

Benoît Clément

Mécanique quantique relativiste

Diffusion et diagrammes de Feynman

DUNOD

© Dunod, 2023
11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-085689-3

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos	VII
Dimensions et unités	IX
Chapitre 1 Relativité restreinte et cinématique	1
1. Transformation de Lorentz et principe de relativité	1
2. Composition des vitesses	4
3. Quadrivecteurs	5
4. Cinématique	9
L'essentiel	13
Chapitre 2 Équations relativistes	15
1. Mécanique quantique non relativiste	15
2. Champ scalaire	17
3. Champ spinoriel	20
4. Champ vectoriel	30
5. Couplage aux champs fermioniques	35
L'essentiel	37
Chapitre 3 Diffusion et propagateurs	39
1. Processus de diffusion	39
2. Propagateur non relativiste	40
3. Propagateurs relativistes	50
4. Matrice de diffusion	57
5. Règles et diagrammes de Feynman	67
L'essentiel	72
Chapitre 4 Calcul de sections efficaces	73
1. Observables	73
2. Espace de phase	78
3. Calcul de $ \mathcal{M}_{fi} ^2$	85
L'essentiel	88
Chapitre 5 Théories de jauge et modèle standard	89
1. Physique des particules et interactions fondamentales	89
2. Théorie de Yang-Mills	91
3. Interaction forte	94

4. Interaction faible	96
L'essentiel	105
Chapitre 6 Exercices : calculs de processus	107
1. Effet Compton	108
2. Effet Compton en QCD	115
3. Création de paires de muons	118
4. Création de paires de muons massifs	121
5. Production du boson de Higgs dans un collisionneur leptonique	123
6. Désintégration du boson de Higgs en deux fermions	127
7. Désintégration du boson de Higgs en deux bosons W	129
8. Largeur de désintégration du quark top	131
9. Désintégration du muon	134
10. Largeur de désintégration des bosons électrofaibles	139
11. Production associée d'un boson de Higgs chargé et d'un quark top	141
Annexes	145
Annexe A Groupes de Lie	147
1. Groupes et représentations	147
2. Groupes unitaires	149
Annexe B Formulaire pour le calcul de section efficace	151
1. Méthode générale du calcul d'observable	151
2. Relations de fermetures	152
3. Calcul du carré de l'amplitude de Feynman	152
4. Largeur et section efficace	152
Annexe C Règles de Feynman du modèle standard	154
1. Règles pour les lignes externes	154
2. Règles pour les propagateurs	155
3. Règles pour les vertex	155
Annexe D Matrices de Dirac	159
1. Propriétés de base	159
2. Matrice γ^5	160

3. Contractions de matrices	160
4. Traces de matrices	161
Bibliographie sélective	163
Index	165

Avant-propos

Le point de départ de cet ouvrage est un résultat expérimental qui peut être observé en salle de travaux pratique de physique nucléaire. Les photons gamma issus d'une source mono-énergétique d'énergie ω (de l'ordre de quelques centaines de keV) sont détectés via leur interaction par diffusion élastique ou effet Compton dans un détecteur. Plus exactement on mesure l'énergie déposée par le photon dans le détecteur. On observe un continuum de valeurs allant de zéro à une valeur seuil inférieure à l'énergie des photons incidents. Cela indique d'une part que tous les photons ne déposent pas la même quantité d'énergie, et d'autre part, que le photon n'est pas absorbé lors du processus mais repart avec une énergie moindre. La conservation de l'énergie et de l'impulsion totale impose que cette diffusion est caractérisée par un unique paramètre, l'angle de diffusion θ tel que défini sur la figure A.

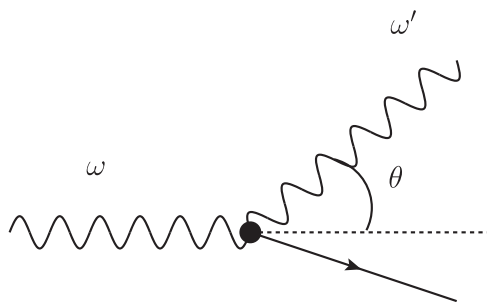


Figure A – Diffusion Compton dans le référentiel du laboratoire : un photon d'énergie ω cède une partie de son énergie à un électron initialement au repos et repart avec une énergie ω' dans une nouvelle direction faisant un angle θ avec la direction d'incidence.

Tous les angles de diffusion sont possibles et sont effectivement observés. On constate cependant que ni toutes les directions ni toutes les énergies sont équiprobables, pas plus que n'importe quelle quantité simple. De fait le nombre de photons diffusé dans une certaine direction $\cos\theta = c$ est donné par la loi de probabilité suivante :

$$f(c) \propto \xi(c)^2 \left(\xi(c) + \frac{1}{\xi(c)} - 1 + c^2 \right), \quad \xi = \frac{1}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - c)}, \quad (1)$$

qui est proportionnelle à la section efficace de diffusion. Comment peut-on dériver cette formule à partir des principes de bases de la physique ?

Le phénomène est quantique : chaque photon est diffusé dans une direction différente avec une certaine probabilité. Le phénomène est relativiste car il implique des photons (particules de masse nulle) d'énergie comparable à l'énergie de masse des électrons ($m_e \approx 511 \text{ keV}$). Pour répondre à cette question, il faut construire un cadre théorique qui contient à la fois la mécanique quantique et la relativité restreinte, soit une mécanique quantique relativiste. Dans ce cadre, il faudra décrire l'interaction entre une particule chargée (l'électron) et le champ électromagnétique pour obtenir ainsi une théorie de

l'électrodynamique quantique (QED). Enfin il faudra construire plus spécifiquement dans ce formalisme un modèle de la diffusion entre deux particules, ce qui nous conduira au calcul de sections efficaces dans le formalisme des diagrammes de Feynman.

En partant de principes de bases de la relativité et de la mécanique quantique, nous allons monter étapes par étapes cette structure. Une fois ce formalisme construit, nous l'appliquerons au calcul de la diffusion Compton pour démontrer la formule 1. Mais nous verrons également que ces méthodes s'appliquent à de nombreux autres processus tant électromagnétiques qu'impliquant les interactions nucléaires faible et forte.

Avertissement au lecteur : construite naïvement, la mécanique quantique relativiste est fondamentalement une théorie défectueuse. Les outils développés dans les années 1940 et 1950 permettent de contourner certaines de ces limitations pour aboutir à un ensemble des résultats corrects sous certaines hypothèses. Ces mêmes résultats se dérivent de manière plus rigoureuse dans le contexte de la théorie quantique des champs qui est la vraie mécanique quantique relativiste moderne. La théorie présentée dans cet ouvrage n'en est pas moins d'un grand intérêt. D'une part, cette théorie contient également beaucoup d'éléments parfaitement valides qui réapparaissent de manière identique en théorie quantique des champs. D'autre part, c'est une théorie prédictive qui permet de faire des calculs que l'on peut confronter aux résultats expérimentaux, avec dans certains cas une très grande précision. Cet ouvrage constitue donc une première étape indispensable (et parfois suffisante) pour une étude approfondie de la physique des particules et du modèle standard.

Dimensions et unités

La mécanique quantique et la relativité restreinte font chacune intervenir une constante fondamentale qui intervient dans la plupart des équations : la constante de Planck $\hbar$ et la célérité de la lumière c . Dans les unités du système international :

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05457148 \times 10^{-34} \text{ J.s et } c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}.$$

Ces constantes relient entre elles des grandeurs ayant des dimensions différentes : temps, espace, énergie et quantité de mouvement. La relativité montre que temps et espace ont la même dimension ; la mécanique quantique conduit à la même conclusion pour l'énergie et la fréquence (inverse d'un temps). Du point de vue dimensionnel $T = L = E^{-1}$ et toute grandeur physique est homogène à une puissance de l'énergie. Les constantes $\hbar$ et c n'ont pas de raison d'être. Ce ne sont que des facteurs de conversion dont dimension et valeur ne résultent que d'un choix peu judicieux, du point de vue de la physique fondamentale, d'un système d'unité. Le système d'unités naturelles est celui où ces deux constantes valent 1 et n'ont pas de dimension. Dans ce système d'unités les équations sont simplifiées puisque les facteurs c ou $\hbar$ disparaissent. À partir d'une analyse dimensionnelle on montre que :

$$[\hbar] = E.T = 1 \Rightarrow T = E^{-1},$$

$$[c] = LT^{-1} \Rightarrow L = T.$$

Le temps et l'espace ont la même dimension, ce qui semble naturel puisque la relativité va traiter le temps comme une quatrième coordonnée. De plus, toutes les dimensions s'expriment en unités naturelles comme des puissances de l'énergie. Ainsi temps et espace ont la dimension inverse de l'énergie. À partir des valeurs de $\hbar$ et c dans les deux systèmes d'unités, on détermine les facteurs de conversion pour le mètre et la seconde :

$$1 \text{ m} = 5,07 \times 10^6 \text{ eV}^{-1} \text{ et } 1 \text{ s} = 1,52 \times 10^{15} \text{ eV}^{-1}.$$

Une autre grandeur utile pour les conversions entre systèmes d'unités est $\hbar c \approx 197 \text{ MeV.fm}$.

Dans cet ouvrage, ces constantes seront maintenues dans les introductions à la relativité (chapitre 1) et à la mécanique quantique (chapitre 2). Par la suite ces constantes disparaîtront pour ne réapparaître qu'à la toute fin dans les applications numériques.

