NOUVEAUX PROGRAMMES !

Tle

1001 EXERCICES CORRIGÉS DE MATHÉMATIQUES COMPLÉMENTAIRES

Konrad Renard

POUR RÉUSSIR SON OPTION

ellipses

1001 EXERCICES CORRIGÉS
DE MATHÉMATIQUES COMPLÉMENTAIRES
POUR RÉUSSIR SON OPTION

1001 EXERCICES CORRIGÉS DE MATHÉMATIQUES COMPLÉMENTAIRES

POUR RÉUSSIR SON OPTION

Tle

NOUVEAUX PROGRAMMES

Konrad Renard

Professeur de mathématiques
au lycée René Cassin de Gonesse

ellipses

Du même auteur chez le même éditeur

Retrouvez tous les livres du même auteur chez le même éditeur
sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-060685
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2021
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER
LE
PHOTOCOPILLAGE
TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Tout en consolidant les connaissances des élèves, cet ouvrage sera utile à tous ceux qui souhaitent suivre l'option « Maths complémentaires ».
Un retour sur des notions de seconde et première doit permettre à des élèves n'ayant pas suivi la spécialité mathématiques en première de suivre avec profit le programme de l'option « Mathématiques complémentaires » de terminale.

Cet ouvrage est un recueil d'exercices allant de la simple application du cours à des exercices difficiles. Il s'articule autour de 4 chapitres.

1. Algèbre
2. Suites numériques
3. Fonctions
4. Probabilités et statistiques

Dans chaque chapitre, vous trouverez :

• Des sous-chapitres composés d'un bref résumé du cours, d'exercices d'application puis d'exercices d'approfondissement, n'utilisant dans la mesure du possible que les notions de ce sous-chapitre.

• Des exercices de synthèse utilisant plusieurs notions du chapitre ou des autres chapitres et abordant les différents thèmes du programmes.

• Des exercices pour se préparer à la poursuite des études dans le supérieur. Ces exercices sont plus difficiles, mêlant plusieurs chapitres ou abordant des thèmes qui ne sont pas au programme mais dont la maîtrise sera un atout pour la poursuite d'études.

• Les corrigés détaillés de tous les exercices.

Table des matières

1 Calcul littéral **7**

1.1 Partir d'un bon pied . . . 7
1.1.1 Point de cours . . . 7
1.1.2 Exercices d'application de cours . . . 7
1.1.3 Exercices d'approfondissement . . . 9
1.2 Résolution de systèmes . . . 12
1.2.1 Point de cours . . . 12
1.2.2 Exercices d'application de cours . . . 13
1.2.3 Exercices d'approfondissement . . . 15
1.3 Equations du second degré . . . 17
1.3.1 Point de cours . . . 17
1.3.2 Exercices d'application de cours . . . 17
1.3.3 Exercices d'approfondissement . . . 19
1.4 Signe du trinôme . . . 23
1.4.1 Point de cours . . . 23
1.4.2 Exercices d'application de cours . . . 23
1.4.3 Exercices d'approfondissement . . . 24
1.5 Exercices de synthèse . . . 27
1.6 Vers le supérieur . . . 32

2 Suites numériques **37**

2.1 Généralités sur les suites . . . 37
2.1.1 Point de cours . . . 37
2.1.2 Exercices d'application de cours . . . 38
2.1.3 Exercices d'approfondissement . . . 39
2.2 Suites arithmétiques . . . 43
2.2.1 Point de cours . . . 43
2.2.2 Exercices d'application de cours . . . 43
2.2.3 Exercices d'approfondissement . . . 46
2.3 Suites géométriques . . . 53
2.3.1 Point de cours . . . 53

2.3.2 Exercices d'application de cours . . . 53
2.3.3 Exercices d'approfondissement . . . 55
2.4 Limites de suites . . . 64
2.4.1 Point de cours . . . 64
2.4.2 Exercices d'application de cours . . . 65
2.4.3 Exercices d'approfondissement . . . 69
2.5 Suites arithmético-géométriques . . . 76
2.5.1 Point de cours . . . 76
2.5.2 Exercices d'application de cours . . . 77
2.5.3 Exercices d'approfondissement . . . 80
2.6 Exercices de synthèse . . . 98
2.7 Vers le supérieur . . . 137

3 Fonctions **149**
3.1 Limites . . . 149
3.1.1 Point de cours . . . 149
3.1.2 Exercices d'application de cours . . . 150
3.1.3 Exercices d'approfondissement . . . 152
3.2 Dérivabilité . . . 157
3.2.1 Point de cours . . . 157
3.2.2 Exercices d'application de cours . . . 158
3.2.3 Exercices d'approfondissement . . . 161
3.3 Continuité . . . 167
3.3.1 Point de cours . . . 167
3.3.2 Exercices d'application de cours . . . 167
3.3.3 Exercices d'approfondissement . . . 169
3.4 Convexité . . . 177
3.4.1 Point de cours . . . 177
3.4.2 Exercices d'application de cours . . . 178
3.4.3 Exercices d'approfondissement . . . 182
3.5 Primitives . . . 188
3.5.1 Point de cours . . . 188
3.5.2 Exercices d'application de cours . . . 189
3.5.3 Exercices d'approfondissement . . . 191
3.6 Equations différentielles . . . 193
3.6.1 Exercices d'application de cours . . . 193
3.6.2 Exercices d'approfondissement . . . 194
3.7 Intégration . . . 198
3.7.1 Point de cours . . . 198
3.7.2 Exercices d'application de cours . . . 198
3.7.3 Exercices d'approfondissement . . . 202
3.8 Fonction exponentielle . . . 209

3.8.1 Point de cours . . . 209
3.8.2 Exercices d'application de cours . . . 210
3.8.3 Exercices d'approfondissement . . . 211
3.9 Fonction logarithme népérien . . . 231
3.9.1 Point de cours . . . 231
3.9.2 Exercices d'application de cours . . . 232
3.9.3 Exercices d'approfondissement . . . 234
3.10 Exercices de synthèse . . . 244
3.11 Vers le supérieur . . . 287

4 Statistiques et probabilités 311
4.1 Probabilités conditionnelles . . . 311
4.1.1 Point de cours . . . 311
4.1.2 Exercices d'application de cours . . . 312
4.1.3 Exercices d'approfondissement . . . 315
4.2 Indépendance – Lois discrètes . . . 320
4.2.1 Point de cours . . . 320
4.2.2 Exercices d'application du cours . . . 320
4.2.3 Exercices d'approfondissement . . . 322
4.3 Loi binomiale . . . 324
4.3.1 Point de cours . . . 324
4.3.2 Exercices d'application de cours . . . 325
4.3.3 Exercices d'approfondissement . . . 329
4.4 Lois à densité . . . 341
4.4.1 Point de cours . . . 341
4.4.2 Exercices d'application de cours . . . 342
4.4.3 Exercices d'approfondissement . . . 344
4.5 Loi uniforme continue . . . 346
4.5.1 Point de cours . . . 346
4.5.2 Exercices d'application de cours . . . 346
4.5.3 Exercices d'approfondissement . . . 347
4.6 Loi exponentielle . . . 350
4.6.1 Point de cours . . . 350
4.6.2 Exercices d'application de cours . . . 350
4.6.3 Exercices d'approfondissement . . . 351
4.7 Statistiques à deux variables . . . 360
4.7.1 Point de cours . . . 360
4.7.2 Exercices d'application de cours . . . 361
4.7.3 Exercices d'approfondissement . . . 367
4.8 Exercices de synthèse . . . 383
4.9 Vers le supérieur . . . 415

5 Corrigés **429**
5.1 Calcul littéral 429
5.2 Suites numériques 464
5.3 Fonctions 529
5.4 Statistiques et probabilités 653

Chapitre 1

Calcul littéral

1.1 Partir d'un bon pied

1.1.1 Point de cours

Identités remarquables : soient a et b deux réels. On a alors :
• $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ • $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ • $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.

Règles de calcul sur les puissances : soient n et p deux entiers relatifs, a et b deux réels non nuls. On a alors :
• $a^n a^p = a^{n+p}$ • $(a^n)^p = a^{np}$ • $(ab)^n = a^n b^n$ • $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$ • $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$.

Règles de calcul sur les racines carrées : soient a et b deux nombres réels positifs. On a alors :
• $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ • si $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
• si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$.

1.1.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 1 **5 minutes**

Développer et simplifier les expressions suivantes :

1. $A = 2(3x+4)+5(8x+6)$
2. $B = 3(5x-3)-6(x-8)$
3. $C = 3x(2-5x)-2x(4-2x)$
4. $D = 3x\left(x^2+x+3\right)-x\left(4x^2-3x+2\right)$
5. $E = x^2\left(3x^3-x+5\right)+3x\left(4-2x^2-x^4\right)$
6. $F = x^2\left(2xy+y^2\right)-2y\left(x^3+xy\right)$

EXERCICE 2 **5 minutes**

Développer et simplifier les expressions suivantes :

1. $A = (2x+3)(5x+2)$
2. $B = (2x+3)(5x-2)$
3. $C = (2x-3)(5x-2)$
4. $D = (2-5x)(3x+4)$
5. $E = \left(3x^2-5x+2\right)(5x+2)$
6. $F = (7x-9)\left(2-7x-8x^2\right)$

EXERCICE 3 **5 minutes**

Développer et simplifier les expressions suivantes :

1. $A = (x+1)^2$
2. $B = (x-2)^2$
3. $C = (3x+6)$
4. $D = (2x-8)^2$
5. $E = (2x+4)(2x-4)$
6. $F = (9+7x)(9-7x)$

EXERCICE 4 **5 minutes**

Factoriser les expressions suivantes :

1. $A = x^2 + 2x$
2. $B = 2a^3 + 3a^2$
3. $C = xy + 2x^2$
4. $D = 3x^2 - 8x$
5. $E = 2x(x+3) - 5(x+3)$
6. $F = (2x+3) + x(2x+3)$

EXERCICE 5 **5 minutes**

Factoriser les expressions suivantes :

1. $A = (3x-2)(3x+4) + (x-1)(3x+4)$
2. $B = (x-2)(x+5) - (x-2)(2x+6)$
3. $C = (2x+1) + (2x+1)(3x-7)$
4. $D = (3-2x)(x+2) - (3-2x)$
5. $E = (x+1)(x-1) - (x-1)$
6. $F = (8x-1)(8x+1) - (8x+1)^2$

EXERCICE 6 **5 minutes**

Factoriser les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables :

1. $A = x^2 - 4x + 4$
2. $B = x^2 + 6x + 9$
3. $C = x^2 - 25$
4. $D = 16x^2 + 24x + 9$
5. $E = 9x^2 - 12x + 4$
6. $F = 64x^2 - 121$

EXERCICE 7 **5 minutes**

Simplifier les expressions suivantes (SANS l'aide de la calculatrice) :

1. $A = \sqrt{27}$
2. $B = \sqrt{50}$
3. $C = \sqrt{75}$
4. $D = \sqrt{8}$
5. $E = \sqrt{72}$
6. $F = \sqrt{625}$

EXERCICE 8 **5 minutes**

Simplifier les expressions suivantes (SANS l'aide de la calculatrice) :

1. $A = \sqrt{8} - \sqrt{18}$
2. $B = \sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{300}$
3. $C = \sqrt{75} + \sqrt{27} + \sqrt{48}$
4. $D = \sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{72}$
5. $E = \sqrt{80} + \sqrt{45}$
6. $F = \sqrt{169} - \sqrt{144}$

EXERCICE 9 **5 minutes**

Donner le résultat des expressions suivantes sous la forme a^n :

1. $A = 7^9 \times 7^{-3} \times 7^{-8}$
2. $B = \left(4^{-5}\right)^8$
3. $C = \dfrac{5^3}{5^7}$
4. $D = 9^2 \times 9^{-3} \times 9^4 \times 9^{-5}$
5. $E = \left((-2)^4\right)^{-5}$
6. $F = \dfrac{(-9)^{-7}}{(-9)^{-12}}$

EXERCICE 10 **5 minutes**

Donner le résultat des expressions suivantes sous la forme a^n :

1. $A = 2^5 \times 2^7 \times 2^{-9}$
2. $B = \left(13^7\right)^3$
3. $C = \dfrac{(-2)^7}{(-2)^{-2}}$
4. $D = 5^4 \times 5^{-7} \times 5^{-8} \times 2^5$
5. $E = \left(2^9\right)^{-1}$
6. $F = \dfrac{13^7}{13^2}$

EXERCICE 11 **5 minutes**

SANS l'aide de la calculatrice, calculer les expressions suivantes :

1. $A = \dfrac{12^4}{4^4}$ **3.** $C = 8^4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^4$ **5.** $E = \dfrac{6^3 \times 15^3 \times 2^3}{12^3 \times 5^3}$

2. $B = \dfrac{(-15)^{-3}}{5^{-3}}$ **4.** $D = \left(\dfrac{6}{14}\right)^{-5} \times \left(\dfrac{7}{3}\right)^{-5}$ **6.** $F = \dfrac{10^4 \times 15^4 \times 2^{-4}}{3^4 \times 5^4 \times 6^{-4}}$

EXERCICE 12 **5 minutes**

SANS l'aide de la calculatrice, simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \dfrac{15^5}{5^5}$ **3.** $C = 6^3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^3$ **5.** $E = \dfrac{6^5 \times 10^5}{12^3 \times 5^3}$

2. $B = \dfrac{(-12)^{-4}}{2^{-8}}$ **4.** $D = \left(\dfrac{7}{9}\right)^{99} \times \left(\dfrac{18}{14}\right)^{99}$ **6.** $F = \dfrac{9^5 \times 15^5 \times 2^{-5} \times 5^{-5}}{2^{-6} \times 3^{10}}$

EXERCICE 13 **5 minutes**

SANS l'aide de la calculatrice écrire les expressions suivantes sous forme d'une fraction irréductible.

1. $A = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{15}$ **3.** $C = \dfrac{13}{30} - \dfrac{8}{15} + \dfrac{4}{3}$ **5.** $E = \dfrac{2}{7} \times \dfrac{3}{8} - \dfrac{9}{2} \div \dfrac{21}{4}$

2. $B = \dfrac{-2}{9} - \dfrac{-7}{15}$ **4.** $D = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5}$ **6.** $F = \left(\dfrac{7}{12} - \dfrac{2}{3}\right) \div \left(\dfrac{5}{6} + \dfrac{1}{2}\right)$

1.1.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 14 **5 minutes**

1. Soient a un réel non nul et p un entier relatif.
Simplifier l'expression $\dfrac{a^p}{a^p}$ de deux manières.

2. En déduire que quelque soit a réel non nul, $a^0 = 1$.

EXERCICE 15 **5 minutes**

En utilisant une identité remarquable, écrire sans racine carrée au dénominateur les fractions suivantes :

1. $A = \dfrac{1}{3-\sqrt{5}}$ **2.** $B = \dfrac{3}{\sqrt{7}+2}$ **3.** $C = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ **4.** $D = \dfrac{8-\sqrt{2}}{8+\sqrt{2}}$

EXERCICE 16 **5 minutes**

En utilisant une identité remarquable, écrire sans racine carrée au dénominateur les fractions suivantes :

1. $A = \dfrac{2}{1-\sqrt{2}}$ **2.** $B = \dfrac{5}{\sqrt{3}+2}$ **3.** $C = \dfrac{3}{7+2\sqrt{3}}$ **4.** $D = \dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

EXERCICE 17 **5 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2x+3=0$ **2.** $8x-5=0$ **3.** $7-3x=0$ **4.** $43x-2021=0$

EXERCICE 18 **5 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(2x+3)(5x-2)=0$ **2.** $x(2x+8)=0$ **3.** $5x(18-2x)=0$ **4.** $x^2-5=0$

EXERCICE 19 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $2x-3<0$ **2.** $5x+7\leqslant 0$ **3.** $4-5x\geqslant 0$ **4.** $18-7x<4$

EXERCICE 20 **10 minutes**

En établissant un tableau de signe, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(2x+3)(5x-2)>0$ **2.** $x(2x+8)\leqslant 0$ **3.** $5x(18-2x)<0$ **4.** $x^2-5\leqslant 0$

EXERCICE 21 **10 minutes**

1. Vérifier que pour tous réels a et b, on a : $a^2+2ab=(a+b)^2-b^2$ et $a^2-2ab=(a-b)^2-b^2$.
☞ On obtient ainsi la forme canonique d'un polynôme.

2. En utilisant les résultats de la question précédente, déterminer la forme canonique de chaque fonction polynôme du second degré.

a. $f(x)=x^2+x+1$ **c.** $f(x)=x^2-9x+9$ **e.** $f(x)=x^2-7x+10$

b. $f(x)=x^2+3x+4$ **d.** $f(x)=x^2-3x-3$ **f.** $f(x)=x^2+15x+30$

EXERCICE 22 **10 minutes**

Déterminer la forme canonique de chaque fonction polynôme.

1. $f(x)=2x^2+4x-3$ **3.** $f(x)=-2x^2-6x+3$ **5.** $f(x)=-4x^2-10x+2$

2. $f(x)=3x^2-x+9$ **4.** $f(x)=5x^2-8x-3$ **6.** $f(x)=-5x^2+12x+3$

EXERCICE 23 **10 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3-3x^2-4x+5$.

1. Développer, réduire et ordonner l'expression $(x-1)\left(ax^2+bx+c\right)$.

2. Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x)=(x-1)\left(ax^2+bx+c\right)$.

EXERCICE 24 **15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3+5x^2-2x-8$.

1. Développer, réduire et ordonner l'expression $(x+2)\left(ax^2+bx+c\right)$.

2. Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)=(x+2)\left(ax^2+bx+c\right)$.

EXERCICE 25 **15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^3+7x^2+x-2$.

Sans développer, déterminer les réels a et c tels que $f(x) = (x+2)\left(ax^2+bx+c\right)$.

EXERCICE 26 **15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

1. Sans développer, déterminer les réels a et c tels que $f(x) = (x-2)\left(ax^2+bx+c\right)$.
2. En développant l'expression avec les valeurs de a et c obtenues, déterminer le réel b.
3. En déduire une factorisation complète de f.

EXERCICE 27 **15 minutes**

Soit P le polynôme définie par $P = x^3 - x^2 - 8x + 12$.

1. Vérifier que $P = x^3 + 3x^2 - 4x^2 - 12x + 4x + 12$.
2. En déduire une factorisation de P

EXERCICE 28 **15 minutes**

En utilisant l'astuce de l'exercice précédent, factoriser les polynômes suivants :

1. $P = x^3 + 2x^2 - 15x - 36$
☞ On pourra remarquer que $-15 = 9 - 24$.
2. $P = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 4$
☞ On pourra remarquer que $-7 = 1 - 8$.
3. $P = 3x^3 + 8x^2 + 7x + 2$
☞ On pourra remarquer que $7 = 5 + 2$.

EXERCICE 29 **10 minutes**

Etablir la forme canonique du trinôme de forme générale $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

EXERCICE 30 **10 minutes**

Des enfants se partagent un sachet de bonbons. Le premier enfant en prend un et le sixième de ce qui reste, le 2^e en prend 2 et le sixième de ce qui reste, le 3^e en prend 3 et le sixième de ce qui reste, et ainsi de suite jusqu'au dernier enfant qui lui prend tout ce qui reste.
Combien y avait-il d'enfants et combien chacun a-t-il pris de bonbons, sachant que tous les enfants ont eu le même nombre de bonbons?

EXERCICE 31 **10 minutes**

Dans la classe il y avait exactement 40% de garçons. Six nouveaux garçons sont arrivés et il y a maintenant autant de garçons que de filles. Combien y a-t-il d'élèves dans la classe?

EXERCICE 32 **10 minutes**

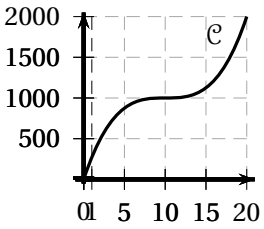
Déterminer deux entiers naturels consécutifs dont la différence des carrés est égale à 999.

EXERCICE 33 **10 minutes**

En augmentant de 9 cm la longueur de chaque côté d'un carré, son aire augmente de 135 cm^2.
Quelle est l'aire du carré initial?

EXERCICE 34 **20 minutes**

Une entreprise décide de fabriquer et de commercialiser un produit.
Sa capacité maximale de production est de 20 tonnes. La courbe $\mathcal{C}$ ci-jointe représente le coût de production $C(x)$, exprimé en milliers d'euros, en fonction du nombre x de tonnes produites.



1. Après une étude de marché, l'entreprise espère vendre son produit 84 milliers d'euros la tonne.

a. Déterminer, en fonction du nombre x de tonnes produites, la recette $R(x)$ en milliers d'euros espérée par cette entreprise.

b. Tracer la représentation graphique Δ de la fonction R sur le graphique ci-dessous, pour $x \in [0\,;\,20]$.
Déterminer graphiquement à quel intervalle doit appartenir x pour assurer un bénéfice à l'entreprise.

c. Déterminer graphiquement, à une tonne près, le nombre de tonnes à produire pour assurer un bénéfice maximum.

2. On considère maintenant que $C(x) = x^3 - 30x^2 + 300x$ avec $x > 0$.
Pour affaiblir la concurrence, l'entreprise décide de vendre son produit le moins cher possible sans perdre d'argent.
Soit $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ le coût moyen de fabrication.

a. Exprimer $C_m(x)$ en fonction de x.
Etablir le tableau de variations de $C_m(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,20]$.

b. En déduire la valeur x_m qui assure un coût moyen minimum. Quel est alors le prix d'une tonne ?

1.2 Résolution de systèmes

1.2.1 Point de cours

On appelle système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y un système de la forme $\begin{cases} ax+by=e & (E_1) \\ cx+dy=f & (E_2) \end{cases}$ où a, b, c, d, e, f sont des réels.

Définition : on appelle déterminant du système $\mathcal{S} : \begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ le nombre

$$Det(\mathcal{S}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Propriété : le système $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ admet un unique couple solution si et seulement si le déterminant du système est non nul.

☞ Si le déterminant du système est nul, soit le système n'a pas de couple solution, soit il en a une infinité.

Résoudre ce système, c'est déterminer tous les couples $(x;\ y)$ qui vérifient les deux équations en même temps.

Résolution avec la méthode « par substitution »

1. A partir d'une équation (par exemple (E_1)), on exprime y en fonction de x.
2. Dans l'autre équation (ici (E_2)), on remplace y par l'expression trouvée précédemment. On obtient une équation du premier degré à une inconnue x.
3. On détermine x.
4. On détermine y en remplaçant, dans l'expression obtenue à l' étape **1**, x par la valeur obtenue en **3**.
5. On vérifie que le couple $(x;\ y)$ obtenu est bien solution du système.

☞ On travaille par implications successives, il est donc nécessaire (si on veut bien faire les choses) de vérifier que le couple obtenu est bien solution.

Résolution avec la méthode « par combinaisons »

1. On veut déterminer x, il faut donc éliminer y :
   a. On multiplie tous les membres de l'équation (E_1) par d.
   b. On multiplie tous les membres de l'équation (E_2) par $-b$.
   c. On ajoute membre à membre les deux équations obtenues, on obtient une équation ne contenant que l'inconnue x.
   d. On détermine alors x.
2. On détermine y :
   a. soit on remplace la valeur de x obtenue dans (E_1) ou (E_2) ;
   b. soit on reprend la méthode en éliminant x.
3. On vérifie que le couple $(x;\ y)$ obtenu est bien solution du système.

1.2.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 35 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode par substitution :

1. $\begin{cases} 2x+y=2 \\ 5x-7y=-9 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x+3y=4 \\ 8x-4y=5 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x+2y=8 \\ 3x-5y=-3 \end{cases}$

EXERCICE 36 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode par substitution :

1. $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 3y = -3 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} -2x + 5y = 3 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$

EXERCICE 37 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode par substitution :

1. $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x = y \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 3x = 2y \\ y = 3x - 9 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = -8 \end{cases}$

EXERCICE 38 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode par combinaison :

1. $\begin{cases} 7x + 4y = 6 \\ 5x + 2y = 0 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 12x + 14y = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ 5x + 8y = 2 \end{cases}$

EXERCICE 39 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode par combinaison :

1. $\begin{cases} 3x + 4y = 42 \\ 3x + 8y = 66 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} -3x + 5y = 9 \\ 6x + y = 3 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 6x + 7y = -4 \\ -3x + 2y = 5 \end{cases}$

EXERCICE 40 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode par combinaison :

1. $\begin{cases} 9a - 7b = 8 \\ -2a + 7b = 20 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 4a - 3b = 2 \\ 3a + 4b = 5 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 3a + 2b = -150 \\ 3a - 2b = -78 \end{cases}$

EXERCICE 41 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode de votre choix :

1. $\begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ 7x - 2y = 4 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 3x = 2y \\ y = 6x - 9 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 9x + 7y = -12 \\ -9x + 4y = 30 \end{cases}$

EXERCICE 42 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode de votre choix :

1. $\begin{cases} x+y=25 \\ x-y=13 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 3x+5y=23 \\ 4x+2y=19 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x+y=28 \\ 36x+45y=1035 \end{cases}$

EXERCICE 43 **10 minutes**

Calculer le déterminant puis résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 2x+y=2 \\ 4x+2y=-9 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 4x+3y=6 \\ 8x+6y=12 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x+2y=8 \\ 3x+6y=3 \end{cases}$

EXERCICE 44 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x+3y=-6 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 8x+12y=16 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \sqrt{2}x+2y=1 \\ x+\sqrt{2}y=\sqrt{2} \end{cases}$

1.2.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 45 **10 minutes**

Un théâtre dispose de 470 places. Il propose un « tarif plein » à 20 € et un « tarif réduit » à 15 €.
Ce soir le théâtre affiche complet et la recette a été de 9 000 €.
Combien de personnes ont payé le « tarif plein » ? le « tarif réduit » ?

EXERCICE 46 **10 minutes**

Dans un bar, on a servi à la première table 3 limonades et 2 jus d'orange pour 7,80 € et à la deuxième table 1 limonade et 3 jus d'orange pour 6,80 €.
Combien coûte la limonade ? le jus d'orange ?

EXERCICE 47 **10 minutes**

Le chauffeur d'un bus touristique a reçu 28,50 € pour 12 places, les unes d'intérieur, les autres d'impériale.
Les places d'intérieur coûtent 1,5 €, celles d'impériale 3 €.
Combien de places de chaque sorte a-t-il vendu ?

EXERCICE 48 **10 minutes**

Dans une ferme, il y a des poules et des lapins. On compte 91 têtes et 260 pattes. Combien y a-t-il de poules et de lapins dans la ferme ?

EXERCICE 49 **10 minutes**

Si on ajoute 50 au numérateur d'une fraction et 120 à son dénominateur, on obtient 0,45.
Si on retranche 50 au numérateur de cette même fraction et 120 à son dénominateur, on obtient 0,55. Quelle est cette fraction ?

EXERCICE 50 **5 minutes**

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x+y=9 \\ y+z=27 \\ z+x=22 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x+y+z=16 \\ 8x-7y=0 \\ 9y=8 \end{cases}$

EXERCICE 51 **5 minutes**

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x+3y+z=0 \\ x+y=-1 \\ 3x-z=1 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 4y-3z=0 \\ x+z=2 \end{cases}$

EXERCICE 52 **5 minutes**

On sait que la fonction f est de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ et que sa courbe représentative passe par les points $A(0;5)$, $B(1;4)$ et $C(2;7)$.

1. En utilisant les données du problème, établir un système de trois équations.
2. Résoudre le système précédent et en déduire l'expression de f.

EXERCICE 53 **10 minutes**

On sait que la fonction f est de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ et que sa courbe représentative passe par les points $A(0;2)$, $B(1;7)$ et $C(-2;-20)$.

1. En utilisant les données du problème, établir un système de trois équations.
2. Résoudre le système précédent et en déduire l'expression de f.

EXERCICE 54 **10 minutes**

La grand-mère de Math dispose de trois étagères. Elle y dépose ses pots de confitures de trois tailles différentes (chaque taille correspond à un fruit) de sorte à avoir exactement 6 kg sur chaque étagère.
La première étagère contient une confiture de fraises, trois de cerises et trois de melons.
La seconde étagère contient deux confitures de fraises et six de melons.
La troisième étagère contient quatre confitures de cerises et six de melons.
Quel est le poids de chaque pot de confiture ?

EXERCICE 55 **10 minutes**

On sait que la fonction f est de la forme $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ et que sa courbe représentative passe par les points $A(0;-2)$, $B(1;-2)$, $C(-1;2)$ et $D(2;8)$.

1. En utilisant les données du problème, établir un système de quatre équations.
2. Résoudre le système précédent et en déduire l'expression de f.

1.3 Equations du second degré

1.3.1 Point de cours

Définition 1 : Une **équation du second degré**, d'inconnue x, est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont trois réels données (a étant non nul).

Définition 2 : On appelle **discriminant** du trinôme ax^2+bx+c, le nombre $\Delta = b^2-4ac$.

Propriété 1 : Soit Δ le discriminant du trinôme ax^2+bx+c.
• Si $\Delta > 0$ alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

• Si $\Delta = 0$ alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet une solution unique : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
• Si $\Delta < 0$ alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solution réelle.

Propriété 2 : Lorsque le trinôme ax^2+bx+c admet deux racines distinctes ou confondues, leur somme S et leur produit P sont donnés par les relations : $S = -\dfrac{b}{a}$ et $P = \dfrac{c}{a}$.

Propriété 3 : Deux réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement si ils sont solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$.

1.3.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 56 **10 minutes**

Résoudre les équations du second degré suivantes en utilisant la méthode du discriminant :

1. $x^2+x+1=0$
2. $3x^2-2x-1=0$
3. $-x^2+3x+9=0$
4. $\dfrac{1}{2}x^2+2x+9=0$
5. $x^2+x-6=0$
6. $x^2-2=0$

EXERCICE 57 **10 minutes**

Résoudre les équations du second degré suivantes en utilisant la méthode du discriminant :

1. $x^2+5x-6=0$
2. $x^2+x-2=0$
3. $-2x^2+3x+4=0$
4. $-5x^2-3x+2=0$
5. $4x^2+12x+4=0$
6. $-3x^2-4x=0$

EXERCICE 58 **15 minutes**

Résoudre les équations du second degré suivantes en utilisant la méthode du discriminant :

1. $x^2+9x+20=0$
2. $-3x^2+2=0$
3. $-5x^2+x=0$
4. $x^2-\dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{6}=0$
5. $2x^2+\dfrac{1}{3}x+5=0$
6. $3x^2+2x\sqrt{6}+2=0$

EXERCICE 59 **10 minutes**

Résoudre les équations du second degré suivantes en factorisant :

1. $(x+1)^2-(2x+3)^2=0$
2. $x^2+2x+1+(2x-3)(x+1)=0$
3. $x^2-16+(x+4)(x-6)=0$
4. $81-\left(x^2+6x+9\right)=0$
5. $(3x-1)(2x+5)-(1-x)(2x+5)=0$
6. $(2x+3)^2-2(2x+3)+1=0$

EXERCICE 60 **10 minutes**

Résoudre les équations du second degré suivantes en utilisant la forme canonique :

1. $x^2+4x+1=0$
2. $x^2-3x+4=0$
3. $2x^2+x-2=0$
4. $-x^2+8x-25=0$
5. $\frac{1}{2}x^2+x+2=0$
6. $-5x^2-3x+2=0$

EXERCICE 61 **5 minutes**

Soit l'équation $x^2+14x-15=0$.

1. Donner une solution évidente.
2. En utilisant la propriété 2, déterminer la seconde solution.

EXERCICE 62 **10 minutes**

Résoudre les équations du second degré suivantes en utilisant la méthode de l'exercice précédent :

1. $x^2+x-2=0$
2. $x^2-x-2=0$
3. $2x^2-x-1=0$
4. $-x^2+3x=0$
5. $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-1=0$
6. $x^2-x-20=0$

EXERCICE 63 **10 minutes**

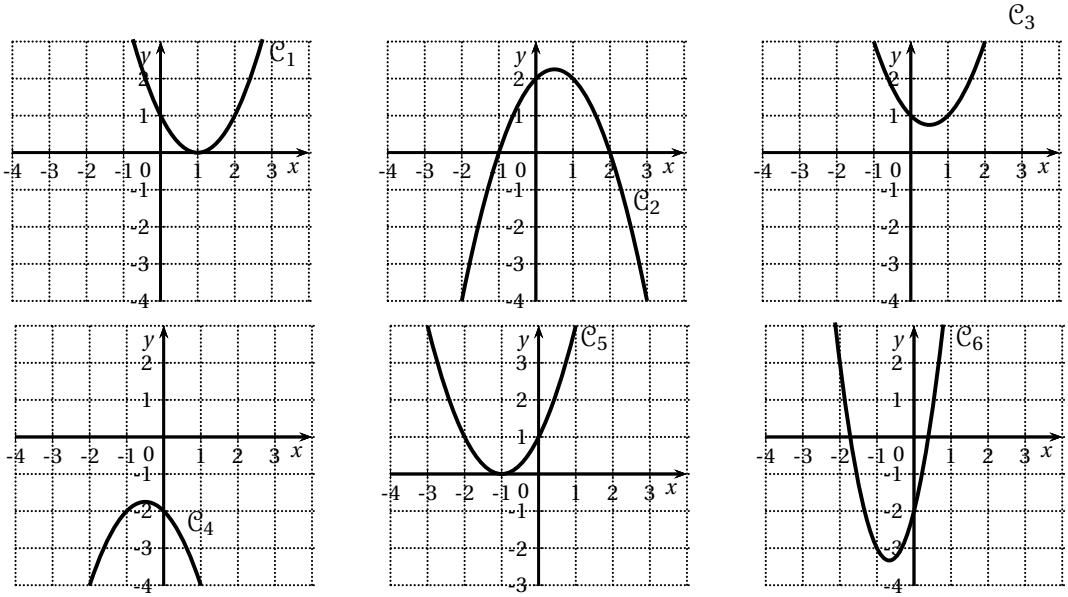
Résoudre les équations du second degré suivantes en utilisant la méthode la plus adaptée :

1. $9x^2+x=0$
2. $x^2-\sqrt{2}x-3=0$
3. $x^2+4x+4=0$
4. $5-x^2=0$
5. $(x+2)(3x-4)=x+2$
6. $5x^2-9x+12=0$

EXERCICE 64 **15 minutes**

Chacune des courbes ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$.

1. Dans chaque cas, déterminer graphiquement les signes des réels a et c, ainsi que le signe du discriminant.
2. Dans chaque cas, déterminer le signe de b.



EXERCICE 65 **5 minutes**

Ecrire une équation de la forme $x^2+bx+c=0$ dont les solutions sont :

1. 3 et 7

2. 2 et -6

3. $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{5}$

4. $1+\sqrt{3}$ et $1-\sqrt{3}$.

EXERCICE 66 **10 minutes**

Déterminer, s'ils existent, deux réels x et y connaissant leur somme S et leur produit P, en supposant $x \leqslant y$:

1. $S=1$ et $P=-1$

2. $S=12$ et $P=36$

3. $S=2\sqrt{5}$ et $P=1$

4. $S=-7$ et $P=-44$

EXERCICE 67 **10 minutes**

Déterminer, s'ils existent, deux réels x et y connaissant leur somme S et leur produit P, en supposant $x \leqslant y$:

1. $S=0$ et $P=3$

2. $S=1+\pi$ et $P=\pi$

3. $S=-\sqrt{2}-\sqrt{5}$ et $P=\sqrt{10}$

4. $S=2019$ et $P=2019$

EXERCICE 68 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x+y &= 4 \\ xy &= 3 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x+y &= 2 \\ xy &= 1 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x+y &= 12 \\ xy &= 36 \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} x+y &= -7 \\ xy &= 10 \end{cases}$

1.3.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 69 **5 minutes**

Soit l'équation (E) : $(m+2)x^2+2(3m-1)x+(m+2)=0$.

1. Pour quelles valeurs de m l'équation admet-elle une solution double ?

2. Calculer cette solution.

EXERCICE 70 **10 minutes**

Soit l'équation (E) : $x^2+6mx+(6m+1)=0$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation admet-elle une des solutions égale à 2 ?

2. En déduire l'autre solution.

EXERCICE 71 **5 minutes**

Soit l'équation (E) : $x^2+2(3m-1)x+(m+2)=0$.

1. Pour quelle valeur de m l'équation admet-elle une des solutions égale à -1 ?

2. En déduire l'autre solution.

EXERCICE 72 **15 minutes**

Démontrer la propriété 1.

EXERCICE 73 **15 minutes**

1. Démontrer la propriété 2.

2. Démontrer la propriété 3.

EXERCICE 74 **15 minutes**

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x+y = -\frac{1}{12} \\ xy = -\frac{1}{12} \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x+y = \frac{1}{2} \\ xy = \frac{1}{12} \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x+y = \frac{5\sqrt{5}-3}{4} \\ xy = 1 \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} x-y = 1 \\ xy = 6 \end{cases}$

☞ Pour le dernier système, on pourra poser $Y=-y$.

EXERCICE 75 **10 minutes**

On considère l'équation (E) : $2x^2+\left(2\sqrt{3}-1\right)x-\sqrt{3}=0$.

1. Résoudre (E).

2. Montrer que $\left(2\sqrt{3}+1\right)^2=13+4\sqrt{3}$.

3. En déduire une expression simplifiée des solutions de l'équation (E).

EXERCICE 76 **10 minutes**

Résoudre les équations suivantes en posant $X=x^2$:

1. $x^4-84x^2+243=0$

2. $x^4+8x^2-9=0$

3. $2x^4+5x^2+2=0$

4. $-x^4+x^2+2=0$

EXERCICE 77 **20 minutes**

Résoudre les équations suivantes en utilisant un changement d'inconnue :

1. $x^6-3x^3+2=0$

2. $2(\cos x)^2-3\cos x+1=0$

3. $x+\sqrt{x}-2=0$

4. $2(\sin x)^2-7\sin x+3=0$

5. $\dfrac{6}{(x-7)^2}-\dfrac{11}{x-7}-7=0$

6. $(2x-5)-3\sqrt{2x-5}+2=0$

EXERCICE 78 **10 minutes**

1. soit P un polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$.

a. Calculer $P(2)$. En déduire une factorisation de $P(x)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

2. En déduire les solutions des équations suivantes :

a. $x^6 - x^4 - 14x + 24 = 0$

b. $\dfrac{8}{x^3} - \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{28}{x} + 24 = 0.$

EXERCICE 79 **10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations :

1. $5 - x = 2\sqrt{2x-2}$

2. $2 + x = \sqrt{2x+3}$

EXERCICE 80 **15 minutes**

Résoudre les équations suivantes :

1. $x + \dfrac{1}{x} = 4$

2. $\dfrac{3}{x-2} + \dfrac{5}{x+3} = 2$

3. $\dfrac{x}{3x+4} = \dfrac{x-1}{4x}$

4. $\dfrac{2x+m}{x} - \dfrac{3x}{x+m} = 2$ avec m un réel donné.

EXERCICE 81 **15 minutes**

Résoudre les équations suivantes :

1. $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-2x+2} = \dfrac{x+4}{x+1}$

2. $\dfrac{1}{x^2-4} + \dfrac{5}{x+2} = 3$

3. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3}{x^2} = 0$

4. $\sqrt{x^2-3x+2} = \sqrt{x-3}.$

EXERCICE 82 : LOGIQUE **15 minutes**

Soit f une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
On considère la proposition P_1 : « Si $ac < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions distinctes ».

1. La proposition P_1 est-elle vraie ? Justifier.

2. **a.** Enoncer la réciproque de P_1, on la notera P_2.

b. La proposition P_2 est-elle vraie ? Justifier.

3. **a.** Enoncer la contraposée de P_1, on la notera P_3.

b. La proposition P_3 est-elle vraie ? Justifier.

EXERCICE 83 **10 minutes**

Alfred possède deux terrains rectangulaires de même aire. Le grand côté du premier terrain mesure 130 mètres de plus que son plus petit côté. Le grand côté du second terrain mesure 150 mètres de plus que le grand côté du premier terrain et son petit côté mesure 154 mètres.
Quelles sont les dimensions des deux terrains d'Alfred ?

EXERCICE 84 **10 minutes**

La largeur d'un rectangle mesure 4 dm de moins que sa longueur. Sachant que son aire est égale à 8,25 dm^2, quelles sont les dimensions de ce rectangle ?

EXERCICE 85 : UN PROBLÈME DE NEWTON **10 minutes**

L'aire d'un rectangle est 540 m^2 et les diagonales mesurent 39 mètres. Quel est le périmètre de ce rectangle ?

EXERCICE 86 **15 minutes**

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 8$ cm et $BC = 5$ cm. Soit M un point de $[AB]$, N un point de $[BC]$, P un point de $[CD]$ et Q un point de $[DA]$ tels $AM = BN = CP = DQ = x$.

1. Sur quel intervalle varie x ?
2. Déterminer l'aire du quadrilatère $MNPQ$ que l'on notera $\mathcal{A}(x)$.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de x cette aire est-elle minimale ?
4. Pour quelle(s) valeur(s) de x cette aire est-elle égale à 22 cm^2 ?

EXERCICE 87 **20 minutes**

1. Factoriser les expressions x^2+2x-8 et $3x^2-7x+2$.
2. Résoudre l'équation $\dfrac{3}{x^2+2x-8}+\dfrac{x}{3x^2-7x+2}=0$.

EXERCICE 88 **15 minutes**

1. Factoriser les expressions x^2+x-2 et $2x^2+x-6$.
2. Résoudre l'équation $\dfrac{2x}{x^2+x-2}-\dfrac{3x}{2x^2+x-6}=0$.

EXERCICE 89 **15 minutes**

1. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x)=x^3-2x^2-19x+20$.
   a. Calculer $P(1)$. En déduire une factorisation de $P(x)$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes :
   a. $x^6-2x^4-19x^2+20=0$ **b.** $\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{19}{x}+20=0$.

EXERCICE 90 **15 minutes**

Soit l'équation (E) : $x^3-x^2-50x-48$.

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2-2x-48=0$.
2. Vérifier que -1 est solution de (E).
3. Déterminer les réels a, b, c tels que $x^3-x^2-50x-48=(x+1)\left(ax^2+bx+c\right)$.
4. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation (E).

EXERCICE 91 **15 minutes**

Soit l'équation (E) : $x^4-8x^3+12x^2+5x-10=0$.

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2-5x-5=0$.
2. Déterminer deux solutions « évidentes » de (E), on les notera x_3 et x_4.
3. Déterminer les réels a, b, c tels que $x^4-8x^3+12x^2+5x-10=(x-x_1)(x-x_2)\left(ax^2+bx+c\right)$.
4. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation (E).

1.4 Signe du trinôme

1.4.1 Point de cours

Propriété : Soit la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.
• Si $\Delta>0$, P admet deux racines x_1 et x_2 (on suppose $x_1<x_2$).

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $P(x)$	signe de a		0	signe de $-a$	0	signe de a	

• Si $\Delta=0$, P admet une racine double x_0.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $P(x)$	signe de a		0	signe de a	

• Si $\Delta<0$, $P(x)$ est toujours du signe du réel a.

1.4.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 92 **20 minutes**

Etablir le tableau de signes des polynômes suivants :
1. $P(x)=x^2+x+1$
2. $P(x)=-3x^2+x+10$
3. $P(x)=2x^2+3x-5$
4. $P(x)=2x^2-2x\sqrt{6}+3$

EXERCICE 93 **20 minutes**

Etablir le tableau de signes des polynômes suivants :
1. $P(x)=3-2x\sqrt{3}+x^2$
2. $P(x)=-x^2+4x-8$
3. $P(x)=x^2-2x-15$
4. $P(x)=\sqrt{2}x^2+\left(\sqrt{6}-2\sqrt{2}\right)x+2\sqrt{6}$

EXERCICE 94 **20 minutes**

Etablir le tableau de signes des polynômes suivants :
1. $P(x)=-6x^2-5x+6$
2. $P(x)=-6x^2-x-1$
3. $P(x)=-x^2-4x+4$
4. $P(x)=x^2+x+3$

EXERCICE 95 **20 minutes**

En choisissant la méthode la plus adaptée, établir le tableau de signes des polynômes suivants :

1. $P(x) = (3x-2)(2x+3)$
2. $P(x) = (3x+1)(x-2) - \left(9x^2+3x\right)$
3. $P(x) = (x+2)^2 - 9(x-1)^2$
4. $P(x) = -2-(2x-9)^2$

EXERCICE 96 **20 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^2+x+1<0$
2. $-3x^2+x+10 \leqslant 0$
3. $2x^2+3x-5 \geqslant 0$
4. $2x^2-2x\sqrt{6}+3>0$

EXERCICE 97 **20 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $-6x^2-5x+6 \leqslant 0$
2. $-6x^2-x-1 \leqslant 0$
3. $-x^2-4x+4 \geqslant 0$
4. $x^2+x+3 \geqslant 0$

EXERCICE 98 **20 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $3-2x\sqrt{3}+x^2 \geqslant 0$
2. $-x^2+4x-8<0$
3. $x^2-2x-15 \leqslant 0$
4. $\sqrt{2}x^2+\left(\sqrt{6}-2\sqrt{2}\right)x+2\sqrt{6}<0$

1.4.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 99 **10 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(x+2)^2 \leqslant (3x-5)^2$
2. $x^2+6x-4 \leqslant 2x^2-9x-8$

EXERCICE 100 **10 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $-x^2+4x+5 \geqslant -2x^2+3x+4$
2. $3x^2-2x+3 \geqslant x^2-2x+7$

EXERCICE 101 **10 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^2+3x+5 \leqslant x^2-x+9$
2. $(3x-2)^2 \geqslant (x+3)^2$

EXERCICE 102 **15 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^3+3x+2 \leqslant x^3-2x^2-4x-3$
2. $(2x+1)^2 \geqslant (3x-1)^2$
3. $-5x^2+x+2 \leqslant 3x^2+7x-7$

EXERCICE 103 **10 minutes**

Soit une droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=-x-4$ et une parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y=2x^2+3x-4$.

1. Résoudre l'équation $2x^2+3x-4=-x-4$.

2. En déduire les points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.
3. Résoudre l'inéquation $2x^2+3x-4 \leqslant -x-4$.
4. En déduire les positions relatives de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.

EXERCICE 104 **10 minutes**
En utilisant la méthode de l'exercice **103**, étudier les positions relatives de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=3x+2$ et de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y=3x^2-8x-2$.

EXERCICE 105 **10 minutes**
En s'inspirant de la méthode de l'exercice **103**, étudier les positions relatives des paraboles $\mathcal{P}_1$ d'équation $y=-x^2+6x-9$ et $\mathcal{P}_2$ d'équation $y=x^2-5x+3$.

EXERCICE 106 **10 minutes**
Etablir le tableau de signe des polynômes suivants :
1. $P(x)=(x+2)\left(6x^2-5x-6\right)$ **2.** $P(x)=(3-2x)\left(x^2-3x+2\right)$

EXERCICE 107 **10 minutes**
Etablir le tableau de signes des polynômes suivants :
1. $P(x)=\left(-x^2-4x+4\right)(6-2x)$ **2.** $P(x)=\left(x^2+x-2\right)\left(x^2-5x+6\right)$

EXERCICE 108 **10 minutes**
Résoudre les inéquations suivantes :
1. $(x+2)\left(6x^2-5x-6\right) \leqslant 0$ **2.** $(3-2x)\left(x^2-3x+2\right) \geqslant 0$

EXERCICE 109 **10 minutes**
Résoudre les inéquations suivantes :
1. $\left(-x^2-4x+4\right)(6-2x) \leqslant 0$ **2.** $\left(x^2+x-2\right)\left(x^2-5x+6\right) > 0$

EXERCICE 110 : DÉMONSTRATION **10 minutes**
Démontrer la propriété des tableaux de signes des trinômes du second degré.

EXERCICE 111 : LOGIQUE **15 minutes**
Soit $f(x)$ une fonction polynôme de degré 2 et Δ son discriminant.
Soit la propriété P_1 : « S'il existe deux réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1)\,f(x_2)<0$ alors $\Delta>0$.

1. a. Enoncer la réciproque de la propriété P_1, nous la noterons P_2.
b. La propriété P_2 est-elle vraie ? Justifier.
2. a. Enoncer la contraposée de la propriété P_1, nous la noterons P_3.
b. La propriété P_3 est-elle vraie ? Justifier.
c. La propriété P_1 est-elle vraie ? Justifier.

EXERCICE 112 **15 minutes**
Soit $P(x)=6x^4-41x^3+69x^2+6x-40$.

1. Déterminer un polynôme Q tel que, pour tout réel x : $P(x)=(x-1)(x-4)\,Q(x)$.

2. Après avoir déterminé les racines de Q, résoudre l'inéquation $P(x) \leqslant 0$.

EXERCICE 113 **15 minutes**

Soit $P(x) = -6x^4 + 13x^3 + 96x^2 - 13x - 210$.

1. Déterminer un polynôme Q tel que, pour tout réel x : $P(x) = (x-5)(x+2)Q(x)$.
2. Après avoir déterminé les racines de Q, résoudre l'inéquation $P(x) \geqslant 0$.

EXERCICE 114 **15 minutes**

Soit $P(x) = -8x^4 + 14x^3 + 47x^2 - 41x - 30$.

1. Déterminer un polynôme Q tel que, pour tout réel x : $P(x) = (x+2)(x-3)Q(x)$.
2. Après avoir déterminé les racines de Q, résoudre l'inéquation $P(x) > 0$.

EXERCICE 115 **15 minutes**

Soit $P(x) = -x^4 + \left(\sqrt{2} - \sqrt{3} - 2\right)x^3 + \left(\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 5\right)x^2 + \left(2\sqrt{6} + 5\sqrt{3} - 5\sqrt{2}\right)x - 5\sqrt{6}$.

1. Déterminer un polynôme Q tel que, pour tout réel x : $P(x) = \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)Q(x)$.
2. Après avoir déterminé les racines de Q, résoudre l'inéquation $P(x) < 0$.

EXERCICE 116 **15 minutes**

Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions réelles de l'équation $2x^2 + (1-m)x + 2(m-3) = 0$.

EXERCICE 117 **15 minutes**

Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions réelles de l'équation $x^2 + mx + (2m-3) = 0$.

EXERCICE 118 **15 minutes**

Résoudre l'inéquation suivante : $\dfrac{\left(3x^2 + 2x - 1\right)\left(x^2 + x + 2\right)}{\left(3 - x^2\right)\left(x^2 - x - 6\right)} \geqslant 0$.

EXERCICE 119 **15 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{3x^2+1}{x+4} \geqslant 2x$.

2. $\dfrac{x-2}{x+1} + \dfrac{2x-5}{x-2} \leqslant 2$.

EXERCICE 120 **15 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{4}{2-x} + \dfrac{3}{x+2} \geqslant \dfrac{3x^2}{4-x^2}$.

2. $\dfrac{x}{2x+3} \leqslant \dfrac{2x+3}{x}$.

EXERCICE 121 **15 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{(6x-3)(x-4) - (2x-1)(5x-3)}{x^2+2x+1} \geqslant 0$.

2. $\dfrac{4 - 2x - 3x^2 - (x+4)(2x+2)}{x^2 - 5x + 6} \leqslant 0$.

EXERCICE 122 **15 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{7x+3}{3x+2} \geqslant \dfrac{2-3x}{3x^2+5x+2}$.

2. $\dfrac{-3x^2-7x+6}{2x^2-13x+20} \leqslant \dfrac{8x-3}{5-2x}$.

EXERCICE 123 **20 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{5x-2}{x-2} > \dfrac{4-3x}{x+2}$.

2. $\dfrac{x-3}{x^2-2x-15} \leqslant \dfrac{2-3x}{5-x}$.

EXERCICE 124 **15 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{3-2x}{x+2} \geqslant \dfrac{12-4x}{2x+1}$.

2. $\dfrac{3x-1}{x^2-2x+1} \leqslant \dfrac{2x-3}{x-1}$.

EXERCICE 125 **15 minutes**

Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1} \geqslant x.$$

EXERCICE 126 **20 minutes**

On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 3x^2+6x-7$.

1. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de P.
2. En déduire l'extremum de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$. Quelle est la nature de cet extremum ?
3. Résoudre l'inéquation $P(x) \leqslant 0$.
4. Déterminer les valeurs de x telles que $-1 < P(x) < 1$.

1.5 Exercices de synthèse

EXERCICE 127 **5 minutes**

Résoudre l'équation $(x-2)^2 = (4x+1)^2$.

EXERCICE 128 **10 minutes**

Quels sont les nombres réels supérieurs ou égaux à leur inverse ?

EXERCICE 129 **10 minutes**

Résoudre le système d'équations suivant : $\begin{cases} 4x-2y+6z=20 \\ 3x-y+3z=15 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$.

EXERCICE 130 **15 minutes**

1. Mettre sous forme d'un produit de facteurs du premier degré l'expression suivante :

$$E = (2x+1)(x-3) + (2x+1)(3x-4) - (2x+1)^2.$$

2. Donner les solutions de l'équation $(2x+1)(x-3) + (2x+1)(3x-4) = (2x+1)^2$.

3. Simplifier la fraction rationnelle suivante : $F = \dfrac{2\left[\left(2x-\dfrac{1}{3}\right)^2 - \dfrac{16}{9}\right]}{(2x+1)(x-3) + (2x+1)(3x-4) - (2x+1)^2}$.
Pour quelle valeur de x est-elle nulle ?

4. Quelles sont les coordonnées du point d'intersection des droites d'équations : $y = 2x - \dfrac{5}{3}$ et $y = x-4$?

EXERCICE 131 **15 minutes**

On donne l'expression $A = (3x-2)^2 - 18x^2 + 8 + (6x-4)(x+4)$.

1. Développer A et calculer sa valeur numérique pour $x = -1$.
2. Mettre A sous la forme d'un produit de deux facteurs du premier degré.
3. Résoudre l'équation $A = 0$.
4. Ecrire la forme canonique de A.
5. Déterminer le maximum de A.

EXERCICE 132 **15 minutes**

1. Elever au carré $(2x-3y)$.
2. Décomposer en produits de facteurs les expressions

$A = 4x^2 + 9y^2 - 12xy + 6x - 9y$,

$B = 4x^2 - 9y^2 - 18x + 27y$.

3. Calculer ensuite $A+B$. Quelle doit être la valeur de x, ou quelle relation doit-il exister entre x et y, pour que l'on ait $A+B = 0$?
4. Calculer $\dfrac{A}{B}$ et indiquer la valeur de y pour laquelle on a $\dfrac{A}{B} = 1$.

EXERCICE 133 **15 minutes**

1. Mettre sous forme de produits de facteurs les expressions suivantes :

$A = 9x^2 - 6x + 1$,

$B = x^2 - 4x + 4$,

$C = 5(x-2) - x(x-2)$.

2. Simplifier l'expression $E = \dfrac{A}{5-x} \times \dfrac{C}{B} \times \dfrac{1}{3x-1}$.
(On appellera E' l'expression simplifiée.)
Calculer la valeur de E' :

a. pour $x = \dfrac{1}{3}$;

b. pour $x = 2$.

Faire une remarque, s'il y a lieu, au sujet de ces valeurs choisies.

3. Déterminer la valeur de x pour que l'on ait $E' = -2$.

4. Résoudre le système

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = -2x + 4. \end{cases}$$

Expliquer pourquoi cette résolution permet de retrouver la valeur de x précédemment trouvée.

EXERCICE 134 **15 minutes**

f est l'application polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 4x^2 - 25 - (9 - x)(2x - 5)$.

1. Développer $f(x)$ et l'écrire sous la forme d'un polynôme réduit et ordonné.

2. Factoriser $f(x)$ en un produit de polynômes du 1er degré.

3. Calculer $f(-2)$; $f\left(\dfrac{4}{3}\right)$; $f\left(\sqrt{2}\right)$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation d'inconnue x : $f(x) = 0$.

5. Ecrire $f(x)$ sous forme canonique.

6. Déterminer le minimum de $f(x)$.

EXERCICE 135 **15 minutes**

1. Résoudre le système d'inconnue $(x\,;\ y)$ suivant : $\begin{cases} 3x + 2y = 432 \\ 2x + 3y = 398 \end{cases}$

2. Un torréfacteur met en vente deux sortes de mélange de café. Le mélange A est composé de 60 % d'Arabica et de 40 % de Robusta et coûte 86,40 € le kilogramme. Le mélange B est composé de 40 % d'Arabica et de 60 % de Robusta et coûte 79,60 € le kilogramme. On appellera x le prix du kilogramme d'Arabica, y le prix du kilogramme de Robusta.
Quel est le prix du kilogramme d'Arabica et du kilogramme de Robusta ?

EXERCICE 136 **15 minutes**

On donne l'expression $A = \dfrac{x-1}{x-3} - \dfrac{x+1}{x+3} - \dfrac{x-9}{x^2-9}$.

1. Certaines valeurs de x étant exclues, pour des raisons que l'on indiquera, mettre A sous la forme la plus simple possible.

2. Calculer les valeurs numériques prises par A pour $x = 3\sqrt{2}$ et pour $x = -\dfrac{2}{3}$.

3. Trouver pour quelle valeur de x l'expression A prend la valeur -3.

EXERCICE 137 **15 minutes**

On donne $A = 3(x-5)^2 - 2x^2 + 50$.

1. Développer, réduire et ordonner A.

2. Décomposer A en un produit de facteurs du premier degré.
3. Déterminer x pour que $A = 2x - 10$.
4. Déterminer x pour que $A > x^2 + 5$.
5. Calculer la valeur numérique de A pour $x = 15 + \sqrt{3}$

EXERCICE 138 **10 minutes**

La parabole représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ passe par le point $A(-1;\ 3)$ et a pour sommet $S(2;\ 5)$.

1. Quel est le signe de a ?
2. Quel est le signe de c ?
3. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?
4. Quelle est l'abscisse du deuxième point de la parabole qui a pour ordonnée 3 ?

EXERCICE 139 **10 minutes**

Le prix de location d'une automobile comporte un forfait fixe de 200 € et une somme proportionnelle au kilométrage parcouru.
Math a effectué 50 km de plus que Tom et a payé 45 € de plus.

1. Quel est le prix d'une location en fonction du nombre x de kilomètres parcourus.
2. Quel est le prix de la location de Math sachant qu'il a parcouru 250 km ?

EXERCICE 140 **10 minutes**

On augmente un côté d'un carré de 6,40 cm et un autre côté de 3,50 cm. On obtient un rectangle dont l'aire dépasse de 52,595 cm^2 celle du carré.
Déterminer la longueur du côté du carré.

EXERCICE 141 **10 minutes**

Un professeur a formé deux groupes de module. Le groupe A est constitué de x élèves, le groupe B de y élèves. En observant les effectifs des deux groupes, il fait deux remarques :
• si je transfère trois élèves du groupe A dans le groupe B, les deux groupes auront des effectifs égaux ;
• si je transfère trois élèves du groupe B dans le groupe A, celui-ci aura un effectif double de l'effectif du groupe B.
Combien y a-t-il d'élèves dans chaque groupe ?

EXERCICE 142 **10 minutes**

Un club a projeté une excursion en bus dans un parc d'attraction. La location d'un bus pouvant transporter au maximum 45 personnes coûtera 600 € et les billets d'entrée coûtent 30 € chacun.
Si le coût de l'excursion, comprenant le prix du bus et le billet d'entrée, est fixé à 50 € par personne, combien de personnes, au moins, doivent participer à l'excursion pour que tous ces frais soient couverts ?

EXERCICE 143 **10 minutes**

Dans un vignoble, il y a 210 rangs de pieds de vigne. Chaque rang mesure 192 m de long et les pieds sont espacés de 4 m. En moyenne, chaque pied produit 9 kg de raisin chaque saison.
Quelle est la quantité totale de raisin produite par ce vignoble en moyenne chaque saison ?

EXERCICE 144 **10 minutes**

Etant donné trois entiers consécutifs, est-il possible que le cube du plus grand soit égal à la somme des cubes des deux autres ?

EXERCICE 145 **10 minutes**

Plusieurs membres d'un club de foot décident de louer un minibus pour aller voir un match.
Chacun doit donner 3,80 €, mais quatre d'entre eux ont oublié leur argent. Les autres décident de leur avancer l'argent et doivent alors donner chacun 4,60 €.
Quel est le prix de la location du minibus ?

EXERCICE 146 **10 minutes**

Deux nombres ont pour somme 456. De combien augmente leur produit si on ajoute 7 à chacun des deux ?

EXERCICE 147 **10 minutes**

Trois amis viennent de cueillir des mirabelles pour faire de la confiture. Ali a apporté 1,5 kg de sucre en poudre et Béa en a apporté 1 kg, achetés chez le même commerçant au même prix. Ils se partagent ensuite les pots de confiture à parts égales. Comme « les bons comptent font les bons amis », après un rapide calcul, Ali et Béa annoncent à Carl qu'il doit verser 3,50 € comme contrepartie financière vu qu'il n'a pas apporté de sucre.
Comment Carl doit-il répartir ses 3,50 € entre Ali et Béa pour que le partage soit équitable ?

EXERCICE 148 **10 minutes**

On immerge un cube de métal d'arête 3 cm au fond d'un aquarium cubique, de telle sorte que la surface de l'eau affleure tout juste la face supérieure du cube.
On recommence la même expérience, en conservant la même quatité d'eau, mais avec un cube d'arête 5 cm, cette fois encore le niveau de l'eau dans l'aquarium affleure également la face supérieure du cube.
Combien mesure une arête de l'aquarium ?

EXERCICE 149 **15 minutes**

Quatre récipients cubiques ont respectivement pour arêtes, mesurées en centimètres : x, $x+1$, $x+2$ et $x+3$.
Le volume du plus grand de ces cubes est égale à la somme des volumes des trois autres.

1. Montrer que x est solution de l'équation $x^3-6x-9=0 \quad (E)$.
2. Déterminer une solution « évidente » de l'équation (E). Nous noterons x_0 cette solution.
3. Déterminer les réels a, b et c tels que $x^3-6x-9=(x-x_0)\left(ax^2+bx+c\right)$.
4. En déduire les solutions de l'équation (E).

1.6 Vers le supérieur

EXERCICE 150 **5 minutes**

Simplifier, sans l'aide de la calculatrice, le nombre $A = \sqrt{\dfrac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}$.

EXERCICE 151 **5 minutes**

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \geqslant 100.$$

☞ Penser aux expressions conjuguées.

EXERCICE 152 **10 minutes**

Sachant que $2^{200} \times 2^{203} + 2^{163} \times 2^{241} + 2^{126} \times 2^{277} = 32^n$, quelle est la valeur de n ?

EXERCICE 153 **15 minutes**

Un camion, supposé rouler à vitesse constante, traverse un tunnel. Le passager mesure le temps écoulé entre l'instant où le camion entre dans le tunnel et celui où il en est complètement sorti. Le lendemain, le même camion est attelé d'une remorque portant sa longueur totale de 12 m à 24 m. Il traverse le même tunnel, en réduisant sa vitesse de 20% par rapport à la veille. Le passager constate que le temps écoulé est supérieur de 50% à celui mis la veille.
Quelle est la longueur du tunnel ?

EXERCICE 154 **15 minutes**

Pour un réel x, l'unique nombre dont le cube est égal à x s'appelle la racine cubique de x et se note $\sqrt[3]{x}$.
☞ On a donc pour tous réels x et y , $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$ et $\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}$.
Soit $t = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$.

1. Montrer que $t^3 + 3t - 4 = 0$.
2. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que $\forall\, t \in \mathbb{R}$: $t^3 + 3t - 4 = (t-1)\left(at^2 + bt + c\right)$.
3. En déduire que t est un nombre entier.

EXERCICE 155 **15 minutes**

Lors d'une course hippique, les chevaux sont numérotés de 1 à n. Un des chevaux, blessé, ne prend pas le départ, la somme des numéros des partants est 260.
Combien y a-t-il eu de partants et quel est le numéro du cheval non partant ?

EXERCICE 156 **15 minutes**

Des enfants se partagent un sachet de bonbons. Le premier enfant en prend un et le sixième de ce qui reste, le 2$^{\text{e}}$ en prend 2 et le sixième de ce qui reste, le 3$^{\text{e}}$ en prend 3 et le sixième de ce qui reste, et ainsi de suite jusqu'au dernier enfant qui lui prend tout ce qui reste.
Combien y avait-il d'enfants et combien chacun a-t-il pris de bonbons, sachant que tous les

enfants ont eu le même nombre de bonbons ?

EXERCICE 157 **10 minutes**

Existe-t-il des valeurs $n \in \mathbb{N}$, telles que les deux racines du polynôme $P(x) = x^2 + nx + 1$ soient rationnelles ?

EXERCICE 158 **20 minutes**

1. Déterminer les entiers relatifs a, b, c et d tels que, pour tout réel x, on ait

$$x^3 + ax^2 + 4x + 8 = (x+b)\left(x^2 + cx + d\right).$$

Attention, il y a plusieurs solutions.

2. Soit p un nombre premier donné, supérieur à 2, déterminer, en fonction de p, les entiers relatifs a, b, c et d tels que, pour tout réel x, on ait

$$x^3 + ax^2 + 4x + p = (x+b)\left(x^2 + cx + d\right).$$

EXERCICE 159 **15 minutes**

1. Sachant que l'équation $x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0$ admet deux solutions réelles opposées, déterminer ces deux solutions.

2. En déduire une factorisation du polynôme $P(x) = x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 48x - 64$.

3. Montrer que l'équation n'admet que deux solutions réelles.

EXERCICE 160 **15 minutes**

On considère l'ensemble (E) des équations de degré 4, à coefficients réels, de la forme

$$(1) \quad x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$$

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation (1).

2. Après avoir divisé l'équation par x^2 et posé $u = x + \dfrac{1}{x}$, montrer que la nouvelle inconnue u est solution de l'équation : (2) $\quad u^2 + au + b - 2 = 0$.

3. En déduire les solutions de l'équation $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$.

EXERCICE 161 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+4} = x + 1$.

EXERCICE 162 **15 minutes**

Déterminer tous les triplets de réels $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifiant le système d'équations : $\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-3)(z+2) = 0 \\ x + yz = 9 \end{cases}$.

EXERCICE 163 **15 minutes**

Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(a;\ b)$ tels que $a < b$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{50}$.

EXERCICE 164 **10 minutes**

Déterminer les couples d'entiers non nuls $(m;\ n)$ tels que $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{mn}=\dfrac{2}{5}$.

EXERCICE 165 **10 minutes**

On sait que $a^3-3ab^2=52$ et $b^3-3a^2b=47$.

1. Développer et simplifier les expressions $\left(a^3-3ab^2\right)^2+\left(b^3-3a^2b\right)^2$ et $\left(a^2+b^2\right)^3$.

2. En déduire la valeur de a^2+b^2 ?

3. Combien valent a et b ?

EXERCICE 166 **10 minutes**

Résoudre l'équation $\dfrac{36}{\sqrt{x}}+\dfrac{9}{\sqrt{y}}=42-9\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

EXERCICE 167 **15 minutes**

Résoudre le système d'équations suivants : $\begin{cases} a\sqrt{a}+b\sqrt{b}=134 \\ a\sqrt{b}+b\sqrt{a}=126 \end{cases}$.

EXERCICE 168 **10 minutes**

Calculer la somme $S=\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\cdots+\dfrac{1}{2021\times 2022}$.

EXERCICE 169 **15 minutes**

Montrer que si les nombres positifs $a,\ b$ et c vérifient :

$$a(1-b)=b(1-c)=c(1-a)=\frac{1}{4} \qquad \text{alors} \qquad a=b=c.$$

EXERCICE 170 **25 minutes**

Soit a et b deux nombres positifs tels que $\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}=1$.

Démontrer que $\dfrac{a}{1+b^2}-\dfrac{b}{1+a^2}=a-b$.

EXERCICE 171 **15 minutes**

On suppose que les nombres $a,\ b$ et c sont tels que $a^2+b^2=2c^2$, $a\neq b$, $a\neq -c$, $b\neq -c$.

Démontrer que le nombre $\dfrac{(a+b+2c)\left(2a^2-b^2-c^2\right)}{(a-b)(b+c)(c+a)}$ est un nombre entier.

EXERCICE 172 **10 minutes**

Déterminer les couples $(a,\ b)$ qui vérifient le système d'équations : $\begin{cases} a+b=16 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{4}{7} \end{cases}$.

EXERCICE 173 **10 minutes**

Exprimer $A(x,\ y)=(x-y)^4$ comme fonction de $s=x+y$ et $p=xy$.

EXERCICE 174 **15 minutes**

Soit la factorisation partiellement effacée :
$\left(x^2+x+a\right)\left(x^{15}-\cdots\right)=x^{17}+x^{13}+x^5-90x^4+x-90.$
Déterminer a.
☞ Les coefficients sont entiers.

EXERCICE 175 **10 minutes**

Déterminer les entiers p et q tels que $p+q=2014$ et que l'équation $19x^2+px+q=0$ ait deux solutions entières.

EXERCICE 176 **10 minutes**

Les nombres a, b, c, d et t sont strictement positifs, distincts deux à deux, et vérifient :
$a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}=c+\dfrac{1}{d}=d+\dfrac{1}{a}=t.$
Déterminer t.

EXERCICE 177 **10 minutes**

Si $a+b=1$ et $a^2+b^2=2$, combien valent a^3+b^3 et a^4+b^4 ?

EXERCICE 178 **30 minutes**

Le but de l'exercice est d'établir une formule permettant de résoudre les équations de degré 3.

1. En posant $x=t-\dfrac{b}{3a}$, montrer que toute équation de degré 3 , $ax^3+bx^2+cx+d=0$ peut se ramener à une équation de la forme $t^3+pt+q=0$
2. En développant $(u+v)^3$, montrer que $t=u+v$ est solution de l'équation $t^3+pt+q=0$ si $\begin{cases} u^3+v^3 &= -q \\ uv &= -\frac{p}{3} \end{cases}$
3. En posant $X=u^3$ et $Y=v^3$, montrer que X vérifie l'équation (E) $U^2+qU-\dfrac{p^3}{27}=0$.
4. Résoudre l'équation (E).
5. En déduire les valeurs de u et v en fonction de p et q.
6. En déduire une solution exacte de l'équation $ax^3+bx^2+cx+d=0$, en fonction de a, b, c et d.
7. Déterminer une solution exacte de chaque équation :
   - **a.** $x^3+3x+2=0$
   - **b.** $x^3+3x^2-2x+4=0$.

EXERCICE 179 **15 minutes**

Soient a, b, c et d autre réels tels que $a=\sqrt{45-\sqrt{21-a}}$, $b=\sqrt{45-\sqrt{21-b}}$, $c=\sqrt{45-\sqrt{21+c}}$ et $d=\sqrt{45-\sqrt{21+d}}$.
Montrer que $abcd=2004$.

EXERCICE 180 **15 minutes**

Les équations $x^2+5x+6=0$ et $x^2+5x-6=0$ ont chacune des solutions entières, tandis qu'une

seule des équations $x^2+4x+5=0$ et $x^2+4x-5=0$ admet des solutions entières.

1. Démontrer que si les équations $x^2+px+q=0$ et $x^2+px-q=0$ ont chacune des solutions entières, alors il existe des entiers a et b pour lesquels $p^2=a^2+b^2$.
☞ C'est-à-dire que $(a,\ b,\ p)$ est un triplet pythagoricien.

2. Déterminer q en fonction de a et b.

Chapitre 2

Suites numériques

2.1 Généralités sur les suites

2.1.1 Point de cours

Définition : une suite numérique u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u(n) \text{ aussi noté } u_n.$$

On note cette suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ou même (u_n).

Représentation graphique : une suite numérique (u_n) peut être représentée par un nuage de points de coordonnées $(n; u_n)$.

Notations : la suite u se note (u_n).
Le terme de rang n de la suite (u_n) se note u_n.
Définition explicite : la suite (u_n) est définie par son terme général : $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur $\mathbb{N}$.

Définition par récurrence : soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et a un réel, une suite (u_n) peut être définie par : $u_0 = a$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Sens de variation :
Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :
• la suite (u_n) est **croissante** lorsque pour tout entier n, $u_{n+1} \geqslant u_n$;
• la suite (u_n) est **décroissante** lorsque pour tout entier n, $u_{n+1} \leqslant u_n$;
• la suite (u_n) est **monotone** lorsque la suite est **croissante** ou **décroissante**.

Encadrement d'une suite :
on dit qu'une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier n : $u_n \leqslant M$;
on dit qu'une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier n : $u_n \geqslant m$.
Une suite **majorée et minorée** est dite **bornée**.

Notation de la somme des termes d'une suite :
Soit une suite numérique (u_n), la somme $S_p = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_p = \sum_{k=0}^{p} u_k$.

2.1.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 181 **10 minutes**

Calculer les 5 premiers termes des suites (u_n) suivantes :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 3n + 1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = 1 - \dfrac{3}{n}$.

3. Pour tout $n \geqslant 3$, $u_n = 3\sqrt{n^2 - 3n}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 - 3n$.

5. Pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$.

EXERCICE 182 **10 minutes**

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.

2. Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2115}$.

EXERCICE 183 **10 minutes**

Calculer les 5 premiers termes des suites (u_n) définies par une relation de récurrence :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 1$.

2. $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} = 2u_n$.

3. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

4. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 1}$.

5. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$.

6. $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{u_n^2 + 2}$.

EXERCICE 184 **15 minutes**

Calculer les 10 premiers termes des suites logiques (u_n), puis exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

1. 1, 4, 7, 10, 13.

2. 1, 2, 4, 8.

3. 27, 24, 21

4. 1, −3, 9, −27, 81

EXERCICE 185 **10 minutes**

Calculer les cinq termes suivants des suites logiques :

1. 1, 1, 2, 3, 5, 8.

2. 1, 11, 21, 1211, 111221

3. 1, 2, 6, 42, 1806.

4. 4, 6, 15, 105.

EXERCICE 186 **10 minutes**

La suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n^4 - 2n^3 + 11n^2 + 14n + 24}{24}$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite.

2. Conjecturer une formule explicite plus simple pour u_n.

3. Calculer u_5. Conclure.

EXERCICE 187 **10 minutes**

La suite (u_n) est définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_{n+1} = u_n + \dfrac{n^3 - 3n^2 + 8n}{6}$.

1. Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5.

2. Conjecturer une formule explicite plus simple pour u_n.

3. Calculer u_6. Conclure.

EXERCICE 188 **5 minutes**

Représenter dans le plan les six premiers termes de la suite (u_n) définie par :

1. $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

2. $u_n = \sqrt{n}$

EXERCICE 189 **5 minutes**

Expliciter les sommes suivantes (le résultat des sommes n'est pas demandée) :

1. $S_1 = \sum_{k=1}^{5} k$ **2.** $S_2 = \sum_{k=8}^{15} k^2$ **3.** $S_3 = \sum_{k=0}^{12} (3k+4)$

2.1.3 Exercices d'approfondissement

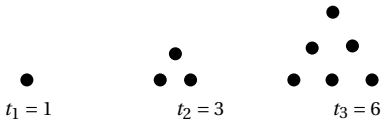
EXERCICE 190 **10 minutes**

Simplifier les sommes suivantes :

1. $S_1 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=3}^{n} (k-1)^2$ **2.** $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{i=1}^{n} i$ **3.** $S_3 = \sum_{k=2}^{n} k^3 - \sum_{p=3}^{n+1} p^3$

EXERCICE 191 **20 minutes**

1. Soit la suite (t_n), où t_n est le nombre de points d'un réseau triangulaire à n étages, comme sur les figures suivantes :



a. Calculer t_4, t_5 et t_6.

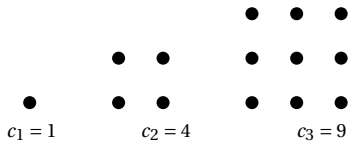
b. Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n.

c. On conjecture l'existence de trois réels a, b et c tels que $t_n = an^2 + bn + c$. Calculer a, b et c.

d. Démontrer cette conjecture.

e. Combien y a-t-il de points dans un réseau triangulaire à 2019 étages ?

2. Soit la suite (c_n), où c_n est le nombre de points d'un réseau carré à n étages, comme sur les figures suivantes :



a. Calculer c_4, c_5 et c_6.

b. Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n.

c. Exprimer c_n en fonction de n.
d. Combien y a-t-il de points dans un réseau carré à 2019 étages ?

EXERCICE 192 **10 minutes**

1. Dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthonormal, représenter la droite $\mathcal{D}$, d'équation $y = x$ et la courbe représentative de la fonction $f(x) = 3\sqrt{x} + 1$.
2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} + 1$.
a. Placer u_0 sur l'axe des abscisses.
b. Vérifier que $u_1 = f(u_0)$, placer alors u_1, puis le reporter sur l'axe des abscisses en utilisant la droite $\mathcal{D}$.
c. En procédant de la même manière, placer u_2, u_3 et u_4.
3. Représenter les 4 premiers termes de la suite (u_n) en supposant maintenant que $u_0 = 20$.

EXERCICE 193 **10 minutes**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3 + \dfrac{1}{u_n}$.

1. En utilisant la méthode de l'exercice **192**, représenter les 3 premiers termes de la suite (u_n).
2. Conjecturer le comportement de la suite : sens de variation, bornes et limite.

EXERCICE 194 **10 minutes**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = 3 + u_n^2$.

1. En utilisant la méthode de l'exercice **192**, représenter les 3 premiers termes de la suite (u_n).
2. Conjecturer le comportement de la suite : sens de variation, bornes et limite.

EXERCICE 195 **15 minutes**

Etudier la monotonie de la suite de terme général $u_n = f(n)$ à l'aide des variations de la fonction f :

1. $u_n = 2 + \dfrac{3}{n}$ **2.** $u_n = 5 - \dfrac{2}{n}$ **3.** $u_n = n^2 - 2n$ **4.** $u_n = \dfrac{2n-1}{n^2}$

EXERCICE 196 **15 minutes**

Etudier la monotonie de la suite (u_n) à l'aide de la « méthode des différences » :

1. $u_n = n + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$
2. $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$
3. $u_n = 2^n - n$
4. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - 3$

EXERCICE 197 **15 minutes**

Etudier la monotonie de la suite (u_n) à l'aide de la « méthode du quotient » :

1. $u_n = n \times 2^n$
2. $u_n = 1 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} \times \cdots \times \dfrac{1}{n}$
3. $u_n = \dfrac{3^n\sqrt{n}}{5^n}$
4. $u_n = 2019 \times (0,99)^n$

EXERCICE 198 **15 minutes**

En utilisant dans chaque cas une des méthodes des exercices **195**, **196**, **197**, étudier la monotonie de la suite (u_n).

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

2. $u_n = 2020 \times 1,02^n$

3. $u_n = n^3 - n^2 + 5n - 3$

4. $u_n = \frac{n+1}{2n}$

EXERCICE 199 **10 minutes**

Montrer que les suites (u_n) sont bornées.

1. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$

2. $u_n = 2 - \sin n$

3. $u_n = 3 - \frac{1}{n^2}$

4. $u_n = \frac{3n-5}{3n+5}$

EXERCICE 200 **10 minutes**

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$.

1. Calculer les 4 premiers termes de la suite (u_n).

2. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

3. En déduire une expression simplifiée de u_n.

4. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

EXERCICE 201 **15 minutes**

Soit la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2+\sqrt{2}}}$ (n radicaux).

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2. Tracer la courbe de la fonction $f(x) = \sqrt{x+2}$ et la droite d'équation $y = x$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

3. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite.

4. Conjecturer son comportement.

EXERCICE 202 **20 minutes**

Soit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}$.
On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

1. Tracer la courbe de la fonction $f(x) = \sqrt{x+3}$ et la droite d'équation $y = x$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

2. Placer les 3 premiers termes de la suite (u_n).

3. Conjecturer le sens de variations et la limite de la suite (u_n).

4. Démontrer que si la suite (u_n) converge vers ℓ alors ℓ vérifie l'équation $\ell^2 - \ell - 3 = 0$.

5. On admet que la suite (u_n) converge vers ℓ. Déterminer la valeur exacte de ℓ.

EXERCICE 203 : SUITE DE FIBONACCI **15 minutes**

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$, $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

1. Calculer les 11 premiers termes de la suite (u_n).

2. Calculer les 10 premiers termes de la suite (v_n).
3. Conjecturer la limite de la suite (v_n).
4. Ecrire une fonction en Python qui détermine le plus petit n tel que $\left|\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - v_n\right| \leqslant 10^{-10}$.
5. En déduire la valeur de n tel que $\left|\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - v_n\right| \leqslant 10^{-10}$.

EXERCICE 204 **15 minutes**

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$.
On considère également la suite v définie, $\forall n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$.

1. Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?
2. Conjecturer une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

EXERCICE 205 : Vrai/Faux **10 minutes**

On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) u_n$.

☞ **Notation :** $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$ et $0! = 1$

1. Vrai/Faux : Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \dfrac{n}{(n+1)!}$
2. Vrai/Faux : La suite (u_n) est croissante.
3. Vrai/Faux : Quel que soit $n \in \mathbb{N}^\star$, si $n \geqslant 2$ alors $0 \leqslant u_n \leqslant 2 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}$.
4. Vrai/Faux : La suite (u_n) tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 206 **20 minutes**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 100$ et pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 0,75u_n$.

1. Ecrire une fonction en Python permettant de calculer le $n^{\text{ème}}$ terme pour n donné.
2. Modifier la fonction pour qu'il affiche tous les termes jusqu'au $n^{\text{ème}}$.

EXERCICE 207 **20 minutes**

Le 1er janvier, Math dépose 1 000 € sur un livret qui rapporte 2% chaque premier janvier. Math ne touchera pas à l'argent déposé sur son livret tant que la somme sera inférieure à 2 000 €.
Soit (s_n) la somme sur le livret l'année n après le premier dépôt.

1. Déterminer s_0, calculer s_1, s_2.
2. Déterminer s_{n+1} en fonction s_n.
3. Ecrire un programme en Python permettant de savoir en quelle année la somme sur le livret dépassera les 2 000 €.
4. Au bout de combien d'années, Math pourra retirer de l'argent sur son livret ?

EXERCICE 208 **20 minutes**

On considère une suite (T_n) telle que $T_1 = 1$, $T_2 = 2$ et pour tout $n \geqslant 2$, $T_{n+1} = 1 + T_1 T_2 \cdots T_n$.

1. Déterminer T_3, T_4 et T_5.
2. Ecrire une fonction en Python qui retourne, pour un n donné, la liste des T_k pou $1 \leqslant k \leqslant n$.

EXERCICE 209 : SUITE DE PROUHET-THUE-MORSE **20 minutes**

Soit la suite (t_n) définie par $t_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{2n} = t_n$ et $t_{2n+1} = 1 - t_n$.

1. Calculer t_{2019} et t_{2020}.
2. Ecrire une fonction en Python qui, pour n donné, retourne la valeur de t_n.

2.2 Suites arithmétiques

2.2.1 Point de cours

Définition : une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r est appelé **raison de la suite** (u_n).

Forme explicite : si la suite (u_n) est arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.
Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p, $u_n = u_p + (n-p)r$.

Somme des n premiers entiers naturels :
$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique :
$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \dfrac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$.
Plus généralement : $S = \dfrac{\text{nombre de termes} \times \big(\text{premier terme} + \text{dernier terme}\big)}{2}$.

2.2.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 210 **10 minutes**

Les suites (u_n) sont-elles arithmétiques ? Si oui, donner la raison.

1. $u_n = 2n + 3$.
2. $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.
3. $u_{n+1} = u_n - 2$.
4. $u_n = n^2 + n + 3$.
5. $u_n = \sqrt{2017} - 2016n$.
6. $u_n = u_{n-1} + n - 1$.

EXERCICE 211 **10 minutes**

Les suites (u_n) sont-elles arithmétiques ? Si oui, donner la raison.

1. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3 - u_n$.
2. $u_0 = -\sqrt{2}$ et $u_{n+1} = 2 + u_n$.
3. Suite des entiers naturels pairs.
4. Suite des nombres premiers.
5. $u_n = n(n-2)$.
6. $u_n = (n+1)^2 - n^2$.

EXERCICE 212 **5 minutes**

Déterminer les cinq premiers termes de la suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison r :

1. $u_0 = 2$ et $r = 1,5$.
2. $u_0 = 0$ et $r = 0,3$.
3. $u_0 = 3$ et $r = -2$.
4. $u_0 = -1234$ et $r = 5$

EXERCICE 213 **5 minutes**

Exprimer u_n en fonction de n sachant que la suite (u_n) est arithmétique de raison r :

1. $u_0 = 3$ et $r = 2$.
2. $u_2 = 5$ et $r = -3$.
3. $u_1 = 0$ et $r = \sqrt{2}$.
4. $u_0 = 0$ et $r = 1$.

EXERCICE 214 **5 minutes**

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

1. Calculer u_8 et u_{23} sachant que $u_0 = 2$ et $r = -5$.
2. Calculer u_{2019} sachant que $u_2 = -5$ et $r = 3$.
3. Calculer u_{2020} sachant que $u_0 = 1$ et $r = \sqrt{2}$.

EXERCICE 215 **5 minutes**

Déterminer le premier terme u_0 et la raison des suites arithmétiques suivantes :

1. $u_{10} = 6$ et $u_{28} = 1,5$
2. $u_6 = 9$ et $u_{12} = 69$
3. $u_9 = 19$ et $u_{18} = 2017$
4. $u_3 = 2019$ et $u_{2019} = 3$.

EXERCICE 216 **5 minutes**

Déterminer le premier terme u_0 et la raison des suites arithmétiques suivantes :

1. $u_1 = 5$ et $u_2 = 8$
2. $u_2 = 3$ et $u_6 = 7$
3. $u_5 = 2019$ et $u_{2019} = 5$
4. $u_{10} = 8$ et $u_{20} = 2$

EXERCICE 217 **10 minutes**

Déterminer la forme explicite des suites (u_n) définies par :

1. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - 3$
2. $u_0 = 9$ et $u_{n+1} = u_n + 2$
3. $u_1 = -7$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{5}{3}$
4. $u_2 = \sqrt{3}$ et $u_{n+1} = u_n + \sqrt{3}$

EXERCICE 218 **10 minutes**

Déterminer la forme explicite des suites (u_n) définies par :

1. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{3}$
2. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n - \sqrt{15}$
3. $u_9 = 9$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{5}{9}$
4. $u_5 = -3\sqrt{5}$ et $u_{n+1} = u_n + \sqrt{5}$

EXERCICE 219 **5 minutes**

Montrer que si la suite (u_n) est arithmétique, de premier terme u_0,
alors pour $n > 0$, $u_n = \dfrac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2}$.

EXERCICE 220 **10 minutes**

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
$a_n = 2u_n - 15$ $b_n = u_{3n}$ $c_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$.
Montrer que (a_n), (b_n) et (c_n) sont des suites arithmétiques dont on précisera la raison et le premier terme.

EXERCICE 221 **5 minutes**

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Etudier le sens de variations de la suite (u_n) en fonction de r.

EXERCICE 222 **5 minutes**

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Démontrer que $u_n = u_0 + nr$.

EXERCICE 223 **5 minutes**

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p, p étant un entier naturel quelconque.
Démontrer que $u_n = u_p + (n-p)r$.

EXERCICE 224 **5 minutes**

Calculer la somme des cent premiers termes de la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 5$.

EXERCICE 225 **5 minutes**

Calculer la somme des vingt premiers termes de la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $r = -2$.

EXERCICE 226 **5 minutes**

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_4 = 9$ et $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_9 = 55$.
Déterminer u_0 et la raison de la suite.

EXERCICE 227 **10 minutes**

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_6 = 2$ et $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20} = 63$.
Déterminer u_0 et la raison de la suite.

EXERCICE 228 **10 minutes**

Calculer les sommes suivantes :

1. $S = 12 + 15 + 18 + \cdots + 1002$

2. $S = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} + 1 + \dfrac{5}{4} + \cdots + \dfrac{39}{4} + 10$