

Marie-Virginie Speller | Erwan Guélou | Jean-Noël Beury

l'intégrale

MATHS PHYSIQUE CHIMIE INFORMATIQUE

J'ASSURE
MON ENTRÉE EN
PRÉPA

DUNOD

*Avec la collaboration scientifique de M. Tom Morel pour
les fiches de physique et de chimie*

Direction et conception graphiques de la couverture :
Nicolas Wiel - Pierre-André Gualino (graphiste)

Retrouvez nos ouvrages pour les prépas scientifiques ici



<http://dunod.link/prepassc>

© Dunod, 2026
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-089719-3

Table des matières

Bienvenue en prépa !	1
----------------------------	---

Mathématiques

Fiche 1	Outils mathématiques	6
Fiche 2	Le point sur les équations	15
Fiche 3	Le point sur la résolution de systèmes	20
Fiche 4	Les polynômes du second degré	25
Fiche 5	Le point sur les inéquations et les tableaux de signes ...	31
Fiche 6	Les vecteurs	35
Fiche 7	Les barycentres	42
Fiche 8	Ensemble de définition et domaine d'étude d'une fonction	46
Fiche 9	Le point sur les limites	51
Fiche 10	La continuité et la dérivabilité d'une fonction en un point $x = a$	56
Fiche 11	Le tableau des dérivées	61
Fiche 12	Fonctions convexes et fonctions concaves	65
Fiche 13	Bijections	68
Fiche 14	Fonctions de référence	74
Fiche 15	Les fonctions valeur absolue et partie entière	87
Fiche 16	Les fonctions exponentielle et logarithme de base a ...	93
Fiche 17	Les fonctions trigonométriques	104
Fiche 18	Les fonctions trigonométriques réciproques (hors programme terminale)	114
Fiche 19	Les primitives	119
Fiche 20	Les intégrales	123
Fiche 21	Les équations différentielles linéaires des 1 ^{er} et 2 nd ordres ..	129
Fiche 22	Le comportement d'une suite	134
Fiche 23	Les suites arithmétiques et géométriques	138
Fiche 24	Le raisonnement par récurrence	141

Table des matières

Fiche 25	Les suites récurrentes.	147
Fiche 26	Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.	154
Fiche 27	Introduction aux séries.	158
Fiche 28	Généralités sur les nombres complexes	162
Fiche 29	Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.	172
Fiche 30	Comment calculer les racines carrées d'un nombre complexe ?	174
Fiche 31	Les nombres complexes et la géométrie	179
Fiche 32	Les transformations géométriques	186
Fiche 33	Les espaces vectoriels	191
Fiche 34	Les matrices.	193
Fiche 35	Le dénombrement.	205
Fiche 36	Les probabilités sur un ensemble fini.	211
Fiche 37	Les principales lois discrètes.	217
Fiche 38	Lois discrètes quelconques	225
Fiche 39	Calculs en appliquant les grands opérateurs.	230
Fiche 40	Inégalités à connaître en probabilités.	233
Fiche 41	Les principales lois continues	236
Fiche 42	Calculs dans les cas discret et continu	243
Fiche 43	Couples de variables aléatoires.	251
Fiche 44	Le point sur les notions en arithmétique	254
Fiche 45	Introduction à l'algorithmique.	259
Fiche 46	Introduction à la logique	263

Physique

Fiche 47	Le point sur les conversions	268
Fiche 48	Les notions d'erreur et d'incertitude.	273
Fiche 49	Le résultat expérimental.	276
Fiche 50	Les caractéristiques des ondes	280
Fiche 51	Rappels d'optique.	286
Fiche 52	Interférence de deux ondes.	291
Fiche 53	Le monde quantique – Introduction	294
Fiche 54	Cinématique et loi de Newton – Description d'un mouvement.	299
Fiche 55	Les lois de Newton	303
Fiche 56	Le mouvement des planètes	313

Fiche	57	Travail et énergie.	318
Fiche	58	Mouvement dans un champ électrique uniforme	331
Fiche	59	Bilan énergétique dans un champ électrique uniforme . .	336
Fiche	60	Énergie dans un système thermodynamique	339
Fiche	61	Mes premiers pas en thermodynamique	344
Fiche	62	La poussée d'Archimède	348
Fiche	63	Les bases en électricité (rappels de première).	351
Fiche	64	Les circuits RC série	358
Fiche	65	Comment déchiffrer les informations d'un oscilloscope ?	361

Chimie

Fiche	66	L'atome.	366
Fiche	67	La classification périodique des éléments (CPE)	371
Fiche	68	La structure de Lewis	377
Fiche	69	La géométrie des molécules (théorie VSEPR)	381
Fiche	70	Quantité de matière et concentration	386
Fiche	71	Tableau d'avancement	393
Fiche	72	Quotient de réaction et constante de réaction.	397
Fiche	73	Les réactions d'oxydoréduction	401
Fiche	74	Les piles	406
Fiche	75	Les électrolyseurs	415
Fiche	76	Les réactions acido-basiques.	420
Fiche	77	Le potentiel hydrogène : pH	425
Fiche	78	Titrages pH-métriques	432
Fiche	79	Titrages colorimétriques	438
Fiche	80	Titrages conductimétriques	443
Fiche	81	Dosages spectrophotométriques.	448
Fiche	82	Chimie organique – Famille carbonée (filière PCSI)	452
Fiche	83	Chimie organique – Famille oxygénée (filière PCSI)	461
Fiche	84	Chimie organique – Famille azotée (filière PCSI).	470
Fiche	85	Chimie organique – Famille soufrée (filière PCSI).	475
Fiche	86	Chimie organique – Famille halogénée (filière PCSI) . . .	478
Fiche	87	Chimie organique – Réactions chimiques	480
Fiche	88	Chimie organique – Analyse des composés organiques et rendement.	487
Fiche	89	Vitesse de réaction et temps de demi-réaction	498

Fiche	90	Cinétique chimique	509
Fiche	91	La catalyse	515

Informatique

Fiche	92	Types, boucles, tests, input	522
Fiche	93	Tuples, fonctions	526
Fiche	94	Manipulation de listes et de chaînes de caractères	529
Fiche	95	Passage par valeur, référence, variable globale, locale	533
Fiche	96	Représentation graphique	536
Fiche	97	Algorithmes, recherche d'un élément	539
Fiche	98	Recherche du maximum, du second maximum	545
Fiche	99	Listes de listes, images	549
Fiche	100	Complexité	553
Fiche	101	Dictionnaires	557
Fiche	102	Graphes	560

Bienvenue en prépa !

Vous avez dit prépa ?

1. Bienvenue en prépa !

Avant de consulter cet ouvrage, nous vous invitons à lire ces quelques lignes en guise d'introduction car, même si vous « restez » au lycée, beaucoup de choses vont changer... Afin d'appréhender au mieux votre année, autant savoir précisément où vous mettez les pieds !

2. À qui s'adresse ce livre ?

Cet ouvrage regroupe les notions essentielles à maîtriser parfaitement en mathématiques, physique, chimie et informatique pour intégrer une classe de MPSI (Mathématiques, Physique, Sciences de l'Ingénieur), MP2I (Mathématiques, Physique, Informatique et Ingénierie), PCSI (Physique, Chimie, Sciences de l'Ingénieur), PTSI (Physique, Technologie, Sciences de l'Ingénieur) ou BCPST (Biologie, Chimie, Physique, Sciences de la Terre).

3. Une nouvelle forme d'évaluation : vers le concours !

- Vous aviez l'habitude d'être noté sur 20 aux différents contrôles en fonction des exercices correctement traités et selon un barème précis. En prépa, vous serez noté en fonction des résultats des autres élèves de la classe. Cela signifie que vous pouvez obtenir une note de 20/20 sans avoir réalisé la totalité du sujet : par exemple, si vous êtes le meilleur en n'ayant traité que la moitié du sujet, vous avez 20/20 !
- Sur votre copie figure donc désormais votre classement, à côté de la note attribuée.

4. Quelles matières ?

Les matières enseignées en première année de prépa sont (le volume horaire dépend de votre filière) :

- les mathématiques ;
- la physique ;

Bienvenue en prépa !

- la chimie ;
- les sciences de l'ingénieur (MPSI, PCSI et PTSI) ;
- les sciences de la vie et de la Terre (BCPST) ;
- l'informatique ;
- le français : trois œuvres autour d'un thème commun ;
- l'anglais : thème (traduction du français vers l'anglais) et version (traduction de l'anglais vers le français) ;
- le sport : ce qui peut vous permettre de vous détendre et d'évacuer votre surplus de stress !

5. Quelle attitude adopter en prépa ?

Travaillez régulièrement !

Avec la masse de nouvelles informations que vous allez devoir digérer au cours de la semaine, vous ne pouvez pas vous permettre de travailler par intermittence. Sinon, vous serez vite perdu(e) et accumulerez trop de retard.

Prenez l'habitude de relire chaque soir les notes prises dans la journée. Notez les différents points que vous ne saisissez pas bien et n'hésitez pas à aller voir vos professeurs pour leur poser des questions.

Ne négligez pas les matières littéraires !

- D'abord parce qu'à niveau égal dans les matières scientifiques, ce sont l'anglais et le français qui feront la différence aux concours.
- Il est également vivement conseillé aux futurs ingénieurs d'être bilingues français/anglais à leur arrivée sur le marché du travail.
- Mais aussi parce que le français et l'anglais représentent un véritable « bol d'air frais » dans une semaine remplie de formules mathématiques et scientifiques de toutes sortes.

Faites-vous des amis !

D'accord, vous êtes classés à chaque devoir sur table, ce qui peut instaurer un certain « esprit concours » dans la classe. N'entrez surtout pas dans ce jeu : prêtez vos cours aux absents, expliquez ce que vous avez bien compris à ceux qui ont des difficultés, travaillez avec vos camarades de classe, etc. Pourquoi ? Parce que l'on progresse beaucoup plus

rapidement en expliquant aux autres et en leur posant des questions plutôt qu'en révisant seul dans son coin.

Ne travaillez pas uniquement avec les personnes de votre classe, sortez, allez au cinéma, allez au théâtre, allez voir des expositions, etc. Organisez-vous aussi des dîners de classe ! Le but est de partager autre chose que la vie scolaire. Et vous verrez, on peut se faire de véritables amis en prépa ! Cela vous permettra aussi de supporter le rythme soutenu des cours.

Rassurez-vous !

Il se peut que vous entendiez beaucoup de commentaires décourageants sur la prépa : « c'est horrible », « c'est très difficile », « tu ne vas faire que travailler », etc. De quoi vous miner le moral... Mais prenez les choses du bon côté :

- Vous avez choisi cet enseignement, et en plus votre candidature a été retenue. C'est tout de même une très bonne nouvelle !
- Vous allez travailler sur des thèmes qui vous plaisent *a priori*.
- La prépa est l'occasion de développer d'excellentes méthodes de travail.
- Vous ne perdez pas votre temps car en cas d'échec ou de changement d'orientation, vous pouvez intégrer d'autres filières.

Remerciements

Je tiens, tout d'abord, à remercier l'équipe éditoriale pour son soutien, son écoute et sa confiance.

Merci aussi à tous les élèves que j'ai accompagnés au cours de leurs études en classes préparatoires scientifiques. Leurs doutes et leurs questionnements m'ont permis d'insister sur les points les plus délicats à leur arrivée en mathématiques supérieures.

En espérant que cet ouvrage vous aidera du mieux possible, je vous souhaite une très bonne année scolaire.

Bon travail et excellente « prépa » à tous !

« Le succès ne vient qu'à ceux qui ne craignent pas l'effort. »

Marie-Virginie SPELLER

Mathématiques

1 Les bases du calcul

1. Les fractions

- Avec :
 - 0 au dénominateur : pour tout réel a , $\frac{a}{0}$ est impossible à calculer.
 - 0 au numérateur : pour tout réel a non nul, $\frac{0}{a} = 0$.

- Simplification de fractions (avec k et b non nuls) :

$$\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b} \text{ et } \frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}$$

- Produit de fractions (avec b et d non nuls) :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{ac}{bd}$$

- Division de fractions (avec b , c et d non nuls) :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{ad}{bc}$$

- Addition et soustraction de fractions

- Si les fractions sont au même dénominateur, il suffit d'additionner les deux numérateurs (avec b non nul) :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \text{ et } \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Si les fractions ne sont pas au même dénominateur, il faut les réduire au même dénominateur (avec b et d non nuls) :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} + \frac{c \times b}{d \times b} = \frac{ad + bc}{bd}$$

2. Les racines carrées

- Vocabulaire
 - Le signe $\sqrt{\quad}$ se nomme radical.
 - Le nombre ou l'expression qui se trouve à l'intérieur du symbole $\sqrt{\quad}$ se nomme radicande.

Dans $\sqrt{a}$, $\sqrt{\quad}$ est le radical et a est le radicande avec $a \geq 0$.

- Le nombre $\sqrt{a}$ existe si $a \geq 0$

En particulier : $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{a^2} = |a| = \pm a$

- Simplification de l'écriture d'une racine carrée

Pour $k \geq 0$ et a réel : $\sqrt{ka^2} = |a|\sqrt{k}$

Exemple

$$\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4 \text{ et } \sqrt{32} = \sqrt{2 \times 16} = \sqrt{2 \times 4^2} = 4\sqrt{2}$$

En général, il est d'usage de ne pas laisser de racine au dénominateur, ainsi pour tout réel $a > 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Exemple

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

- Addition et soustraction de racines

Pour additionner ou soustraire des racines carrées, il faut qu'elles aient le même radicande (même nombre sous le radical).

Pour tout réel $a \geq 0$:

$$\sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a}$$

$$4\sqrt{a} - 2\sqrt{a} = 2\sqrt{a}$$

Exemple

$$2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$7\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

[ATTENTION]

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

[REMARQUE]

Il est souvent nécessaire de simplifier une ou plusieurs racines dans l'expression pour effectuer une addition ou une soustraction.

Exemple

$$\sqrt{8} + \sqrt{2} = \sqrt{4 \times 2} + \sqrt{2} = \sqrt{2^2 \times 2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{125} - \sqrt{5} = \sqrt{25 \times 5} - \sqrt{5} = \sqrt{5^2 \times 5} - \sqrt{5} = 5\sqrt{5} - \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

- Multiplication et division de racines

La multiplication et la division de racines carrées n'exigent pas d'avoir le même nombre sous le radical.

Pour tous réels a et b positifs ou nuls :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Exemple

$$\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{3 \times 2} = \sqrt{6}$$

Pour tous réels a positif ou nul et b strictement positif :

$$\sqrt{a \div b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Exemple

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

3. Les puissances

- Cas avec 0 et 1
 - Un nombre élevé à la puissance 0 est toujours égal à 1 : $x^0 = 1$.
 - Un nombre élevé à la puissance 1 reste inchangé : $x^1 = x$.

- Addition et soustraction de nombres à puissances

Pour additionner ou soustraire des nombres à puissances, il faut qu'ils soient égaux **et** qu'ils aient le même exposant

$$x^a + x^a = 2x^a \text{ et } 4x^a - 2x^a = 2x^a$$

Exemple

$$2^3 + 2^3 = 2 \times 2^3$$

$$5 \times 3^4 - 3 \times 3^4 = (5 - 3) \times 3^4 = 2 \times 3^4$$

[ATTENTION]

$$x^{a+b} \neq x^a + x^b$$

$$x^{a-b} \neq x^a - x^b$$

[REMARQUE]

Il est souvent nécessaire de simplifier un ou plusieurs nombres à puissances dans une expression pour effectuer une addition ou une soustraction.

Exemple

$$2^3 + 2^5 = 2^3 + 2^2 \times 2^3 = 2^3 \times (1 + 2^2) = 2^3 \times (1 + 4) = 5 \times 2^3$$

$$27 + 9 = 3^3 + 3^2 = 3 \times 3^2 + 3^2 = 3^2 \times (3 + 1) = 4 \times 3^2$$

- Multiplication et division de nombres à puissances

$$x^a \times x^b = x^{a+b}$$

Avec x réel non nul : $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

Exemple

$$10^3 \times 10^4 = 10^{3+4} = 10^7 = 10\,000\,000$$

$$\frac{10^{12}}{10^{14}} = 10^{12-14} = 10^{-2} = 0,01$$

- Inverse d'un nombre à puissance

Avec x réel non nul :

$$\frac{1}{x^a} = x^{-a}$$

Exemple

$$\frac{1}{2^3} = 2^{-3}; \quad \frac{1}{2} = 2^{-1}$$

- Puissance de puissances

$$(x^a)^b = x^{a \times b} = x^{ab}$$

Exemple

$$(2^2)^5 = 2^{2 \times 5} = 2^{10} = 1\,024$$

$$(10^{-2})^2 = 10^{-2 \times 2} = 10^{-4} = 0,0001$$

- Puissance d'un produit et puissance d'une division

$$(x \times y)^a = x^a \times y^a$$

Exemple

$$(2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3 = 8 \times 125 = 1\,000$$

- Avec y réel non nul : $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$

Exemple

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125} = 0,064$$

- Puissance et racine carrée. Pour tout x réel positif ou nul : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

[À RETENIR]

Calculer la racine carrée d'un nombre positif ou nul revient à l'élever à la puissance $\frac{1}{2}$.

4. Développement et factorisation

- Associativité

- Addition : $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$

- Multiplication : $(a \times b) \times c = a \times (b \times c) = a \times b \times c$

Exemple

$$(1 + 2) + 3 = 1 + (2 + 3) = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$(1 \times 2) \times 3 = 1 \times (2 \times 3) = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

- Commutativité

- Addition : $a + b = b + a$

- Multiplication : $a \times b = b \times a$

Exemple

$$2 + 3 = 3 + 2 = 5 \text{ et } 2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$$

- Distributivité

- Simple : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

- Double : $(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

Exemple

$$2 \times (3 + 5) = 2 \times 3 + 2 \times 5 = 6 + 10 = 16$$

$$(3 + 1) \times (2 + 4) = 3 \times 2 + 3 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 4 = 6 + 12 + 2 + 4 = 24$$

- Identités remarquables

- Carrés

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Exemple

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$$

— Cubes

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

Exemple

$$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1^3 = x^3 + 1$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1^3 = x^3 - 1$$

2 Quelques bases en géométrie**1. Le théorème de Pythagore**

• Énoncé

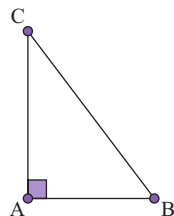
Le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Dans le triangle ABC rectangle en A :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

• Réciproque du théorème de Pythagore

Si dans un triangle le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

**Exemple**

Soit un triangle dont les côtés mesurent 5 cm, 4 cm et 3 cm.

$$5^2 = 25 \text{ et } 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

$5^2 = 4^2 + 3^2$ donc le triangle considéré est rectangle.

Soit un autre triangle dont les côtés mesurent 7 cm, 6 cm et 5 cm.

$$7^2 = 49 \text{ et } 6^2 + 5^2 = 36 + 25 = 61$$

$7^2 \neq 6^2 + 5^2$ donc cet autre triangle n'est pas rectangle.

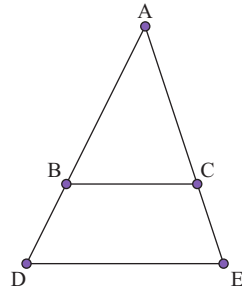
2. Le théorème de Thalès

- Énoncé

Si deux droites sécantes sont coupées par deux droites parallèles, alors elles déterminent sur ces droites sécantes des segments proportionnels

Autrement dit : soit ABC un triangle. B est un point de [AD] et C un point de [AE]. Si les droites (BC) et (DE) sont parallèles, alors :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$



Exemple

Soit un triangle ADE tel que AD = 12 cm, AE = 8 cm.

B est un point de [AD] tel que AB = 3 cm et C un point de [AE]. Les droites (BC) et (DE) sont parallèles. On cherche la longueur de AC.

En appliquant le théorème de Thalès :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \Leftrightarrow \frac{3}{12} = \frac{AC}{8} \Leftrightarrow AC = \frac{3 \times 8}{12} = \frac{24}{12} = 2 \text{ cm}$$

- Réciproque du théorème de Thalès

Si dans une configuration de deux droites sécantes, on a des points placés de part et d'autre de l'intersection de façon à obtenir des rapports égaux, alors les droites qui relient ces points sont parallèles.

Exemple

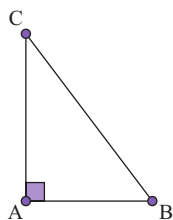
Soit un triangle ADE tel que AD = 10 cm, AE = 8 cm. B est un point de [AD] tel que AB = 4 cm et C un point de [AE] tel que AC = 3 cm.

$$\frac{AB}{AD} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0,4 \text{ et } \frac{AC}{AE} = \frac{3}{8}$$

Les deux rapports sont différents donc les droites (BC) et (DE) ne sont pas parallèles.

- Trigonométrie dans le triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A



$$\cos(\hat{B}) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin(\hat{B}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan(\hat{B}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AC}{AB}$$

[ATTENTION]

Ces formules ne sont valables que dans un triangle rectangle !

1 Rappels de cours

1. Les équations généralités

Les équations se présentent sous la forme $f(x) = b$ où f est une fonction, souvent une fonction affine, une fonction logarithme, une exponentielle, une racine, etc.

Exemple

La fonction carrée f définie par $f(x) = x^2$ ne réalise pas une bijection sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ (elle est décroissante sur $] -\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$).

Vous ne pouvez donc pas utiliser la formule $x = f^{-1}(b)$ avec cette fonction lorsque $x \in \mathbb{R}$.

2. Les équations avec expressions affines

- Equations du type $ax = 0$ avec a réel :
si a est un réel non nul, alors l'unique solution de cette équation est $x = 0$ donc l'ensemble S des solution est $S = \{0\}$.
Si a est nul, alors l'équation admet une infinité de solutions. $S = \mathbb{R}$.
- Equations du type $x + b = 0$ avec b réel ;
l'unique solution de cette équation est $x = -b$. $S = \{-b\}$.
- Equations du type $ax + b = 0$:
si a et un réel non nul et b un réel, alors cette équation a pour unique solution $x = -\frac{b}{a}$. $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

3. Équations sous forme de nullité d'un produit de facteurs

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs au moins est nul : $A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.

Parfois, et même souvent, l'équation ne se présente pas sous la forme d'un produit directement factorisé. C'est donc à vous de factoriser

l'expression afin d'obtenir un produit de facteurs et pouvoir ainsi résoudre l'équation.

4. Équations sous forme de nullité d'un quotient

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur non nul :

$$\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ et } B \neq 0.$$

Parfois et même souvent, il arrive que l'équation ne se présente pas sous la forme d'un seul quotient. C'est donc à vous de réduire l'expression au même dénominateur afin d'obtenir un unique quotient et pouvoir ainsi résoudre l'équation.

[ATTENTION]

Ne pas oublier que le dénominateur B ne doit pas s'annuler.

Exemple

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ou } x = 3 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3, \text{ et donc } S = \{3\} \end{aligned}$$

5. Les équations non linéaires

La fonction f est dans ce cas une fonction non affine. Il peut s'agir d'une fonction bijective (c'est-à-dire que chaque y admet un unique antécédent x par f).

Équations	Solutions
$\frac{1}{x} = a, x \neq 0, a \neq 0$	$x = \frac{1}{a}, x \neq 0, a \neq 0$
$\ln(x) = a, x > 0$	$x = e^a$
$e^x = a, a > 0$	$x = \ln(a), a > 0$
$\sqrt{x} = a, a \geq 0, x \geq 0$	$x = a^2, a \geq 0, x \geq 0$
$x^2 = a, a \geq 0$	$x = \pm\sqrt{a}, a \geq 0$

Équations	Solutions
$x^3 = a$	$x = \sqrt[3]{a}$
$x^{2p} = a, a \geq 0, p \in \mathbb{N}^*$	$x = \pm \sqrt[2p]{a}, a \geq 0, p \in \mathbb{N}^*$
$x^{2p+1} = a$	$x = \sqrt[2p+1]{a}$
$ x = a, a \geq 0$	$x = a$ ou $x = -a$

[REMARQUE]

Un nombre entier pair n s'écrit $n = 2p$ et un nombre entier impair n s'écrit $n = 2p + 1$ où p est un entier naturel.

[ATTENTION]

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, x \geq 0$	$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}, x \geq 0$	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, n \geq 1, \begin{cases} x \geq 0, n \text{ pair} \\ x \text{ réel}, n \text{ impair} \end{cases}, x \geq 0$
--	---	---

2 Applications directes du cours

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l' les équations suivantes :

$$1. (x-1)(2x+3) = 0 \qquad 2. \frac{x+1}{x-1} = \frac{-1}{2x-3}$$

Corrigés

$$1. (x-1)(2x+3) = 0 \Leftrightarrow (x-1 = 0 \text{ ou } 2x+3 = 0) \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -\frac{3}{2})$$

2. Tout d'abord vous mettez tous les termes du même côté :

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{-1}{2x-3} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{2x-3} = 0$$

Puis vous réduisez au même dénominateur :

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-3)(x+1)}{(x-1)(2x-3)} + \frac{1 \times (x-1)}{(x-1)(2x-3)} = 0$$

Ensuite vous développez, réduisez et ordonnez :

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 2x - 3x - 3}{(x-1)(2x-3)} + \frac{x-1}{(x-1)(2x-3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - x - 3}{(x-1)(2x-3)} + \frac{x-1}{(x-1)(2x-3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 4}{(x-1)(2x-3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ (x-1)(2x-3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2} \\ x \neq 1 \text{ et } x \neq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$$

[ATTENTION]

Lorsqu'il s'agit de déterminer des valeurs interdites, il faut utiliser « et » et non « ou », par exemple :

$$(x-1)(2x-3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ et } x \neq \frac{3}{2}$$

[TECHNIQUE]

Pour gagner du temps vous pouvez effectuer un produit en croix (attention : non valable dans le cas d'inéquations !) et obtenez :

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{-1}{2x-3} \Leftrightarrow (x+1)(2x-3) = (x-1) \times (-1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 2x - 3 = -(x-1) \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = -x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

3 Exercices

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2 + 4 + (x-4) = 0$

3. $\frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{2x}{x-1}$

2. $x^2 - 25 + (x-5)(x+1) = 0$.

4. $x^2 = -1$.

Corrigés

1. $x^2 + 4 + (x - 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4 + x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1$$

et donc $S = \{-1 ; 0\}$

2. $x^2 - 25 + (x - 5)(x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 5)(x + 5) + (x - 5)(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)[(x + 5) + (x + 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)(2x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x - 5)(x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 5 = 0 \text{ ou } x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \text{ ou } x = -3$$

et donc $S = \{-3 ; 5\}$

3. $\frac{2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{2x}{x - 1}$

$$\frac{2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{2x}{x - 1} \Leftrightarrow \frac{2x + 1}{x^2 - 1} - \frac{2x}{x - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x + 1}{x^2 - 1} - \frac{2x(x + 1)}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x + 1 - 2x^2 - 2x}{x^2 - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 1}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \\ x^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \end{cases}$$

$$S = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

4. L'équation $x^2 = -1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ car un carré n'est jamais négatif dans cet ensemble. $S = \emptyset$.

[ATTENTION]

Dans l'ensemble des nombres complexes, cette équation admet deux solutions : $x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = i^2 \Leftrightarrow x = i \text{ ou } x = -i$

Le point sur la résolution de systèmes

1 Rappels de cours

On cherche à résoudre un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues x et y :

$$(S) \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

1. La résolution par substitution

Il s'agit d'exprimer l'une des variables en fonction de l'autre. Dans le système (S), il est possible d'exprimer y en fonction de x dans la première équation, si $b \neq 0$:

$$ax + by = e \Leftrightarrow by = e - ax \Leftrightarrow y = \frac{e - ax}{b}$$

Puis on remplace y dans la seconde équation :

$$cx + dy = f \Leftrightarrow cx + d \times \frac{e - ax}{b} = f \Leftrightarrow \frac{cbx + de - dax}{b} = \frac{bf}{b}$$

$$\Leftrightarrow cbx + de - dax = bf \Leftrightarrow (bc - ad)x = bf - de$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{bf - de}{bc - ad}, \text{ si } bc - ad \neq 0$$

On obtient l'expression de y en remplaçant par la valeur obtenue ci-dessus :

$$y = \frac{e - ax}{b} = \frac{e - a \frac{bf - de}{bc - ad}}{b} = \frac{e(bc - ad) - a(bf - de)}{b(bc - ad)}$$

$$y = \frac{ebc - ead - abf + ade}{b(bc - ad)} = \frac{ebc - abf}{b(bc - ad)} \Leftrightarrow y = \frac{ec - af}{bc - ad}$$

Il n'est pas utile de retenir les valeurs de x et y calculées ci-dessus. Dans chaque exemple, on fera le calcul.

2. La résolution par combinaison

Cette méthode consiste à éliminer une variable de manière à se retrouver en présence d'une équation à une seule inconnue x ou y . Pour cela, il suffit d'additionner ou soustraire les deux équations affectées d'un facteur permettant de supprimer une variable.

Dans le système (S), il suffit de multiplier la 1^{re} équation par d et la 2^{de} par b puis de les soustraire. Cela permet d'éliminer la variable y :

$$d(ax + by) - b(cx + dy) = de - bf$$

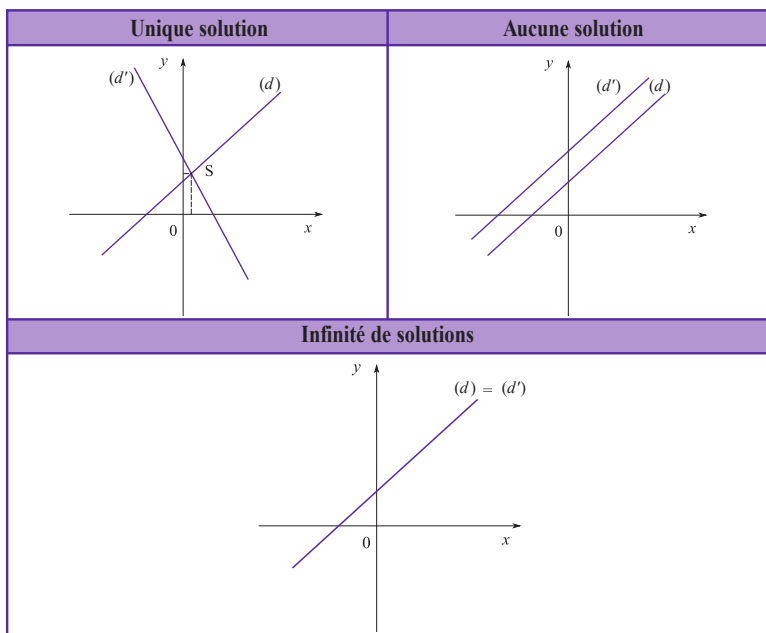
$$\Leftrightarrow dax + dby - bcx - bdy = de - bf \Leftrightarrow dax - bcx = de - bf$$

$$\Leftrightarrow (da - bc)x = de - bf \Leftrightarrow x = \frac{de - bf}{ad - bc} = \frac{bf - de}{bc - ad}, \text{ si } bc - ad \neq 0$$

Puis on remplace x par son expression dans l'une ou l'autre des équations de départ pour obtenir le même résultat que précédemment. Le y s'obtient alors de la même manière que dans la méthode par substitution.

3. Représentation graphique

Les droites (d) et (d') ont pour équations respectives : $ax + by = e$ et $cx + dy = f$.



4. Les systèmes non linéaires

Les systèmes non linéaires sont formés d'équations qui ne sont pas forcément affines. Le principe de résolution est le même, à vous de choisir la méthode que vous préférez sauf si on vous l'impose dans l'énoncé !

2 Applications directes du cours

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant en utilisant la méthode par substitution :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant en utilisant la méthode par combinaison :

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

Corrigés

1. En utilisant la méthode par substitution, vous obtenez :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -x = 1 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2y - 1) + 3y = 5 \\ x = 2y - 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4y - 2 + 3y = 5 \\ x = 2y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y = 7 \\ x = 2y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \times 1 - 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$S = \{(1 ; 1)\}$$

2. Tout d'abord vous nommez les équations respectivement (1) et (2) :

$$\begin{cases} x + 3y = 2 & (1) \\ -x + 2y = 3 & (2) \end{cases}$$

(1) + (2) donne :

$$(x + 3y) + (-x + 2y) = 2 + 3 \Leftrightarrow 5y = 5 \Leftrightarrow y = 1$$