) \leqslant 1 \quad \textit{et} \quad -1 \leqslant \sin(t) \leqslant 1.$$

- *Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques :*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \cos(t+2\pi) = \cos(t) \quad \textit{et} \quad \sin(t+2\pi) = \sin(t).$$

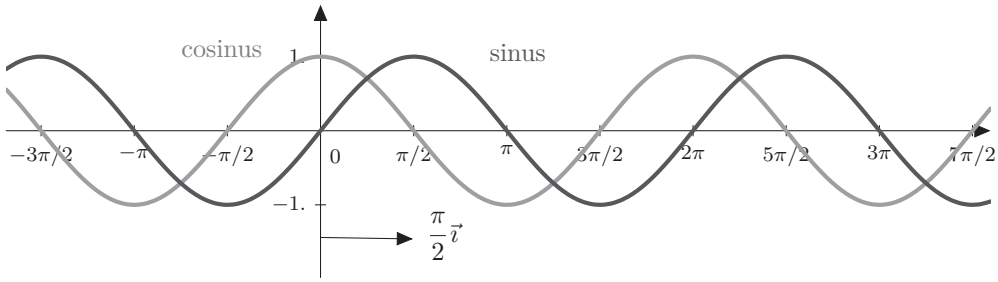
- *Le théorème de Pythagore justifie que pour tout réel t :*

$$\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1.$$

- *Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t appartenant à $\mathbb{R}$:*

$$\cos'(t) = -\sin(t) \quad \textit{et} \quad \sin'(t) = \cos(t).$$

On peut tracer les graphes :



On constate que le graphe de la fonction sinus s'obtient par translation de $\frac{\pi}{2}\,\vec{\imath}$ à partir de celui du cosinus. C'est bien le cas, à partir du cercle trigonométrique, on peut prouver la relation pour tout réel x,

$$\boxed{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin(x).}$$

Exercice 1.18. Donner les fonctions dérivées de $f:\ x\in\mathbb{R}\mapsto\big(\sin(x)\big)^3$, $g:\ x\in\mathbb{R}\mapsto\sin(x^3)$ sur $\mathbb{R}$.

L'application tangente

• Calculons la dérivée de la fonction tangente, après en avoir déterminé l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ sachant que $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Par quotient la fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition :

$$\mathcal{D}_{\tan}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Pour $x\in\mathcal{D}_{\tan}$, on trouve $\boxed{\tan'(x)=\dfrac{1}{\cos(x)^2}=1+\tan(x)^2.}$

En effet, on a pour $x\in\mathcal{D}_{\tan}$,

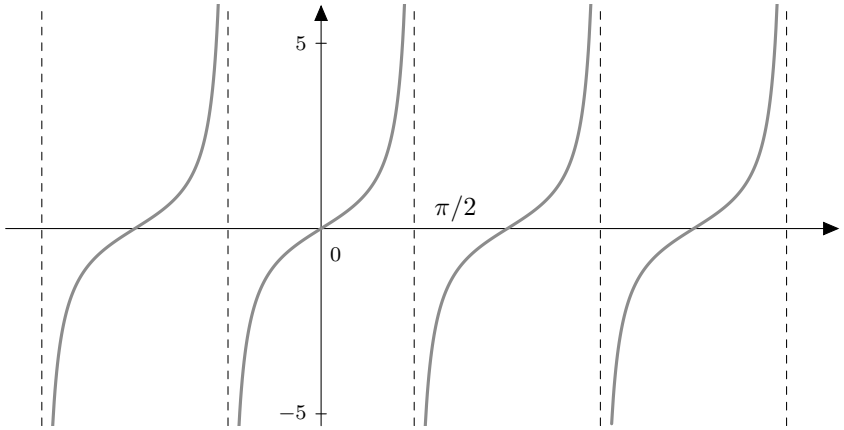
$$\tan'(x)=\frac{\sin'(x)\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot\cos'(x)}{\cos(x)^2}=\frac{\sin(x)^2+\cos(x)^2}{\cos(x)^2}.$$

Par le théorème de Pythagore $\qquad\tan'(x)=\dfrac{1}{\cos(x)^2}.$

Sinon, $\qquad\tan'(x)=\dfrac{\sin(x)^2+\cos(x)^2}{\cos(x)^2}=\Big(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\Big)^2+1=\tan(x)^2+1.$

• De plus, en utilisant les relations $\cos(x+\pi)=-\cos(x)$ et $\sin(x+\pi)=-\sin(x)$, valables pour tout réel x, on justifie que la fonction tangente est π-périodique. La fonction est aussi impaire.

- Le graphe de la fonction tangente est :



Formulaire

Pour tous réels a et b, on a

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$;
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$;
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.

Et pour tous réels a et b tels que a, b, $a+b$ et $a-b$ distincts de $\pi/2 + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$,

- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$;
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$.

Preuve. Prouvons l'avant dernière relation :

$$\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)} = \frac{\frac{\cos(a)}{\sin(a)} - \frac{\cos(b)}{\sin(b)}}{1 - \frac{\cos(a)}{\sin(a)} \cdot \frac{\sin(a)}{\sin(b)}} = \frac{\cos(a)\sin(b) - \cos(b)\sin(a)}{\sin(a)\sin(b) + \cos(a)\cos(b)} = \frac{\cos(a+b)}{\sin(a+b)} = \tan(a+b).$$

■



Exercice 1.19. ($\star$). Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Donner la relation entre $\cos(2\theta)$ et $\cos(\theta)$.
En déduire la valeur de $\cos(\pi/12)$, $\sin(\pi/12)$ et $\tan(\pi/12)$.

Exercices d'approfondissement

Exercice 1.20. Étudier la fonction $x \mapsto x^x$.
C'est-à-dire, donner le domaine de définition, les variations, les limites au bord et le graphe.

Exercice 1.21. ($\star$). Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x = 2\sqrt{x} + 3, \qquad \ln(3x) + \ln(x-1) = \ln(2) + 2\ln(3) \quad \text{et} \quad 5^{2x} - 3 \cdot 5^{x+1} + 2 = 0.$$

Exercice 1.22. ($\star\star$). Résoudre l'équation $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_*^+$.

Exercice 1.23. ($\star$). Comment traduire le fait que le graphe d'une fonction f est :

- Symétrique par rapport à l'axe d'équation $x = 3$?
- Symétrique par rapport au point $\mathrm{A}\,(1, 2)$?

Exercice 1.24. ($\star\star$).

1. Justifier que pour tout réel x :
$$\sqrt{x^2+1} + x > 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2+1} - x > 0.$$
2. Montrer par un calcul direct que pour tout réel x,
$$\ln\left(\sqrt{1+x^2} + x\right) + \ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = 0.$$
3. On pose pour tout réel x, $\varphi(x) = x + \sqrt{1+x^2}$ et $u(x) = \ln\big(\varphi(x)\big)$.
Justifier que φ et u sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec
$$\varphi'(x) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$
Retrouver l'égalité de la question 2 par un calcul de dérivée.

Exercice 1.25. ($\star$). *Problème.*

On pose : $$a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \quad \text{et} \quad b = -\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}.$$

L'objectif du problème est de simplifier les expressions de a et b.

1. (a) Calculer ab et $a^3 + b^3$.
   (b) Vérifier que $(a+b)^3 = 4 - 3(a+b)$.
2. Dans la suite, on considère la fonction polynomiale
$$\mathrm{P} : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 + 3x - 4.$$
   (a) Donner une racine évidente.

(b) Factoriser $\mathrm{P}(x)$. Préciser les racines de P (éventuellement complexes).

(c) Que vaut $\mathrm{P}(a+b)$? En déduire la valeur de $a+b$.

3. On considère maintenant $\mathrm{Q} : x \in \mathbb{R} \mapsto (x-a)(x-b)$.

(a) Vérifier que $\mathrm{Q}(x) = x^2 - x - 1$.

(b) En déduire des expressions simples de a et b à l'aide de la fonction racine carrée.

Exercice 1.26. ($\star\star$). *Problème.*

On pose pour tout réel x, $$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. (a) Préciser la parité de la fonction f.

(b) Donner le tableau de variations complet de f.

(c) Résoudre $f(x) = 1$, $f(x) = 2$. *Indication : On pourra poser* $\mathrm{X} = e^x$.

(d) Vérifier que pour tout réel x, $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$. En déduire les solutions réelles x de
$$f(2x) + 5 = 6f(x).$$

2. (a) Justifier que f définit une fonction bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[1; +\infty[$.

(b) On pose pour tout réel $y \geqslant 1$, $h(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$.
Pourquoi $h(y)$ est bien défini ?

(c) Calculer $f\big(h(y)\big)$. Que peut-on en déduire ?

3. ($\star\star\star$). On rappelle que pour tout réel q, $q \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$,
$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

On pose, de plus, pour tout réel x, tout entier n,
$$\mathrm{S}_n(x) = 1 + \exp(x) + \exp(2x) + \cdots + \exp(nx) \quad \text{et} \quad \mathrm{C}_n(x) = 1 + f(x) + f(2x) + \cdots + f(nx).$$

(a) Pour $x \in \mathbb{R}$, Simplifier $\mathrm{S}_n(x)$.

(b) Exprimer $\mathrm{C}_n(x)$ à l'aide de $\mathrm{S}_n(x)$ et $\mathrm{S}_n(-x)$.

(c) Vérifier que pour $x \in \mathbb{R}^*$,
$$\mathrm{C}_n(x) = f\big(\frac{nx}{2}\big)\frac{f'\big((n+1)x/2\big)}{f'(x/2)}.$$

Solution 1.1, page 7.

$$A(x) = x^4 - 5x^2 + 4,$$

$$\begin{aligned} B(x,y) &= (x^2-9y^2)(x^2+9y^2)(x^4+81y^4) \\ &= (x^4-81y^4)(x^4+81y^4) \\ &= x^8 - 6561y^8, \end{aligned}$$

$$C(x) = -(x-2)(x+1),$$

$$\begin{aligned} D(x) &= x^2(x-1) - (x-1) \\ &= (x-1)(x^2-1), \\ &= (x-1)^2(x+1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(x) &= x^4(x-3) - 2x^2(x-3) + (x-3) \\ &= (x^4-2x^2+1)(x-3) \\ &= (x^2-1)^2(x-3) \\ &= (x-1)^2(x+1)^2(x-3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x,y) &= -3xy^2(-3xy^2 + x^3 + 2x^2 - 6y^2) \\ &= -3xy^2\big(x^2(x+2) - 3y^2(x+2)\big) \\ &= -3xy^2(x+2)(x^2-3y^2) \\ &= -3xy^2(x+2)(x-\sqrt{3}y)(x+\sqrt{3}y). \end{aligned}$$

Solution 1.2, page 8.

1. • On reconnaît une identité remarquable :

$$x^4 + 4 = 4x^2 \iff \left(x^2\right)^2 - 2\cdot(2x^2) + 2^2 = 0$$

$$\iff \left(x^2-2\right)^2 = 0 \iff x^2 - 2 = 0.$$

Finalement, il y a deux solutions $\boxed{\pm\sqrt{2}.}$

• x est solution si et seulement si

$$(x^4+x^3-4x-1)^2 - (x^4-x^3+4x-1)^2 = 0 \iff$$

$$\Big((x^4+x^3-4x-1) + (x^4-x^3+4x-1)\Big)$$
$$\times\Big((x^4+x^3-4x-1) - (x^4-x^3+4x-1)\Big) = 0$$

$$\iff (2x^4-2)(2x^3-8x) = 0$$

$$\iff (x^4-1)(x^3-4x) = 0.$$

Or,

$$(x^4-1) = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x-1)(x+1),$$

et $\quad x^3 - 4x = x(x^2-4) = x(x-2)(x+2).$

Sachant que pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 > 0$, on a quatre solutions

$$\boxed{1, -1, 2 \text{ et } -2.}$$

2. • $2x^2 \leqslant 18$ est équivalent à $x^2 \leqslant 3^2$. On trouve :

$$\boxed{x \in [-3;3].}$$

• Distinguons :
- $x = 1$ n'est pas solution.
- Si $x > 1$ alors $x - 1 > 0$. On peut donc diviser chaque membre de l'inégalité sans modifier l'ordre.

$$(x-1)(x^2+9) < 6(x-1)x \iff (x^2+9) < 6x$$

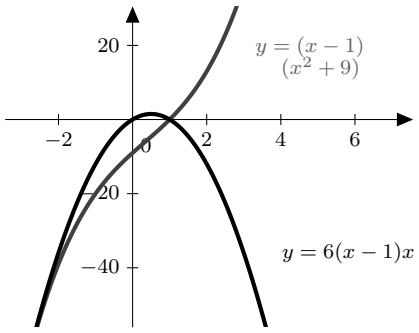
$$\iff x^2 - 6x + 9 < 0 \iff (x-3)^2 < 0.$$

Comme un carré de réel est toujours positif, il n'y a pas de solution strictement supérieure à 1.
- Si $x < 1$, $x - 1 < 0$ et

$$(x-1)(x^2+9) < 6(x-1)x \iff (x^2+9) > 6x$$

$$\iff x^2 - 6x + 9 > 0 \iff (x-3)^2 > 0.$$

En conclusion : $\boxed{\text{Tout réel } x < 1 \text{ est solution.}}$



• On a $\quad x^2 + x + 1 = (x+1/2)^2 + 3/4 > 0.$

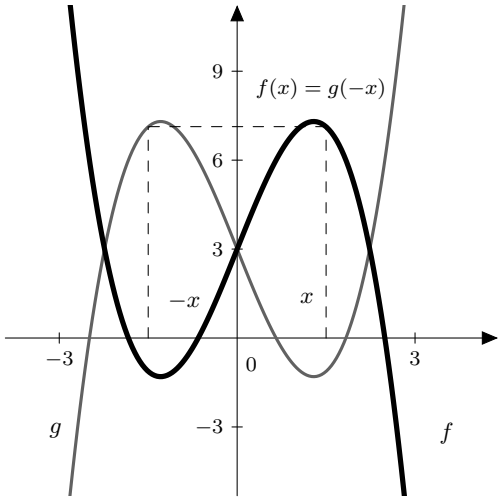
On peut multiplier par x^2+x+1 sans modifier le sens des inégalités :

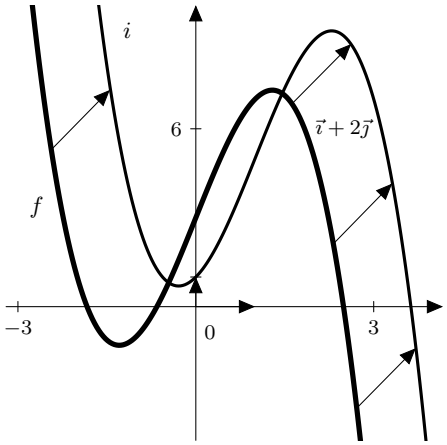
$$3x < x^2 + x + 1 \iff 0 < x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Finalement : $\boxed{\text{Tout réel } x \neq 1 \text{ est solution.}}$

Solution 1.3, **page 9.**

On se place dans un repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Les graphes de g et h s'obtiennent respectivement par symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées et par rapport à l'axe des abscisses. Le graphe de i s'obtient à partir de celui de f par une translation de vecteur $\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.
Par exemple, voici les graphes de g et i obtenus à partir de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 5x - x^3 + 3$.





Solution 1.4, **page 10.**

Justifions que g est 2-périodique et h est 2π-périodique. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{array}{rcl} g(x+2) & = & \sin\big(\pi(x+2)\big) \;=\; \sin(\pi x + 2\pi) \\ & = & \sin(\pi x) \;=\; g(x). \end{array}$$

car sin est 2π-périodique. Donc g est 2-périodique. De même, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} h(x+2\pi) & = & \sin\big((x+2\pi)-1\big)\cos\big(2(x+2\pi)\big)+2 \\ & = & \sin(x-1+2\pi)\cos(2x+4\pi)+2 \\ h(x+2\pi) & = & \sin(x-1)\cos(2x)+2 \;=\; h(x). \end{array}$$

h est 2π-périodique.

Solution 1.5, **page 11.**

Prouvons qu'une telle fonction est constante. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \leqslant y$ et T une période de f. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $y \leqslant x + n\mathrm{T}$, par suite, $f(x) \leqslant f(y) \leqslant f(x + n\mathrm{T}) = f(x)$. Ainsi, pour tous réels x, y, $f(x) = f(y)$. La fonction est bien constante.

Solution 1.6, **page 11.**

1. Oui. La somme de fonctions croissantes est croissante.
Soient $f, g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ croissantes. Posons $h = f + g$. Pour tous $x, y \in \mathrm{I}$ tels que $x \leqslant y$, on a :

$$f(x) \leqslant f(y) \quad \text{et} \quad g(x) \leqslant g(y).$$

$$h(x) = f(x) + g(x) \leqslant f(y) + g(y) = h(y).$$

h est bien croissante.

2. Non. Le produit de deux fonctions croissantes n'est pas toujours une fonction croissante.
Donnons un contre-exemple. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x$ est croissante mais la fonction carrée $f \cdot f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

Par contre, on peut montrer que cela devient vrai si l'une des fonctions est positive.

Solution 1.7, **page 12.**

Notons que les fonctions sont paires.
• $x \mapsto 1 + x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$, $x \mapsto 1/(1+x^2)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ car $x \mapsto 1/x$ est décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$. Par parité, $x \mapsto 1/(1+x^2)$ est croissante sur $\mathbb{R}^-$.
• On réécrit l'expression de la seconde fonction :

$$\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

Ainsi, $x \mapsto x^2/(1+x^2)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.
• Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Les variations sont identiques à la fonction précédente puisque pour tout réel x, $\dfrac{x^2}{1+x^2} \in \mathbb{R}^+$.

Solution 1.8, **page 12.**

Plusieurs maladresses :
- Il faut écrire "La fonction $f : \; x \in \mathbb{R}^* \mapsto 1/x$"

et f est décroissante" au lieu de "La fonction $f(x) = 1/x$" et "$1/x$ est décroissante". En effet, $1/x$ et $f(x)$ ne sont pas des fonctions mais des nombres. Dans le même esprit, on ne peut pas écrire "$\left(\frac{1}{x}\right)'$" mais "$f'(x)$".

- De plus, il y a une mauvaise application du théorème, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle. La conclusion est même fausse, f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

$$-2 \leqslant 2, \quad \text{mais} \quad f(-2) \not\geqslant f(2).$$

Il vaut mieux appliquer le théorème sur $\mathbb{R}_*^+$ et $\mathbb{R}_*^-$. Dans ce cas, f est décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$ et sur $\mathbb{R}_*^-$.

Solution 1.9, **page 15.**

On trouve

$$\boxed{\lim_{\pm\infty} \mathrm{F} = 0, \quad \lim_{\pm\infty} \mathrm{G} = \pm\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\pm\infty} \mathrm{H} = 2.}$$

Solution 1.10, **page 16.**

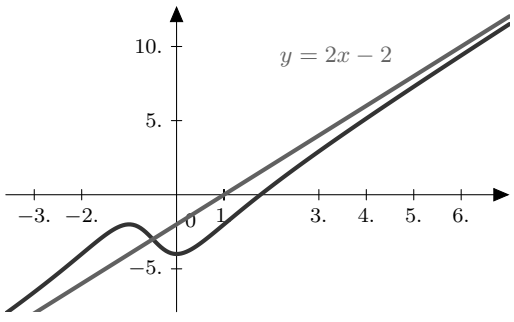
• On a $\dfrac{2x^3-4x-4}{x(x^2+x+1)} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 2$. De plus,

$$\begin{aligned}&\frac{2x^3-4x-4}{x^2+x+1} - 2x\\ &= \frac{2x^3-4x-4-2x(x^2+x+1)}{x^2+x+1}\\ &= \frac{-2(x^2+3x+2)}{x^2+x+1}.\end{aligned}$$

Ce quotient admet -2 comme limite en $\pm\infty$. En résumé, on a une asymptote oblique en $\pm\infty$ d'équation

$$\boxed{y = 2x - 2.}$$

Il n'y a pas d'asymptote verticale, puisqu'il y a pas de valeur interdite.



Étude de la position relative.
Soit $x \in \mathbb{R}$, vérifier que

$$\frac{2x^3-4x-4}{x(x^2+x+1)} - (2x-2) = -\frac{2(2x+1)}{x^2+x+1}.$$

L'asymptote est :
- en-dessous de la courbe représentative de f sur l'intervalle $]-\infty;-1/2]$;
- au-dessus de la courbe sur $[-1/2;+\infty[$.

• Pour le second exemple, on peut simplifier l'argument en remarquant que :

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}.$$

On a une asymptote horizontale en $\pm\infty$ d'équation $y = 1$ et une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

Étude de la position relative.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a

$$\frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{2}{x-1}.$$

L'asymptote est en-dessous de la courbe représentative sur l'intervalle $]-\infty;1[$ et au-dessus sur $]1;+\infty[$.

Solution 1.11, **page 16.**

1. On a

$$\frac{x^3-x-3}{x(2x^2+1)} = \frac{1-1/x^2-3/x^3}{2+1/x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

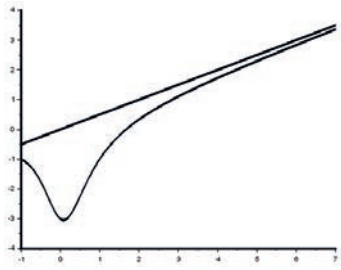
De plus,

$$\begin{aligned}\frac{x^3-x-3}{2x^2+1} - \frac{x}{2} &= \frac{x^3-x-3-x/2(2x^2+1)}{2x^2+1}\\ &= \frac{-5/2x-3}{2x^2+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

La droite d'équation $y = x/2$ est l'asymptote de f en $+\infty$.

2. Un code possible est :

```
x=linspace(-1,7,200);
// x contient 200 nombres répartis
// uniformément entre -1 et 7.
y=(x.^3-x-3)./(2*x.^2+1);
// Calcul des images
plot2d(x,y);plot2d(x,x/2)
```



Solution 1.12, page 18.

• On a

$$\begin{aligned} a^2 &= 4-\sqrt{7}+4+\sqrt{7}-2\sqrt{(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})} \\ &= 8-2\sqrt{4^2-\sqrt{7}^2} = 8-2\sqrt{9} = 2. \end{aligned}$$

Comme a est négatif, $a = \boxed{-\sqrt{2}.}$

• De plus,

$$\begin{aligned} b &= \frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{5}-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} \\ b &= \boxed{\frac{5+\sqrt{5}}{4}.} \end{aligned}$$

Solution 1.13, page 20.

Les fonctions sont dérivables par composition et produit (pour la seconde) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On trouve pour tout réel x :

$$f'(x) = 4(x+1)^3 \exp\left((x+1)^4\right)$$

et $\quad g'(x) = (3x^4+2x^2+2x)\exp(x^3+2x+2).$

Solution 1.14, page 22.

1. • $\ln(e\sqrt{e}) = \ln(e^{3/2}) = 3/2\ln(e) = \boxed{3/2.}$

• De plus,

$$\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+\ln(2-\sqrt{3}) = \ln\left(\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)\right)$$

$$= \ln\left(2^2-\sqrt{3}^2\right) = \ln(1) = \boxed{0.}$$

• Et,

$$\begin{aligned} &\ln\left(\sqrt{1+\sqrt{3}}\right)+\ln\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{3}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{3}-1\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\right) = \boxed{\frac{1}{2}\ln(2).} \end{aligned}$$

2. • Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\ln\left(e^x+1\right)-\ln\left(e^{-x}+1\right) = \ln\left(e^x+1\right)-\ln\left(e^{-x}(1+e^x)\right)$$

$$= \ln\left(e^x+1\right)-\ln\left(e^{-x}\right)-\ln\left(1+e^x\right) = x.$$

• Soit $x \in \mathbb{R}$. On a de même :

$$\begin{aligned} &\ln\left(e^x+3x\right)-\ln\left(1+3xe^{-x}\right) \\ &= \ln\left(e^x+3x\right)-\ln\left(e^{-x}(e^x+3x)\right) \\ &= \ln\left(e^x+3x\right)-\ln\left(e^{-x}\right)-\ln\left(e^x+3x\right) = x. \end{aligned}$$

Solution 1.15, page 22.

On trouve pour le graphique de gauche :

$$\boxed{\alpha_1 = -2 \quad \text{et} \quad \alpha_3 = -1/2.}$$

Pour le graphique de droite :

$$\boxed{\alpha_4 = 2,\ \alpha_5 = \frac{4}{3},\ \alpha_7 = \frac{3}{4},\ \alpha_8 = \frac{1}{2}.}$$

Solution 1.16, page 23.

• Pour $x \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\frac{\exp(x)}{\ln(x)} = \left(\frac{\exp(x)}{x}\right)\cdot\left(\frac{x}{\ln(x)}\right).$$

Par *les croissances comparées,* et par produit,

$$\boxed{\frac{\exp(x)}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

• Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\frac{\exp\left(x+2\ln(x)\right)}{x^4+1} = x^2\frac{\exp(x)}{x^4+1} = \frac{1}{1+1/x^4}\cdot\frac{\exp(x)}{x^2}.$$

Par *les croissances comparées,* et par produit,

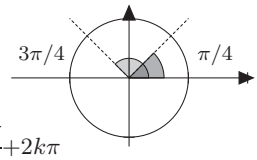
$$\boxed{\frac{\exp\left(x+2\ln(x)\right)}{x^4+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

Solution 1.17, page 24.

• $\sin(2x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff$

$\exists\, k \in \mathbb{Z},\ 2x = \dfrac{\pi}{4}+2k\pi$

ou $\quad \exists\, k \in \mathbb{Z},\quad 2x = \dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$

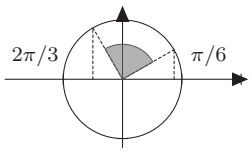


x est solution si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\boxed{x = \frac{\pi}{8} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{3\pi}{8} + k\pi.}$$

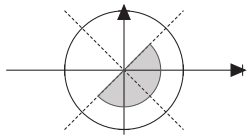
• $-\frac{1}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(x) \geqslant 0$ si et seulement si il existe un entier k tel que :

$$\boxed{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant 2\frac{\pi}{3} + 2k\pi.}$$



• Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin(x) \leqslant \cos(x)$ si et seulement si il existe un entier k tel que :

$$\boxed{-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + 2k\pi.}$$



Solution 1.18, **page 25.**

Les fonctions sont dérivables par composition de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{f'(x) = 3\cos(x)\sin(x)^2, \quad g'(x) = 3x^2\cos(x^3).}$$

Solution 1.19, **page 26.**

• Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) &= \cos(\theta+\theta) = \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 \\ &= \cos(\theta)^2 - \left(1 - \cos(\theta)^2\right) \\ &= 2\cos(\theta)^2 - 1. \end{aligned}$$

Pour $\theta = \pi/12$, $\quad \cos(\pi/6) = 2\cos(\pi/12)^2 - 1.$

Sachant que $\cos(\pi/12)$ est positif et $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$,

$$\boxed{\cos(\pi/12) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}.}$$

• En utilisant *la relation de Pythagore*,

$$\cos(\pi/12)^2 + \sin(\pi/12)^2 = 1,$$

$$\boxed{\sin(\pi/12) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}} \quad \text{car} \quad \sin(\pi/12) > 0.$$

• Puis,

$$\begin{aligned} \tan(\pi/12) &= \frac{\sin(\pi/12)}{\cos(\pi/12)} \\ &= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} \\ \tan(\pi/12) &= \boxed{2-\sqrt{3}.} \end{aligned}$$

Car on reconnaît l'identité remarquable,

$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 1.$$

Solution 1.20.

Posons $\varphi(x) : \ x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto x\ln(x)$ de sorte que pour tout $x > 0$, on a

$$x^x = e^{x\ln(x)} = e^{\varphi(x)}.$$

φ est dérivable par produit sur $\mathbb{R}_*^+$ avec pour tout $x > 0$

$$\varphi'(x) = \ln(x) + 1.$$

Par composition ($f = \exp \circ \varphi$), f est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ avec pour tout $x > 0$:

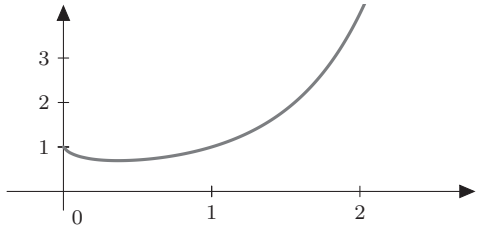
$$f'(x) = \varphi'(x)e^{\varphi(x)}.$$

f' et φ' sont de même signe. Il vient que f' est positive sur l'intervalle $[1/e; +\infty[$ et négative sur $]0; 1/e]$. La fonction est donc croissante sur $[1/e; +\infty[$ et croissante sinon.
De plus, on a les limites par *les croissances comparées* :

$$x\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Par composition,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1.$$



SOLUTIONS

Solution 1.21.

• Supposons qu'il existe x une solution positive de $x = 2\sqrt{x} + 3$. Ainsi,

$$x - 3 = 2\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2 = 4x$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 10x + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \{1, 9\}.$$

Testons :

$$1 \neq 2\sqrt{1} + 3 \quad \text{et} \quad 9 = 2\sqrt{9} + 3$$

1 est à exclure, il y a une unique solution $\boxed{x = 9.}$

• Notons que l'expression a un sens pour $x > 1$. Soit $x > 1$, x est solution si et seulement si

$$\ln\big(3x(x-1)\big) = \ln(2 \cdot 3^2) = \ln(18) \iff$$

$$3x(x-1) = 18 \iff x^2 - x - 6 = 0.$$

Il y a deux solutions réelles données par 3 et -2. La seconde solution n'appartient pas à $]1; +\infty[$, il y a finalement que $\boxed{3}$ comme solution de la seconde équation.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $\mathrm{X} = 5^x$ de sorte que x est solution si et seulement si

$$\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 2 = 0 \iff \mathrm{X} \in \{1; 2\}.$$

C'est équivalent à $\quad 5^x = 1 \quad$ ou $\quad 5^x = 2.$

C'est-à-dire, $\quad e^{x\ln(5)} = 1 \quad$ ou $\quad e^{x\ln(5)} = 2,$

Puis, par composition avec la fonction logarithme (bijective de $\mathbb{R}_*^+$ dans $\mathbb{R}$),

$$x\ln(5) = 0 \quad \text{ou} \quad x\ln(5) = \ln(2).$$

Finalement, il y a deux solutions

$$\boxed{x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \ln(2)/\ln(5).}$$

Solution 1.22.

Par définition de la puissance,

$$x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\ln(x)},$$

et $\qquad \sqrt{x}^x = e^{x\ln(\sqrt{x})}.$

Ces expressions ne sont valables que pour $x \in \mathbb{R}_*^+$. Comme la fonction exponentielle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_*^+$,

$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x \iff e^{\sqrt{x}\ln(x)} = e^{x\ln(\sqrt{x})} \iff$$

$$\sqrt{x}\ln(x) = x\ln(\sqrt{x}) \iff \sqrt{x}\ln(x) = \frac{1}{2}x\ln(x).$$

- Si $\ln(x) = 0$, $x = 1$ est une solution.
- Sinon, $\ln(x) \neq 0$ et $\sqrt{x} = \frac{1}{2}x$. C'est-à-dire, $x = 4$.

En conclusion, il y a deux solutions strictement positives,

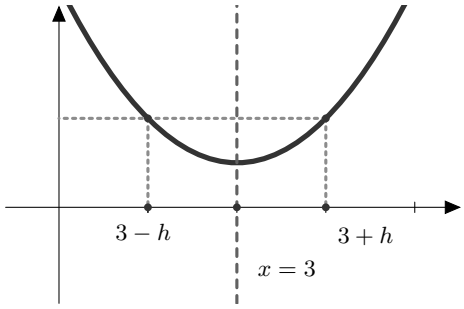
$$\boxed{1 \quad \text{et} \quad 4.}$$

Avec la convention $0^0 = 1$, 0 est aussi une solution.

Solution 1.23.

• La symétrie par rapport à l'axe $x = 3$ se traduit par

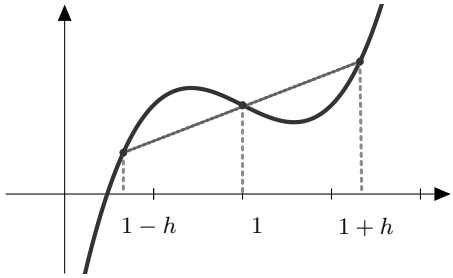
$$\boxed{\forall\, h \in \mathbb{R}, \qquad f(3+h) = f(3-h).}$$



• La symétrie centrale par rapport au point A $(1, 2)$ se traduit par :

$$\boxed{\forall\, h \in \mathbb{R}, \quad \frac{f(1-h) + f(1+h)}{2} = 2.}$$

En effet, le milieu du segment ayant pour extrémités $\big(1-h, f(1-h)\big)$ et $\big(1+h, f(1+h)\big)$ a pour milieu A $(1, 2)$.



Solution 1.24.

1. Pour tout réel x, on a

$$x^2 < x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{x^2+1} < x < \sqrt{x^2+1}.$$

Ainsi, $\quad \sqrt{x^2+1} + x > 0 \quad$ et $\quad \sqrt{x^2+1} - x > 0.$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, en utilisant les propriétés du logarithme :

$$\begin{aligned}
&\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\\
&= \ln\left(\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\right)\\
&= \ln\left(\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-x^2\right)\\
&= \ln(x^2+1-x^2)=\ln(1)=\boxed{0.}
\end{aligned}$$

3. φ est dérivable comme composée de la fonction racine (dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$) et la fonction $x \mapsto x^2+1$ à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(x) = 1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

De nouveau, u est dérivable par composition, avec pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Notons que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\\
&= u(x)+u(-x).
\end{aligned}$$

Par dérivation, on trouve

$$f'(x) = u'(x)-u'(-x) = 0.$$

Car u' est une fonction paire. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle et que f est de dérivée nulle, f est une fonction constante. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(0) = \ln(1)+\ln(1) = 0.$$

Solution 1.25.

1.(a) On a

$$\begin{aligned}
ab &= -\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\\
&= -\left(\sqrt{5}+2\right)^{1/3}\left(\sqrt{5}-2\right)^{1/3}\\
&= -\left((\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)\right)^{1/3}\\
ab &= -\left(\sqrt{5}^2-2^2\right)^{1/3} = \boxed{-1.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^3+b^3 &= \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}^3-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}^3\\
&= \sqrt{5}+2-\sqrt{5}+2 = \boxed{4.}
\end{aligned}$$

1.(b) On développe

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
&= (a^3+b^3)+3ab(a+b)\\
(a+b)^3 &= 4-3(a+b).
\end{aligned}$$

2.(a) $\boxed{1}$ est une racine évidente.

2.(b) Comme 1 est une racine évidente, on peut chercher deux réels α, β tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{P}(x) = (x-1)(x^2+\alpha x+\beta).$$

Dans ce cas,

$$\mathrm{P}(x) = x^3+(\alpha-1)x^2+(\beta-\alpha)x-\beta.$$

Par identification, on trouve $\alpha-1=0$, $\beta-\alpha=3$ et $-\beta=-4$. C'est-à-dire $\alpha=1$ et $\beta=4$. Il reste à factoriser x^2+x+4. Le discriminant est $\Delta=-15$. On a deux nouvelles racines complexes conjuguées $x_\pm = (-1\pm \mathrm{i}\sqrt{15})/2$.

2.(c) On a $\mathrm{P}(a+b) = (a+b)^3+3(a+b)-4 = 0$. $a+b$ est l'unique racine réelle de P. Autrement dit,

$$\boxed{a+b=1.}$$

3.(a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{Q}(x) = (x-a)(x-b) = x^2-(a+b)x+ab = x^2-x-1.$$

3.(b) Par un calcul de discriminant, les racines de Q sont

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

De plus, a et b sont les racines de Q. Comme a et b sont respectivement positif et négatif, on obtient

$$\boxed{a=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.}$$

Solution 1.26.

1.(a) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(-x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = f(x).$$

Ceci étant valable pour tout réel x,

$$\boxed{f \text{ est une fonction paire.}}$$

1.(b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a

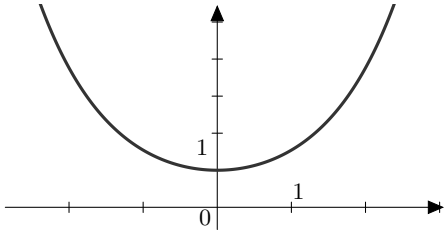
$$f'(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \frac{e^x}{2}\left(1-e^{-2x}\right).$$

On constate que pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant 0.$$

f est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.
Précisons les limites :

$$f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$



1.(c) • D'après l'étude précédente, on a directement $f(x) = 1$ si et seulement si $\boxed{x = 0.}$

• De plus, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} f(x) = 2 &\iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \\ &\iff e^x - e^{-x} - 4 = 0 \\ &\iff \mathrm{X} + \mathrm{X}^{-1} - 4 = 0 \\ &\qquad \text{où } \mathrm{X} = e^x > 0 \\ &\iff \mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X} + 1 = 0. \end{aligned}$$

Cette équation polynomiale de degré 2 est résoluble via un discriminant :

$$\mathrm{X}_1 = 2 - \sqrt{3} \quad \text{et} \quad \mathrm{X}_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

Finalement, on trouve deux solutions

$$\boxed{\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right).}$$

1.(d) • Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} 2f(x)^2 - 1 &= 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1 \\ &= 2 \cdot \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - 1 \\ 2f(x)^2 - 1 &= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = f(2x). \end{aligned}$$

• D'après ce qui précède,

$$f(2x) + 5 = 2f(x)^2 + 4.$$

x est solution de $f(2x) + 5 = 6f(x)$ si et seulement si

$$f(x)^2 - 3f(x) + 2 = 0.$$

$f(x)$ est solution de l'équation polynomiale de degré 2 :

$$\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 2 = 0.$$

Cette dernière a deux solutions : 1 et 2. D'après la question 1.(c), les trois solutions sont :

$$\boxed{0 \quad \text{et} \quad \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right).}$$

2.(a) La fonction f restreinte à $[0; +\infty[$ est strictement croissante et continue avec

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

D'après *le théorème de la bijection*, f définie une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[1; +\infty[$.

2.(b) On a vu à la question 1 de l'exercice 1.24 que $y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$. $h(y)$ est donc bien défini.

2.(c) Soit $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f\big(h(y)\big) &= \frac{e^{h(y)} + e^{-h(y)}}{2} \\ &= \frac{y + \sqrt{y^2 - 1} - \dfrac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}}}{2} \\ &= \frac{2y^2 + 1 + 2y\sqrt{y^2 - 1} - 1}{2(y + \sqrt{y^2 - 1})} = y. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{h \text{ est l'application réciproque de } f.}$$

3.(a) Notons que $\mathrm{S}_n(0) = n + 1$ puisque la somme contient $n + 1$ termes 1.
Pour $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, on a $\exp(x) \neq 1$ et

$$\mathrm{S}_n(x) = 1 + e^x + \left(e^x\right)^2 + \cdots + \left(e^x\right)^n = \frac{1 - \left(e^x\right)^{n+1}}{1 - e^x}.$$

D'où, $\boxed{\mathrm{S}_n(x) = \dfrac{1 - e^{x(n+1)}}{1 - e^x}.}$

3.(b) Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\mathrm{C}_n(x) = \frac{\mathrm{S}_n(x) + \mathrm{S}_n(-x)}{2}.}$$

3.(c) Or, pour $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_n(x) &= \frac{1 - e^{x(n+1)}}{1 - e^x} \\ &= \frac{e^{x(n+1)/2}}{e^{x/2}} \cdot \frac{e^{-x(n+1)/2} - e^{x(n+1)/2}}{e^{-x/2} - e^{x/2}} \\ \mathrm{S}_n(x) &= e^{xn/2} \frac{f'\big((n+1)x/2\big)}{f'(x/2)}. \end{aligned}$$

Comme f' est impaire, on a aussi :

$$\mathrm{S}_n(-x) = e^{-xn/2} \frac{f'\big((n+1)x/2\big)}{f'(x/2)}.$$

Finalement,

$$\boxed{\mathrm{C}_n(x) = f(nx/2) \frac{f'\big((n+1)x/2\big)}{f'(x/2)}.}$$

Précisons que $\mathrm{C}_n(0) = n + 1$.

CHAPITRE 2

Nombres complexes et équations polynomiales

Dans ce qui suit, on suppose l'ensemble des nombres complexes construit. En particulier, il existe un élément i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$. Les règles de calculs sont semblables aux règles de calculs sur $\mathbb{R}$. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

I Nombres complexes

I.1 Forme algébrique

DÉFINITION — **Forme algébrique**

Tout nombre complexe z peut s'écrire sous la forme $z = a + \mathrm{i}b$ où a et b sont deux nombres réels. Cette expression s'appelle la ***forme algébrique*** *de z. Les nombres a et b sont uniques et sont appelés respectivement* ***partie réelle*** *et* ***partie imaginaire****, on note*

$$\Re e(z) = a \quad et \quad \Im m(z) = b.$$

Vocabulaire. Lorsque la partie réelle est nulle, on dit que le nombre est un **imaginaire pur**.

Remarque. D'après l'unicité de la forme algébrique, un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

PROPOSITION — **Règles de calcul sur les parties réelles et imaginaires**

Soient z et z' deux nombres complexes et α un nombre réel, on a

(addition) *(multiplication par un réel)*

$$\left.\begin{array}{rcl}\Re e(z+z') &=& \Re e(z) + \Re e(z') \\ \Im m(z+z') &=& \Im m(z) + \Im m(z')\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl}\Re e(\alpha z) &=& \alpha \Re e(z) \\ \Im m(\alpha z) &=& \alpha \Im m(z)\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl}\Re e(zz') &=& \Re e(z)\Re e(z') - \Im m(z)\Im m(z') \\ \Im m(zz') &=& \Re e(z)\Im m(z') + \Im m(z)\Re e(z')\end{array}\right\} \quad \textit{(produit).}$$

Remarque. On a la propriété d'intégrité : comme dans le cas réel, un produit de nombres complexes est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Autrement dit,

$$zz' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\, z = 0 \quad \text{ou} \quad z' = 0\,).$$

Définition — **Nombre conjugué**

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ un complexe sous forme algébrique, on définit le ***conjugué*** *de z, noté $\overline{z}$, par la formule*

$$\overline{z} = a - \mathrm{i}b.$$

Pour z_1 et z_2 deux nombres complexes ($z_2 \neq 0$ dans le dernier cas), on prouve

$$\overline{\overline{z_1}} = z_1, \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad \text{et} \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

On gardera toujours à l'esprit les formules : $\boxed{\Re e(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \Im m(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}.}$

Méthode. Comment calculer la forme algébrique d'un quotient de complexes ?

On multiplie et on divise par **l'expression conjuguée** du dénominateur. Par exemple

$$\frac{7 - \mathrm{i}}{4 + 3\mathrm{i}} = \frac{(7 - \mathrm{i})(4 - 3\mathrm{i})}{(4 + 3\mathrm{i})(4 - 3\mathrm{i})} = \frac{28 - 21\,\mathrm{i} - 4\mathrm{i} - 3}{4^2 + 3^2} = \frac{25 - 25\mathrm{i}}{25} = 1 - \mathrm{i}.$$

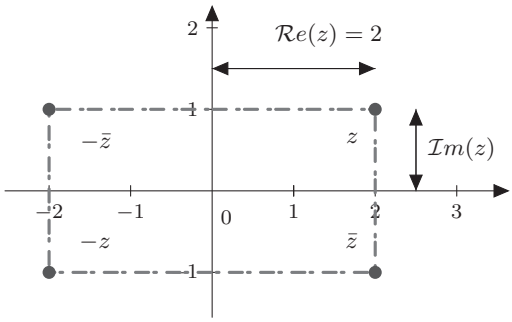
Exercice 2.1. Réduire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

$$\frac{\mathrm{i}^4 + 2\mathrm{i}^3 + 5\mathrm{i}^2 + 2\mathrm{i} + 6}{\mathrm{i}}, \quad (1 + 2\mathrm{i})^2, \quad (1 + \mathrm{i})^3, \quad \frac{8 - 6\mathrm{i}}{7 + \mathrm{i}}, \quad \mathrm{i}^{-77}, \quad \left(\frac{2\mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}\right)^4 \quad \text{et} \quad \left(\frac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}\right)^{777\,!}.$$

Par définition, $777! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 776 \times 777$.

Représentation graphique des nombres complexes

Dans la suite, on se place dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
À tout point du plan M d'abscisse x et d'ordonnée y, on associe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$.
z est dit l'**affixe** du point M. Et inversement, à tout nombre complexe z, on peut associer un point du plan.
Pour $z = 2 + \mathrm{i}$:



De plus,

- Le point d'affixe $-z$ est le symétrique de M par la symétrie centrale de centre l'origine;
- Le point d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique de M par la symétrie axiale suivant l'axe des abscisses;
- Le point d'affixe $-\bar{z}$ est le symétrique de M par la symétrie axiale suivant l'axe des ordonnées.

I.2 Formes trigonométrique et exponentielle

La représentation graphique précédente justifie une nouvelle caractérisation d'un nombre complexe par la distance à l'origine et l'angle formé avec l'axe (Ox). Ce qui justifie les définitions suivantes.

Définition — **Module et argument**

Pour tout nombre complexe z, on pose :

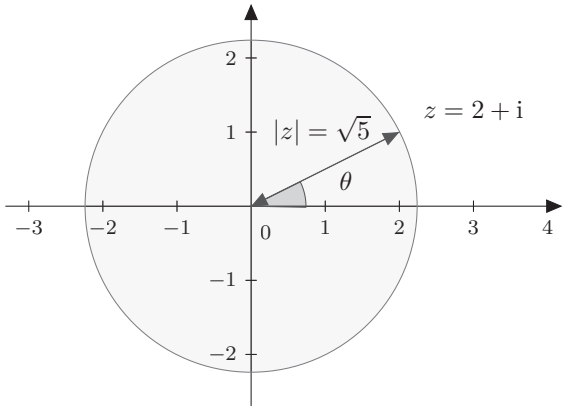
- *Le* ***module*** *de z, noté $|z|$, comme la distance entre le point* M *d'affixe z et l'origine,*

$$|z| = \sqrt{\Re e(z)^2 + \Im m(z)^2} \qquad \textit{(Théorème de Pythagore).}$$

- ***L'argument*** *de $z \neq 0$, noté* $\arg(z)$*, toute mesure (définie modulo 2π) de l'angle entre l'axe* (Ox) *et la droite* (OM).

- On ne peut pas parler de l'argument de 0.
- Dans la suite, $a \equiv b\,[2\pi]$ si, et seulement si, il existe un entier k pour lequel $a = b + 2k\pi$. On n'oubliera pas qu'un argument est toujours défini modulo 2π.

Exemple. On a $z \in \mathbb{R}^*$ si et seulement si $\arg(z) \equiv 0\,[\pi]$, et z est un imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$.



Remarques. • Comme le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue, il n'y a pas de contradiction à utiliser la même notation.
• Pour $z \in \mathbb{C}$, on a aussi $|\Re e(z)| \leqslant |z|$ et $|\Im m(z)| \leqslant |z|$.
• Retenons que si A et B sont deux points du plan d'affixe respective z_A et z_B alors :

La distance AB est égale à $\lvert z_B - z_A \rvert$.



Exercice 2.2. ($\star$). *Représentation graphique.*

1. Représenter l'ensemble des points M du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que :

   (a) $\mathcal{R}e(z) \geqslant 1$ et $\Im m(z) \geqslant 1$;
   (b) $|z| \leqslant 9$;
   (c) $|z - 1 + \mathrm{i}| < 1$;
   (d) $\Im m(z^2) = 0$.
   (e) $\Im m(z^2) = 2$.
   (f) $\Re e\big((z-1)^2\big) = 0$.

2. ($\star$). Soient $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. On suppose que α n'est pas réel. Justifier l'équivalence :

$$|z - \alpha| = |z - \overline{\alpha}| \iff z \in \mathbb{R}.$$

   Comment interpréter géométriquement cette équivalence ?

Proposition — **Règles de calcul pour le module**

Pour tous nombres complexes z, z_1, z_2, on a :

- $|z| \geqslant 0$ *avec égalité si et seulement si* $z = 0$;
- $|\overline{z}| = |z|$ *et* $z\overline{z} = |z|^2$;
- $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. *En particulier, pour tout entier naturel* n, $|z^n| = |z|^n$;
- *Pour* $z_2 \neq 0$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

Preuve. • Un module représente une distance, un module est donc toujours positif. De plus, pour $z \in \mathbb{C}$ fixé,

$$|z| = 0 \iff \Re e(z)^2 + \Im m(z)^2 = 0 \iff \Re e(z) = 0 \text{ et } \Im m(z) = 0 \iff z = 0.$$

• Soit $z = a + \mathrm{i}b$ un complexe sous forme algébrique. On a $\bar{z} = a - \mathrm{i}b$

$$|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b^2)} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

De plus,
$$z\overline{z} = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 - (\mathrm{i}b)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

• Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. En utilisant le résultat précédent : $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$. Comme les modules sont positifs $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. Par récurrence, on prouve que pour tout entier naturel n, $|z^n| = |z|^n$.
• La preuve pour le quotient est similaire au produit. ■



Exercice 2.3. *Identité du parallélogramme.*
Soient z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, justifier l'égalité : $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.



Attention. • Il n'existe pas de relation d'ordre sur les nombres complexes. Pour comparer des complexes, on peut comparer leurs modules.
• En général, $|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$. Par exemple $|1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2} \neq |1| + |\mathrm{i}|$. Toutefois, on a une inégalité.

Théorème — **Inégalité triangulaire**

Pour tous nombres complexes z_1 et z_2 : $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

Preuve. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes.

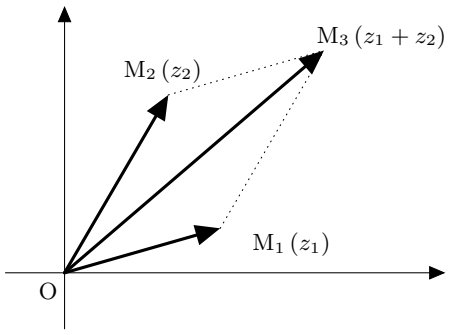
$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\Re e\,(z_1\overline{z_2})\,. \end{aligned}$$

Or on a vu que pour tout complexe Z, on a $\Re e\,(\mathrm{Z}) \leqslant |\mathrm{Z}|$. Pour $\mathrm{Z} = z_1\overline{z_2}$, il vient

$$|z_1 + z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \cdot |\overline{z_2}| = \big(|z_1| + |z_2|\big)^2.$$

Comme les modules sont positifs, on a bien prouvé l'inégalité. ■

Interprétation géométrique



Si M_1, M_2 et M_3 sont trois points du plan d'affixe respective z_1, z_2 et $z_1 + z_2$, alors

$$\mathrm{OM}_3 \leqslant \mathrm{OM}_1 + \mathrm{OM}_2.$$

La distance entre M_3 et l'origine est inférieure à la somme des distances de M_1 et M_2 à l'origine. Autrement dit, la somme des longueurs côtés adjacents d'un parallélogramme est inférieure à la longueur des diagonales.



Exercice 2.4. *Applications de l'inégalité triangulaire.*

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - 4| \leqslant 3$ et $|z - 2\mathrm{i}| \leqslant 7$. Montrer que $\big|z - (2 + \mathrm{i})\big| \leqslant 5$. Faire un dessin pour illustrer cette inégalité.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - 1/2| \leqslant 1/2$. Montrer que $|z(1 - z) - 1/2| \leqslant 1/2$.
3. Justifier que pour tous nombres complexes z_1, z_2, $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 + z_2|$.

Définition - Proposition — **Forme trigonométrique**

Tout nombre complexe z s'écrit sous la forme

$$z = r\cos(\theta) + \mathrm{i}r\sin(\theta) \quad \textit{avec} \quad r \geqslant 0 \quad \textit{et} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Preuve. Si $z = 0$, on peut choisir $r = 0$ et tout réel θ.
Dans la suite, z est un nombre complexe non-nul. Notons $z = a + \mathrm{i}b$ la forme algébrique. On écrit :

$$z = a + \mathrm{i}b = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \mathrm{i}\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right).$$

De plus, $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1;1]$, ce nombre est donc compris entre $\cos(\pi) = -1$ et $\cos(0) = 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (la fonction cosinus est continue), il existe un réel $\theta \in [0;\pi]$ tel que :

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Le théorème de Pythagore impose : $\sin(\theta)^2 = 1 - \cos(\theta)^2 = \dfrac{b^2}{a^2+b^2}$.

Quitte à remplacer θ par $-\theta$, on peut prendre θ du même signe que b. Ainsi, on a bien

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

On conclut : $z = \sqrt{a^2+b^2}\,\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}r\sin(\theta)\big)$.

Remarque. Pour z *non nul*, r est unique et s'identifie au module, θ ne l'est pas, il s'identifie (modulo 2π) à l'argument. Pour que θ soit défini de manière unique, on peut imposer en plus $\theta \in [0;2\pi[$, on parle alors d'**argument principal**.

Rappels de quelques valeurs importantes :

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos(\theta)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin(\theta)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0

Proposition — **Règles de calcul pour l'argument**

Pour tous nombres complexes z, z_1, z_2 non nuls :

- *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$, $\arg(\lambda z) \equiv \arg(z)\,[2\pi]$;
- $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\,[2\pi]$;
- $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\,[2\pi]$, *en particulier, pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\,[2\pi]$;
- $\arg(z_1/z_2) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)\,[2\pi]$.

Idée de la preuve. • Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et M le point d'affixe z. Pour $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$, le point d'affixe λz se situe sur la même demi-droite que O et M. On a donc le même argument (modulo 2π).
• Le second point découle directement du fait que M′ d'affixe $\bar{z}$ s'obtient par symétrie axiale d'axe $(\mathrm{O}x)$ à partir de M d'affixe z.
• D'après le premier point, on peut supposer z_1 et z_2 de module 1. Ainsi, il existe θ_1, θ_2 tels que

$$z_1 = \cos(\theta_1) + \mathrm{i}\sin(\theta_1) \quad \text{et} \quad z_2 = \cos(\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad z_1 z_2 &= \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \mathrm{i}\big(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\big) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2). \end{aligned}$$

D'où, $\arg(z_1 z_2) \equiv \theta_1 + \theta_2 \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]$.

Le cas particulier s'obtient par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. De plus, pour n entier négatif, on écrit

$$0 \equiv \arg(z^n \cdot z^{-n}) \equiv \arg(z^n) + \arg(z^{-n}) \equiv \arg(z^n) - n\arg(z),$$

puisque $-n \in \mathbb{N}$. D'où le résultat.
• Le dernier point est une conséquence du second et du troisième points. ■

Définition — **Exponentielle complexe et forme exponentielle**

Pour tout nombre réel θ, on pose $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
Ainsi, tout nombre complexe z s'écrit sous la forme (dite exponentielle)

$$z = re^{i\theta} \quad \textit{avec} \quad r \geqslant 0 \quad \textit{et} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Exemples. • Une des relations les plus connues en mathématiques est : $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0.}$

• Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\theta} = 1 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \theta = 2k\pi.$$



Exercice 2.5. ($\star$). Chercher l'erreur : $-1 = e^{i\pi} = e^{\frac{1}{2}\cdot 2i\pi} = \left(e^{2i\pi}\right)^{1/2} = 1^{1/2} = \sqrt{1} = 1.$

Proposition — **Règles de calcul pour les complexes de module 1**

• *Soit $z \in \mathbb{C}$. On a l'équivalence entre les énoncés :*

i) z est de module 1; *ii) Il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$.*

• *Pour tous réels θ, θ',* $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ *et* $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

Preuve. • Soit $z \in \mathbb{C}$. On écrit z sous forme exponentielle $z = re^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$. D'après le théorème de Pythagore :

$$|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1.$$

Ainsi,

$$|z| = \left|re^{i\theta}\right| = |r| \cdot |e^{i\theta}| = r.$$

Finalement, z est de module 1 si et seulement si $r = 1$, si et seulement si $z = e^{i\theta}$.
• En utilisant le fait que la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus paire, on a aussi pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos(\theta) + i\sin(\theta)} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}.$$

- Soient θ, $\theta' \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} e^{i\theta}e^{i\theta'} &= \big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)\big(\cos(\theta') + i\sin(\theta')\big) \\ &= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i\left(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')\right). \end{aligned}$$

En utilisant les formules trigonométriques, $e^{i\theta}e^{i\theta'} = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') = e^{i(\theta+\theta')}$.

- En particulier pour θ fixé et $\theta' = -\theta$, on trouve $e^{\mathrm{i}\theta}e^{-\mathrm{i}\theta} = e^{\mathrm{i}(\theta-\theta)} = e^0 = 1$. Cela implique $e^{-\mathrm{i}\theta} = \dfrac{1}{e^{\mathrm{i}\theta}}$. Finalement, pour tous réels θ, θ' fixés, on a

$$\frac{e^{\mathrm{i}\theta}}{e^{\mathrm{i}\theta'}} = e^{\mathrm{i}\theta}e^{-\mathrm{i}\theta'} = e^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}.$$



Exercice 2.6. ($\star$). Donner la forme exponentielle des nombres suivants :

$$-3, \quad 1/(1-\mathrm{i}), \quad 2\sqrt{3}-2\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^{42}\frac{(2-2\mathrm{i})^2}{\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^8}, \quad \left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^{12}.$$

Proposition — **Formules d'Euler**

Pour tout réel θ,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \quad \textit{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{\mathrm{i}\theta}-e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$

Preuve. Pour rappel, si $z \in \mathbb{C}$, alors

$$\Re e(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \Im m(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}.$$

En particulier, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) = \Re e\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right) = \dfrac{e^{\mathrm{i}\theta}+\overline{e^{\mathrm{i}\theta}}}{2} = \dfrac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$.

De même, $\sin(\theta) = \Im m\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right) = \dfrac{e^{\mathrm{i}\theta}-\overline{e^{\mathrm{i}\theta}}}{2\mathrm{i}} = \dfrac{e^{\mathrm{i}\theta}-e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$.

La notation complexe permet de *retrouver* rapidement les formules trigonométrique sur $\cos(a \pm b)$ et $\sin(a \pm b)$. Pour la première, on écrit :

$$\begin{aligned}
\cos(a+b)+\mathrm{i}\sin(a+b) &= e^{\mathrm{i}(a+b)} \\
&= e^{\mathrm{i}a}e^{\mathrm{i}b} \\
&= \big(\cos(a)+\mathrm{i}\sin(a)\big)\big(\cos(b)+\mathrm{i}\sin(b)\big) \\
\cos(a+b)+\mathrm{i}\sin(a+b) &= \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)+\mathrm{i}(\underbrace{\cdots}_{\in\mathbb{R}}).
\end{aligned}$$

Par unicité de la partie réelle, $\boxed{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b).}$ ♣

De même, par unicité de la partie imaginaire, $\boxed{\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b).}$ ♣

Ces relations étant vraies pour tout $b \in \mathbb{R}$, on en déduit directement

$\boxed{\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b).}$ ♣

Méthode. Les formules d'Euler et l'arc-moitié.

Lorsqu'on dispose, dans une somme ou un produit, d'une expression du type $e^{\mathrm{i}\theta} \pm e^{\mathrm{i}\theta'}$, on peut essayer de factoriser par $e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')/2}$ et d'utiliser les formules d'Euler. Précisons par l'exemple.

- *Exemple 1.* Calculons le module de $1 + e^{\mathrm{i}\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

On a $$1 + e^{\mathrm{i}\theta} = e^{\mathrm{i}\theta/2}\left(e^{-\mathrm{i}\theta/2} + e^{\mathrm{i}\theta/2}\right) = 2\cos(\theta/2)e^{\mathrm{i}\theta/2}.$$

On en déduit le module : $$\left|1 + e^{\mathrm{i}\theta}\right| = |2\cos(\theta/2)| \cdot \left|e^{\mathrm{i}\theta/2}\right| = 2|\cos(\theta/2)|.$$

- *Exemple 2.* Soient p, q deux réels. On a

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}p} + e^{\mathrm{i}q} &= e^{\mathrm{i}(p+q)/2}\left(e^{\mathrm{i}(p-q)/2} + e^{-\mathrm{i}(p-q)/2}\right) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)e^{\mathrm{i}(p+q)/2} \\ &= 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Par unicité de la partie imaginaire et réelle, on trouve :

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right), \quad \cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

Exercice 2.7. *Exemples.* *Les questions 1,2 et 3 sont indépendantes.*

1. Soient θ, φ deux réels. Calculer le module de $e^{2\mathrm{i}\theta} - e^{2\mathrm{i}\varphi}$.
2. ($\star$). Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{2\mathrm{i}\pi k/n}$. Justifier que $(1+\omega)^n \in \mathbb{R}$.
3. ($\star$). Soit θ un réel distinct de π modulo 2π. On pose $\mathrm{Z} = \dfrac{e^{\mathrm{i}\theta/2} - e^{-\mathrm{i}\theta/2}}{e^{\mathrm{i}\theta/2} + e^{-\mathrm{i}\theta/2}}$.
   (a) Vérifier que $\mathrm{Z} = \mathrm{i}\tan(\theta/2)$.
   (b) En calculant $(1+\mathrm{Z}^2)/(1-\mathrm{Z}^2)$, prouver que $\cos(\theta) = \dfrac{1-\tan(\theta/2)^2}{1+\tan(\theta/2)^2}$.

Proposition — **Formule de Moivre**

Pour tout réel θ, pour tout entier relatif n, on a :

$$\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) = \big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big)^n.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que pour un entier n, $\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = e^{\mathrm{i}n\theta}$. ■

Exercice 2.8. ($\star$). Justifier que pour tout réel θ, $\cos(3\theta) = 4\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)$.

II Applications à la résolution des équations polynomiales

II.1 Résolution des équations polynomiales de degré 2

Racines carrées dans le cas complexe

Soit Z un nombre complexe, on appelle racine carrée de Z toute solution complexe z de

$$z^2 = \mathrm{Z}.$$

⚠ **Attention.** Précisons tout de suite que contrairement au cas réel, on n'emploie pas la notation $\sqrt{\cdot}$ pour un nombre complexe. En effet, si z est racine, $-z$ est aussi racine. Il n'y a donc pas unicité. On ne peut donc pas parler de *la* racine carrée d'un nombre complexe (non nul). Dans le cas réel, on rappelle que l'on choisit la racine comme la solution positive. Mais un nombre complexe n'a pas de signe.

Il est aisé d'avoir la racine carrée d'un nombre complexe si on connaît sa forme exponentielle.
Soit $\mathrm{Z} = \mathrm{R}\exp(\mathrm{i}\Theta)$, sous forme exponentielle ($\mathrm{R} \in \mathbb{R}^+$, $\Theta \in \mathbb{R}$). On vérifie que **pour $\mathrm{Z} \neq 0$, il y a exactement deux racines carrées** données par

$$z_1 = \sqrt{\mathrm{R}}\exp(\mathrm{i}\Theta/2) \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{\mathrm{R}}\exp(\mathrm{i}\Theta/2) = \sqrt{\mathrm{R}}\exp(\mathrm{i}\Theta/2 + \pi).$$

Exemples. • Donnons les deux racines carrées de 2i. On a $2\mathrm{i} = 2e^{\mathrm{i}\pi/2}$. Les racines sont :

$$\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\pi/4} = 1 + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad -\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\pi/4} = -1 - \mathrm{i}.$$

• De même, les racines carrées de $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\pi/4}$ sont *sous forme exponentielle* :

$$2^{1/4}e^{\mathrm{i}\pi/8} \quad \text{et} \quad -2^{1/4}e^{\mathrm{i}\pi/4} = 2^{1/4}e^{\mathrm{i}9\pi/8}.$$

Toutefois, cette façon de procéder ne donne pas une bonne méthode pratique. En effet, à part pour des nombres complexes particuliers, il est difficile d'obtenir une expression simple de la forme exponentielle à cause de l'argument.



Méthode. **Calcul des racines carrées d'un complexe sous forme algébrique.**

Soit $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + \mathrm{i}\mathrm{Y} \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathbb{R}$. On cherche les solutions complexes z de $z^2 = \mathrm{Z}$.
On écrit la forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$. Une astuce consiste à rajouter à l'équation $z^2 = \mathrm{Z}$, l'équation sur les modules $|z|^2 = |\mathrm{Z}|$. Ainsi

$$z^2 = \mathrm{Z} \iff \begin{cases} z^2 &= \mathrm{Z} \\ |z|^2 &= |\mathrm{Z}| \end{cases} \iff \begin{cases} (x+\mathrm{i}y)^2 &= \mathrm{X}+\mathrm{i}\mathrm{Y} \\ |x+\mathrm{i}y|^2 &= |\mathrm{X}+\mathrm{i}\mathrm{Y}| \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy &= \mathrm{X}+\mathrm{i}\mathrm{Y} \\ |x+\mathrm{i}y|^2 &= |\mathrm{X}+\mathrm{i}\mathrm{Y}| \end{cases} \underset{\substack{\text{Unicité} \\ \text{partie réelle} \\ \text{et imaginaire}}}{\iff} \begin{cases} x^2 - y^2 &= \mathrm{X} \\ 2xy &= \mathrm{Y} \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2}. \end{cases}$$

Dès lors, on en déduit x^2 et y^2. Pour en déduire le signe, on utilise la seconde relation. Notons qu'on obtient pour $\mathrm{Z} \neq 0$, exactement deux solutions.

- Donnons un exemple, avec $\mathrm{Z} = 1 + \mathrm{i}$.

$$z^2 = \mathrm{Z} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 &= 1 \\ 2xy &= 1 \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 &= \dfrac{\sqrt{2}+1}{2} \\ xy &\geqslant 0 \\ y^2 &= \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}. \end{cases}$$

Ainsi x et y sont de même signe, on trouve les racines carrées *sous forme algébrique* :

$$z = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \quad \text{ou} \quad z = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$



Exercice 2.9. ($\star$). *Calculs de racines carrées.*

1. (a) Donner les formes algébriques des racines carrées de $\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$.

   (b) Exprimer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ à l'aide de racines carrées.

2. Donner les formes algébriques des racines carrées des nombres complexes suivants :

$$-4, \quad 16e^{\frac{4\pi\mathrm{i}}{3}} \quad \text{et} \quad 3+4\mathrm{i}, \quad 3-4\mathrm{i}, \quad 24-10\mathrm{i}.$$

Le discriminant d'une équation polynomiale de degré 2

On cherche maintenant à résoudre les équations polynomiales de degré 2, c'est-à-dire on cherche les solutions complexes z de l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \text{avec} \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0.$$

La méthode de résolution suit la méthode déjà vue les années précédentes : on écrit la forme canonique

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4}(b^2 - 4ac)\right].$$

Si on pose $\Delta = b^2 - 4ac$, **le discriminant**, on trouve :

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4}\right].$$

Soit δ tel que $\delta^2 = \Delta$:

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2}\right)^2\right] = \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2}\right).$$

En définitive, on retiendra que si δ est *une* racine carrée du discriminant Δ :

$$\boxed{az^2 + bz + c = 0 \iff z = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-b+\delta}{2a}.}$$