PC/PC*
PSI/PSI*

# MATHS

## Exercices corrigés et notions indispensables pour réussir les concours écrits et oraux

Maxime Puech

ellipses

PC/PC*
PSI/PSI*

# MATHS

## Exercices corrigés et notions indispensables pour réussir les concours écrits et oraux

**Maxime Puech**
Polytechnicien

ellipses

J’aimerais remercier mon professeur de mathématiques de deuxième année de classe préparatoire pour sa relecture et ses précieux conseils, tant sur le fond que sur la forme.

ISBN 9782340-111448
Dépôt légal : janvier 2026
©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris




Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

# Avant-propos

Pour réussir les écrits et oraux des concours les plus exigeants, il n'est souvent pas suffisant de connaître par cœur son cours. Mais il est nécessaire de savoir le mobiliser intelligemment, faire des liens entre les différents chapitres et parfois se souvenir de la solution de certains exercices.

Afin de vous aider dans ce travail, cet ouvrage est scindé en deux parties. La première partie compile des exercices corrigés et commentés, classés par thèmes en accord avec le programme. Dans chaque chapitre, vous pourrez trouver :

- Des définitions ne figurant pas dans le programme, mais qu'il est important de connaître avant de commencer les oraux, car les examinateurs les considèrent comme connues.
- Des sujets qui traitent de notions souvent rencontrées aux écrits des concours. Ce sont des exercices longs et complets, auxquels un écrit pourrait dédier une partie complète.
- Des exercices regroupés par sous-thématiques, et ordonnés par difficulté au sein de ces dernières.

Chaque chapitre comporte des indications pour la résolution des exercices et des sujets. Les corrections finissent généralement par une remarque permettant de comprendre la démarche de résolution, de détailler l'intérêt du résultat démontré ou d'aller plus loin.

La seconde partie concentre des notions indispensables pour préparer les écrits, car ce sont des résultats provenant directement des théorèmes du programme. Les sujets écrits ou oraux pourront vous faire admettre ces résultats en préliminaires ou consacreront une partie à les démontrer. Connaître ces résultats en avance et les avoir déjà démontrés vous donnent un avantage colossal, puisque vous passerez à la suite du sujet plus rapidement que vos voisins. Généralement, les « grandes » classes préparatoires scientifiques les donnent en complément de cours ou en exercices à leurs élèves, creusant davantage l'écart avec les autres établissements. C'est la raison pour laquelle j'ai écrit cet ouvrage : donner accès à ces notions à tous les étudiants. Dans chacun de ces chapitres, vous trouverez :

- Les énoncés des résultats à connaître et leurs démonstrations,
- Des exercices d'applications corrigés.

Comme dans la première partie, chaque chapitre comporte des indications et des remarques. L'ordre de lecture est important, car certains théorèmes sont démontrés à l'aide des précédents. Cependant, il sera toujours fait mention en indication et dans la correction à quel chapitre se référer pour chaque théorème utilisé. De plus, certains exercices de la première partie utilisent aussi des résultats de la seconde partie, et il en sera fait mention soit au début des sujets soit dans les indications.

# Table des matières

**Partie 1. Exercices corrigés** **5**

1 Algèbre . . . 7
2 Espaces préhilbertiens réels . . . 49
3 Espaces normés . . . 81
4 Suites et séries . . . 113
5 Intégration . . . 155
6 Probabilités . . . 183
7 Calcul différentiel . . . 219

**Partie 2. Notions indispensables** **243**

8 Série harmonique . . . 245
9 Séries et intégrales de Bertrand . . . 251
10 Lemme de Cesàro . . . 257
11 Intégrales de Wallis . . . 265
12 Théorème de Bolzano-Weierstrass . . . 273
13 Théorème de Heine . . . 281
14 Théorème d'approximation de Weierstrass . . . 287
15 Lemme de Riemann-Lebesgue . . . 295
16 Théorème de Fubini . . . 301
17 Intégrale de Gauss . . . 305
18 Fonction gamma . . . 315
19 Opérations sur les relations de comparaison . . . 325
20 Fonction zêta . . . 349
21 Intégrale de Dirichlet . . . 363
22 Transformation de Laplace . . . 373
23 Compléments : espaces vectoriels normés . . . 391
24 Structures algébriques . . . 413
25 Arithmétique des polynômes . . . 433
26 Lemme des noyaux . . . 453

## Première partie

# Exercices corrigés

Chapitre 1

# Algèbre

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## 1. Définitions à connaître

Dans cette section, on rappelle quelques définitions qui serviront à traiter les exercices suivants. On fixe $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

**1.1. Définition.** *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle commutant de $u$ l'ensemble*

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}.$$

On peut définir la même notion avec les matrices, et on conserve la même notation.

**1.2. Définition.** *Soit $u$ un endomorphisme de $E$. On dit que $u$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de $E$ composée de vecteurs propres de $u$.*

On rappelle cette définition, puisque le programme traite généralement la diagonalisation dans des espaces vectoriels de dimension finie. On passe alors par les endomorphismes, puisqu'on se limiterait en considérant seulement des matrices.

**1.3. Définition.** *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de $E$. On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est codiagonalisable si et seulement s'il existe une base de $E$ composée de vecteurs propres communs à tous les $(u_i)_{i\in I}$.*

Fixons désormais $n \in \mathbb{N}^*$, et reformulons les définitions précédentes en termes de matrices.

**1.4. Définition.** *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est codiagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que*

$$PA_iP^{-1} \text{ est diagonale pour tout } i \in I.$$

On peut faire de même avec la trigonalisation, puisque nous travaillons en dimension finie.

**1.5. Définition.** *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est cotrigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que*

$$PA_iP^{-1} \text{ est triangulaire supérieure pour tout } i \in I.$$

Lorsque $E$ est de dimension finie, cette définition s'applique aux endomorphismes en considérant une base dans laquelle les matrices associées aux endomorphismes sont triangulaires supérieures. Le lecteur pourra se convaincre que les définitions en termes d'endomorphismes et de matrices sont bien équivalentes. Dans la définition suivante, on prend $n \geq 2$.

**1.6. Définition.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $A_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée en enlevant la $i$-ème ligne et la $j$-ème colonne de $A$. On appelle comatrice de $A$, et on note* $\mathrm{com}(A)$*, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que*

$$[\mathrm{com}(A)]_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}), \quad \text{pour tous } i, j \in [\![1, n]\!].$$

On sait alors que par développement d'un déterminant sur les colonnes ou sur les lignes, on a pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}[\mathrm{com}(A)]_{i,k} \quad \text{et} \quad \det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}[\mathrm{com}(A)]_{k,j}.$$

Avant d'aborder ces exercices, on conseille au lecteur de se familiariser avec les trois derniers chapitres de la partie 2. En particulier, les deux premiers exercices demandent de connaître les notions abordées dans le chapitre 24 (p. 413).

## 2. Algèbre générale

**Exercice 1**
Soient $(A, +, \times)$ un anneau et $x, y \in A$. Montrer que si $1_A - xy$ est inversible, alors $1_A - yx$ aussi.

**Exercice 2**
Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $G$ un sous-groupe de cardinal fini de $\mathrm{GL}(E)$. On pose

$$p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g.$$

1. Montrer que $p$ est un projecteur de $E$.
2. En déduire que

$$\bigcap_{g \in G} \ker(g - \mathrm{id}) = \mathrm{Im}(p) \quad \text{et} \quad \dim\left(\bigcap_{g \in G} \ker(g - \mathrm{id})\right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{tr}(g).$$

## 3. Polynômes

**Exercice 3**
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ scindés. On écrit $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $P' + aP$ est scindé ou constant sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} b_k P^{(k)}$ est scindé ou constant sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 4**
Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

**Exercice 5**
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P = A^2 + B^2.$$

**Exercice 6**
On dit qu'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est pair (resp. impair) si et seulement s'il est combinaison linéaire de monômes de degré pair (resp. impair). Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X^2 + 1) = (P(X))^2 + 1$.

1. Montrer que $P$ est pair ou impair.
2. Montrer que si $P$ est impair, alors $P(X) = X$.

3. En déduire que si $P$ est non constant, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$P(X) = \underbrace{(X^2+1) \circ \cdots \circ (X^2+1)}_{n \text{ fois}}.$$

**Exercice 7**
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

1. Montrer que $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.
2. Soit $A$ une partie de $\mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $P$ pour que $P(A) \subset A$ dans les cas suivants :
   (a) $A = \mathbb{R}$. (b) $A = \mathbb{Q}$. (c) $A = \mathbb{Z}$.
3. On suppose $P$ non constant, on note $d$ son degré, et on suppose que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. Calculer de deux manières différentes :
$$\int_0^{2\pi} P(e^{i\theta})\overline{P(e^{i\theta})}e^{-id\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$
4. En déduire l'ensemble des polynômes $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $Q(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

# 4. Algèbre linéaire

**Exercice 8**
Soient $E$, $F$ et $G$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(E,G)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $f$ et $g$ pour qu'il existe $h \in \mathscr{L}(F,G)$ telle que $g = h \circ f$.
2. Soient $g \in \mathscr{L}(E,G)$ et $h \in \mathscr{L}(F,G)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $g$ et $h$ pour qu'il existe $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $g = h \circ f$.

**Exercice 9**
Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On pose
$$N = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker(u^k) \quad \text{et} \quad J = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(u^k).$$

1. Montrer que la suite $(\ker(u^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.
2. Montrer que $N$ et $J$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$, stables par $u$ et supplémentaires.

**Exercice 10**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n$. Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, on dit que $u$ est cyclique si et seulement s'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de $E$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que si $u$ est nilpotent d'indice $n$, alors $u$ est cyclique.
2. Montrer que si $u$ admet $n$ valeurs propres distinctes, alors $u$ est cyclique.
3. On suppose que $u$ est cyclique. Montrer que le commutant de $u$ est $\mathbb{R}_{n-1}[u]$.

**Exercice 11**
Soit $n \geq 2$. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

**Exercice 12**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A$ et $B$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On se donne ainsi une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$A = PBP^{-1}.$$

On écrit $P = R + iJ$, avec $R = \mathrm{Re}(P)$ et $J = \mathrm{Im}(P)$ des matrices à coefficients réels.

1. Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $R + tJ \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que $A$ et $B$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 13**
Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $p, q, r$ des projecteurs de $E$. On suppose que $p + \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$ est un projecteur. Montrer que $q$ et $r$ sont nuls.

**Exercice 14**
Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est liée. Montrer que $f$ est une homothétie.

**Exercice 15**
Montrer qu'une matrice de trace nulle est semblable à une matrice à coefficients diagonaux nuls.

# 5. Déterminant

**Exercice 16**
Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $A\,\mathrm{com}(A)^T = \mathrm{com}(A)^T A = \det(A) I_n$.
2. Donner le rang de $\mathrm{com}(A)$ en fonction de celui de $A$.
3. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A) = \mathrm{com}(A)^T$.

**Exercice 17**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $AB = BA$. Montrer que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(DA - CB).$$

**Exercice 18**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

# 6. Réduction

**Exercice 19**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $A$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. En déduire une preuve du théorème de Cayley-Hamilton.

**Exercice 20**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\chi_A = \chi_B \iff \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(B^k).$$

**Exercice 21**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On cherche à résoudre l'équation

$$P(M) = A, \quad \text{d'inconnue } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

1. Montrer que si $A$ est diagonalisable, l'équation admet toujours une solution.
2. Que dire si $A$ n'est pas diagonalisable ?
3. Discuter l'équation dans le cas où $n = 2$ et $P(X) = X^2$.

**Exercice 22**
On pose $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Résoudre l'équation $M^2 + M = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**Exercice 23**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes de $E$.
   (a) On suppose que $u$ et $v$ commutent. Montrer que les espaces propres de $u$ sont stables par $v$.
   (b) On suppose que $u$ est diagonalisable, et que $v$ stabilise les espaces propres de $u$. Montrer que $u$ et $v$ commutent.
2. En déduire que si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille codiagonalisable d'endomorphismes de $E$, alors c'est une famille d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux.
3. On se propose de montrer deux réciproques partielles. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de $E$ diagonalisables et commutant deux à deux.
   (a) Montrer que si $I$ est fini, $(u_i)_{i\in I}$ est codiagonalisable.
   (b) En déduire que si $E$ est de dimension finie, $(u_i)_{i\in I}$ est codiagonalisable.

**Exercice 24**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ par

$$u(M) = AM - MB, \quad \text{pour tout } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

1. Montrer que si $\alpha \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\beta \in \mathrm{Sp}(B)$, alors $\alpha - \beta \in \mathrm{Sp}(u)$.
2. Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.
   (a) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)M = MP(B + \lambda I_n)$.
   (b) En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\beta \in \mathrm{Sp}(B)$ tels que $\lambda = \alpha - \beta$.
3. En déduire $\mathrm{Sp}(u)$.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $A$ et $B$ pour qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$.

**Exercice 25**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right\}.$$

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

2. On suppose que $A$ est à diagonale strictement dominante, i.e.

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que $A$ est inversible.

**Exercice 26**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on dit que $A$ est une matrice stochastique si et seulement si ses coefficients sont tous positifs et

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices stochastiques.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un ensemble convexe, compact et stable par produit.
2. Montrer que les valeurs propres d'une matrice stochastique ont un module inférieur ou égal à 1.
3. Soit $A \in \mathcal{S}$ ayant tous ses coefficients strictement positifs. On note $B$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ formée en enlevant la dernière colonne et la dernière ligne de $A$.
   (a) Montrer que $B - I_{n-1}$ est à diagonale strictement dominante.
   (b) En déduire que $\dim(\ker(A - I_n)) = 1$.
   (c) Montrer que 1 est la seule valeur propre de $A$ de module 1.

**Exercice 27**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on dit que $A$ est une matrice circulante si et seulement s'il existe $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ l'ensemble des matrices circulantes.

1. Montrer qu'il existe $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qu'on déterminera, telle que $\mathscr{C}_n = \mathbb{C}[J]$.
2. Exprimer les éléments propres de $J$.
3. Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, calculer $\det(P(J))$.
4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $P = \sum_{k=0}^{p-1} X^k$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $p$ pour que $P(J)$ soit inversible.

**Exercice 28**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que $A$ est à diagonale propre si et seulement si ses valeurs propres sont réelles, et que ses éléments diagonaux sont ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités. On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices à diagonale propre.

1. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la somme de deux matrices de $\mathcal{E}_n$.
2. Caractériser $\mathcal{E}_2$.

3. Déterminer les matrices antisymétriques réelles à diagonale propre.
4. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   (a) On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de $A$. Montrer que
   $$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$
   (b) En déduire l'ensemble des matrices symétriques réelles à diagonale propre.

## Indications

**Exercice 1 :**
*Penser aux séries entières, et au développement de $(1-t)^{-1}$ pour $|t| < 1$.*

**Exercice 3**
Q1 : *Considérer, pour $a \in \mathbb{R}$, $x \mapsto P(x)e^{ax}$ et utiliser le théorème de Rolle.*

**Exercice 5 :**
*Montrer que toute racine de $P$ est de multiplicité paire.*

**Exercice 6 :**
Q3 : *Montrer que si $P$ est pair, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^2+1)$, puis procéder par récurrence.*

**Exercice 7 :**
Q2 (c) : *Pour $n \in \mathbb{N}$, considérer le polynôme $H_n(X) = \frac{1}{n!}X(X-1)\cdots(X-n+1)$, et montrer qu'il vérifie $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.*
Q4 : *Montrer que ce sont les polynômes de la forme $aX^m$, où $a \in \mathbb{U}$ et $m \in \mathbb{N}$.*

**Exercice 10 :**
Q3 : *Pour $v \in \mathcal{C}(u)$, montrer que $v$ coïncide avec un polynôme en $u$ sur la base $(x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$.*

**Exercice 11 :**
*Raisonner par l'absurde, et montrer qu'un tel hyperplan contiendrait alors toutes les matrices nilpotentes.*

**Exercice 15 :**
*Procéder par récurrence et distinguer le cas où la matrice est un multiple de l'identité. Dans les autres cas, utiliser le résultat de l'exercice précédent, donnant que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ n'est pas une homothétie, il existe un vecteur $X$ tel que $(X, AX)$ est libre.*

**Exercice 16 :**
*Se reporter à la définition de la comatrice donnée en début de chapitre.*

**Exercice 17 :**
*Montrer d'abord le résultat dans la cas où $A$ est inversible.*

**Exercice 22 :**
*Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, et passer par la trace et le déterminant.*

**Exercice 24 :**
Q2 (b) : *Appliquer la question précédente à* $\chi_A$.

**Exercice 25 :**
Q1 : *Pour* $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$*, prendre* $X$ *un vecteur propre associé, et considérer* $i \in [\![1, n]\!]$ *tel que* $|x_i| = \|X\|_\infty$.

**Exercice 26 :**
Q1 : *Pour une partie d'un espace de dimension finie, être compacte est équivalent à être fermée et bornée. Se reporter au chapitre 23 (p. 391) pour plus de détails.*
Q3 (a) : *Voir l'exercice précédent pour la définition.*

**Exercice 27 :**
Q2 : *Pour* $k \in [\![0, n-1]\!]$*, considérer* $X_k = (1\ \omega^k\ \cdots\ (\omega^k)^{n-1})^T$*, où* $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

**Exercice 28 :**
Q3 : *Considérer* $AA^T$.
Q4 (a) : *Calculer* $\mathrm{tr}(A^2)$.

## ☑ Corrigés des exercices

**Exercice 1**

On suppose que $1_A - xy$ est inversible, et on note $z$ son inverse. Alors

$$(1_A - yx)(1_A + yzx) = 1_A + yzx - yx - yxyzx.$$

Or,

$$yxyzx = -y(1_A - xy)zx + yzx = -yx + yzx.$$

On en déduit que

$$(1_A - yx)(1_A + yzx) = 1_A.$$

De même, $(1_A + yzx)(1_A - yx) = 1_A$. Donc $1_A - yx$ est inversible. □

**Remarques**

Comment intuiter une telle formule ? On sait que pour tout $t \in ]-1, 1[$,

$$(1-t)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

On peut donc proposer le raisonnement suivant

$$(1_A - yx)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (yx)^n = 1_A + y\sum_{n=0}^{+\infty} (xy)^n \cdot x = 1_A + y(1_A - xy)^{-1}x.$$

Il reste ensuite à vérifier si cette formule convient. Évidemment, ce qu'on vient d'écrire n'est pas correct. Il faudrait définir les séries dans un anneau, puis la convergence de celles-ci, et le cas précédent ne s'appliquera peut-être même pas. Cependant, cette idée

est à conserver pour d'autres exercices. En effet, dans le cas d'un exercice du chapitre 24 (p. 413), si $a \in A$ est nilpotent, on avait bien

$$(1_A - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n,$$

puisque la somme est alors finie.

**Exercice 2**

• **1.** Soit $g \in G$. L'application $h \in G \mapsto g \circ h$ est une bijection de $G$ dans $G$, d'inverse donné par $h \in G \mapsto g^{-1} \circ h$. Ainsi, $G = g \circ G$. Alors,

$$g \circ p = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} g \circ h = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in g \circ G} h = p.$$

On en déduit que

$$p \circ p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} p = p.$$

Donc $p$ est un projecteur de $E$.

• **2.** $\subset$ Soit $x \in \bigcap_{g \in G} \ker(g - \mathrm{id})$. Alors

$$p(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x = x.$$

Donc $x \in \mathrm{Im}(p)$.
$\supset$ Soit $x \in \mathrm{Im}(p)$. Pour tout $g \in G$,

$$g(x) = g(p(x)) = (g \circ p)(x) = p(x) = x,$$

avec la question précédente. Donc $x \in \ker(g - \mathrm{id})$. On en déduit que

$$\bigcap_{g \in G} \ker(g - \mathrm{id}) = \mathrm{Im}(p).$$

Comme $E$ est de dimension finie, on passe à la dimension,

$$\dim\left(\bigcap_{g \in G} \ker(g - \mathrm{id})\right) = \mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{tr}(g). \qquad \square$$

**Remarques**

Dans la deuxième question, on a utilisé implicitement que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p)$. En effet, en dimension finie le rang d'un projecteur est égal à sa trace. Pour le montrer, on considère la décomposition $\ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$, sachant que $\mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{id})$. Ainsi, la matrice

représentative de $p$ dans une base de $E$ est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} I_{\mathrm{rg}(p)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La trace et le rang étant un invariant de similitude, on en déduit que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p)$. Une application de ce résultat, qu'on peut retrouver formulée telle quelle dans un exercice d'oral, est : étant donné $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $A^p = I_n$, montrer que

$$\dim(\ker(A - I_n)) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{tr}(A^k).$$

En supposant que $p$ est l'entier non nul minimal tel que $A^p = I_n$, alors $H = \{A^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de cardinal $p$. Et on a évidemment que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\ker(A - I_n) \subset \ker(A^k - I_n),$$

ce qui suffit à conclure. Dans le cas où $p$ n'est pas minimal, on peut l'écrire $p = qr$, avec $q \geq 2$ et où $r$ est l'entier non nul minimal tel que $A^r = I_n$. En réarrangeant la somme, on trouve alors le résultat.

**Exercice 3**

• **1.** Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = P(x)e^{ax}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On note $a_1 < \cdots < a_r$ les racines de $P$, de multiplicités $m_1, \ldots, m_r$, où $r \in \mathbb{N}^*$. On sait alors que $P' + aP$ a au moins

$$(m_1 - 1) + \cdots + (m_r - 1) = \deg(P) - r$$

racines réelles comptées avec multiplicité, que sont $a_1, \ldots, a_r$. Soit $k \in [\![0, r-1]\!]$. On a

$$f(a_k) = 0 = f(a_{k+1}).$$

Or $f$ est dérivable sur $]a_k, a_{k+1}[$ et continue sur $[a_k, a_{k+1}]$. D'après le théorème de Rolle, on dispose de $b_k \in ]a_k, a_{k+1}[$ tel que $f'(b_k) = 0$. Or

$$f'(b_k) = (P'(b_k) + aP(b_k))e^{ab_k}.$$

Donc $(P' + aP)(b_k) = 0$. Ce qui apporte $r - 1$ racines réelles supplémentaires, et monte le total à $\deg(P) - 1$. Si $a = 0$, cela montre déjà que $P' + aP$ est scindé ou constant. Sinon, supposons que $a > 0$. Alors

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0,$$

par croissances comparées. $f$ n'étant pas constante sur $]-\infty, b_1]$, on dispose de $x_1 \in ]-\infty, b_1]$ tel que $f(x_1) \neq 0$. Et on suppose que $f(x_1) > 0$, par symétrie. Comme $f$ tend vers 0 en $-\infty$, on dispose de $A \leq b_1$ tel que

$$\forall x \leq A, \quad f(x) < \frac{f(x_1)}{2}.$$

Par théorème des valeurs intermédiaires sur $[A, x_1]$ et $[x_1, b_1]$, on dispose de $x_2 \in ]A, x_1[$ et $x_3 \in ]x_1, b_1[$ tels que

$$f(x_2) = \frac{f(x_1)}{2} = f(x_3).$$

On peut donc appliquer le théorème de Rolle à $f$ sur $]x_2, x_3[$, et obtenir une nouvelle racine de $P' + aP$. Ainsi $P' + aP$ est scindé sur $\mathbb{R}$. On fait de même en $+\infty$ si $a < 0$. D'où le résultat.

• **2.** $Q$ étant scindé sur $\mathbb{R}$, on l'écrit

$$Q(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - r_i), \quad \text{où } r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}.$$

On note $D$ l'opérateur de dérivation sur $\mathbb{R}[X]$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} b_k P^{(k)} = Q(D)(P) = \Big(\prod_{i=1}^{n}(D - r_i\mathrm{id})\Big)(P) = \prod_{i=1}^{n}(P' - r_i P).$$

Ce qui montre le caractère scindé ou constant comme produit de polynômes scindés ou constants d'après la question précédente. □

**Remarques**

La première question est particulièrement difficile, car il faut penser à introduire la bonne fonction afin d'appliquer le théorème de Rolle. Cependant, $P' + aP$ peut faire penser à une équation différentielle, dont la solution est $x \mapsto e^{-ax}$. On peut ainsi faire apparaître une « dérivée exacte » en multipliant par $x \mapsto e^{ax}$. La seconde question s'en déduit alors aisément.

**Exercice 4**

Analyse : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un tel polynôme. Si $P$ est constant, on remarque que $P = 0$ ou $P = 1$. Sinon, soit $r \in \mathbb{C}$ une racine de $P$. Alors $P(r^2) = P(r)P(r-1) = 0$. Donc $r^2$ est racine de $P$. On montre alors par récurrence que $r^{2^n}$ est racine de $P$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $P$ a un nombre fini de racines, on a nécessairement

$$r^{2^m} = r^{2^n}, \quad \text{pour certains } m \neq n,$$

ce qui montre que $r = 0$ ou $r$ est une racine de l'unité. Si 0 est racine de $P$, on a

$$P(1) = P(1)P(0) = 0, \quad \text{puis} \quad P(4) = P(2)P(1) = 0.$$

Donc 4 est racine de $P$, mais n'est ni nul ni une racine de l'unité. Donc 0 n'est pas racine de $P$. Ainsi, on écrit $r = e^{i\theta}$, avec $\theta \in [-\pi, \pi[$. Or,

$$P((r+1)^2) = P(r+1)P(r+1-1) = P(r+1)P(r) = 0,$$

donc $(r+1)^2$ est une racine de $P$, et aussi une racine de l'unité en faisant le même raisonnement. En particulier, $|r+1| = 1$. D'où,

$$1 = |r+1|^2 = (1 + e^{i\theta})(1 + e^{-i\theta}) = 2 + 2\cos(\theta).$$

Ainsi, $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$. Ce qui donne $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$. On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Le raisonnement précédent montre que les racines de $P$ ne peuvent être que $j$ ou $j^2$. On écrit alors

$$P(X) = \lambda(X-j)^a(X-j^2)^b,$$

avec $\lambda \neq 0$ et $a, b \in \mathbb{N}$. On a d'une part,

$$\begin{aligned} P(X^2) &= \lambda(X^2-j)^a(X^2-j^2)^b \\ &= \lambda(X^2-j^4)^a(X^2-j^2)^b \\ &= \lambda(X-j^2)^a(X+j^2)^a(X-j)^b(X+j)^b, \end{aligned}$$

car $j^4 = j$, et d'autre part,

$$\begin{aligned} P(X)P(X-1) &= \lambda^2(X-j)^a(X-j^2)^b(X-1-j)^a(X-1-j^2)^b \\ &= \lambda^2(X-j)^a(X-j^2)^b(X+j^2)^a(X+j)^b, \end{aligned}$$

en exploitant que $1 + j + j^2 = 0$. Par identification des deux polynômes, on en déduit que $\lambda = 1$ et $a = b$. Ainsi,

$$P(X) = (X-j)^a(X-j^2)^a.$$

SYNTHÈSE : La réciproque se fait en reprenant le calcul ci-dessus. De plus,

$$(X-j)(X-j^2) = X^2 - (j+j^2)X + j^3 = X^2 + X + 1,$$

ce qui permet de simplifier l'ensemble des solutions en

$$S = \{0\} \cup \{(X^2+X+1)^a \mid a \in \mathbb{N}\}.$$ □

**Remarques**

En général, les équations sur les polynômes s'abordent de la même manière : on détermine les polynômes constants solutions, on examine la cohérence du degré sur l'équation, puis on restreint l'ensemble des racines. Par exemple, considérons un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$P(X^3) = P(X+1)P(X-1).$$

Alors, si $P$ est constant, $P$ est égal à 0 ou 1. S'il n'est pas constant, on a

$$3\deg(P) = \deg(P(X^3)) = \deg(P(X+1)P(X-1)) = 2\deg(P),$$

donc $\deg(P) = 0$. Ce qui conclut. Mais on peut rendre l'hypothèse plus complexe avec

$$P(X^3) = XP(X+1)P(X-1),$$

qui montrera que $P$ est nécessairement nul ou de degré 1, puis on résout un système. Pour déterminer les racines dans cet exercice, on aurait aussi pu aborder une approche géométrique. En effet, si $r \in \mathbb{C}$ vérifie

$$|r+1| = 1 = |r|,$$

cela signifie que $r$ est situé sur le cercle de centre $-1$ et de rayon 1, et aussi sur le cercle de centre 0 et de rayon 1. On identifie deux solutions qui sont bien $j$ et $j^2$.

**Exercice 5**

Supposons que $P$ admette une racine réelle $r$. Alors, on écrit

$$P(X) = (X-r)^m Q(X),$$

où $m$ est la multiplicité de $r$ dans $P$ et $Q$ est un polynôme réel tel que $Q(r) \neq 0$. Par continuité de $Q$ sur $\mathbb{R}$, on dispose de $\varepsilon > 0$ tel que $Q$ est de signe constant sur $[r-\varepsilon, r+\varepsilon]$. Alors,

$$P(r+\varepsilon) = \varepsilon^m Q(r+\varepsilon) \geq 0, \quad \text{et} \quad P(r-\varepsilon) = (-1)^m \varepsilon^m Q(r-\varepsilon) \geq 0.$$

Or $Q(r+\varepsilon)$ et $Q(r-\varepsilon)$ sont de même signe, donc $(-1)^m = 1$, et $m$ est pair. On note donc

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X-r_i)^2 \cdot \prod_{i=1}^{k} (X-z_i)(X-\overline{z_i}),$$

où $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$, $z_1, \ldots, z_k \notin \mathbb{R}$, et $n, k \in \mathbb{N}$. On définit

$$Q(X) = \prod_{i=1}^{n} (X-r_i)^2 \quad \text{et} \quad R(X) = \prod_{i=1}^{k} (X-z_i).$$

$R \in \mathbb{C}[X]$, et on peut l'écrire $R = A + iB$, où $A, B \in \mathbb{R}[X]$. Ainsi,

$$P = Q^2 R\overline{R} = Q^2(A+iB)(A-iB) = Q^2(A^2+B^2) = (QA)^2 + (QB)^2,$$

avec $QA, QB \in \mathbb{R}[X]$. D'où le résultat. □

**Remarques**

L'astuce de faire apparaître le conjugué du polynôme peut être utilisé pour montrer que toute matrice complexe $A$ est annulée par un polynôme à coefficients réels. Il suffit en effet de considérer $\chi_A \cdot \overline{\chi_A}$.

**Exercice 6**

• **1.** L'équation donne que

$$(P(-X))^2 + 1 = P(X^2+1) = (P(X))^2 + 1, \quad \text{donc} \quad (P(X)+P(-X))(P(X)-P(-X)) = 0.$$

Le produit de polynômes étant intègre, on a $P(X) = P(-X)$ ou $P(X) = -P(-X)$. Dans le premier cas, on montre par identification des coefficients que $P$ est pair, et dans le second cas que $P$ est impair.

• **2.** On suppose que $P$ est impair. On définit la suite $(x_n)$ par $x_0 = 0$, puis

$$x_{n+1} = x_n^2 + 1, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $P$ est impair, $P(0) = 0$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(x_{n+1}) = P(x_n^2 + 1) = (P(x_n))^2 + 1.$$

On en déduit par récurrence immédiate que $P(x_n) = x_n$. Or, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n + 1 = \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$$

En sommant on obtient que

$$x_n = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \geq \frac{3n}{4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

En particulier, $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est infini et tous ses éléments sont racines du polynôme $P(X) - X$, qui est alors le polynôme nul. D'où $P(X) = X$.

• **3.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n$ : pour tout $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant tel que $\deg(Q) \leq 2^n$ et $Q(X^2 + 1) = (Q(X))^2 + 1$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$Q(X) = \underbrace{(X^2 + 1) \circ \cdots \circ (X^2 + 1)}_{k \text{ fois}}.$$

INITIALISATION : Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant vérifiant l'équation, et avec $\deg(Q) \leq 1$. Alors $Q$ est de degré 1. Or $Q$ est pair ou impair, et si par l'absurde $Q$ était pair, alors il serait constant ou au moins de degré 2. Ainsi $Q$ est impair, et donc $Q(X) = X$. $H_0$ est vraie.

HÉRÉDITÉ : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $H_n$. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant vérifiant l'équation, et avec $\deg(Q) \leq 2^{n+1}$. Si $\deg(Q) \leq 2^n$, on peut appliquer $H_n$. Sinon, $Q$ est nécessairement pair, car $X$ est de degré inférieur à $2^n$. On peut donc écrire, avec le binôme de Newton,

$$Q(X) = \sum_{i=0}^{m} a_i X^{2i} = \sum_{i=0}^{m} a_i (X^2 + 1 - 1)^i = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} (X^2 + 1)^j = R(X^2 + 1),$$

où $m \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ et $R \in \mathbb{C}[X]$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(R(x^2 + 1))^2 + 1 = (Q(x))^2 + 1 = Q(x^2 + 1) = R((x^2 + 1)^2 + 1).$$

Pour tout $y \geq 1$, on peut écrire $y = z^2 + 1$, où $z \in \mathbb{R}$. D'où

$$(R(y))^2 + 1 = (R(z^2 + 1))^2 + 1 = R((z^2 + 1)^2 + 1) = R(y^2 + 1).$$

Ainsi, les polynômes $(R(X))^2 + 1$ et $R(X^2 + 1)$ coïncident sur une partie infinie de $\mathbb{R}$, donc sont égaux. Or,

$$2^{n+1} \geq \deg(Q) = \deg(R(X^2 + 1)) = 2 \deg(R).$$

On en déduit que $\deg(R) \leq 2^n$. Par hypothèse de récurrence, on dispose de $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$R(X) = \underbrace{(X^2 + 1) \circ \cdots \circ (X^2 + 1)}_{k \text{ fois}}.$$

Ainsi,

$$Q(X) = R(X^2 + 1) = \underbrace{(X^2 + 1) \circ \cdots \circ (X^2 + 1)}_{k+1 \text{ fois}}.$$

D'où $H_{n+1}$. Ce qui achève la récurrence et montre le résultat. □

**Remarques**

Dans cet exercice, on détermine le commutant de $X^2+1$, puisque

$$\mathcal{C}(X^2+1) = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(X^2+1) = (P(X))^2+1\}.$$

On montre alors qu'à part les polynômes constants, ce sont les itérés de $X^2+1$. Pour les polynôme constants, il suffit de résoudre

$$z = z^2+1, \quad \text{d'inconnue } z \in \mathbb{C},$$

qui admet deux solutions. Cet exercice n'est pas évident, car les questions 1 et 2 sont astucieuses, et la question 3 demande un peu d'intuition. S'il fallait retenir quelque chose de cet exercice, c'est de bien exploiter le fait que deux polynômes coïncidant sur une partie infinie sont égaux.

**Exercice 7**

• **1.** Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, le polynôme $P(X) - z$ admet une racine dans $\mathbb{C}$. On note $x \in \mathbb{C}$ l'une d'entre elles. Alors $z = P(x) \in P(\mathbb{C})$. D'où $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, l'autre inclusion étant évidente.

• **2.** **(a)** $(\Rightarrow)$ On suppose que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. On écrit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, où $n \in \mathbb{N}$ et où $a_0, \dots, a_n$ sont des complexes. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = P(x) = \overline{P(x)} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} x^k,$$

car $x$ est réel et $P(x)$ aussi. On en déduit que $a_k = \overline{a_k}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, i.e. $P \in \mathbb{R}[X]$.
$(\Leftarrow)$ Réciproquement si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
**(b)** $(\Rightarrow)$ On suppose que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Si $P$ est constant, alors $P \in \mathbb{Q}[X]$. Sinon, on note $n \in \mathbb{N}^*$ son degré. D'après le théorème d'interpolation de Lagrange (p. 436), on a

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{P(i)}_{\in \mathbb{Q}} \cdot \underbrace{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X-i}{j-i}}_{\in \mathbb{Q}[X]} \in \mathbb{Q}[X].$$

Ainsi, $P \in \mathbb{Q}[X]$.
$(\Leftarrow)$ Réciproquement si $P \in \mathbb{Q}[X]$, alors $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.
**(c)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$H_n(X) = \frac{1}{n!} X(X-1)\cdots(X-n+1),$$

et $H_0(X) = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Si $n = 0$, c'est évident. Sinon, soit $k \in \mathbb{Z}$. On a

$$H_n(k) = \frac{k(k-1)\cdots(k-(n-1))}{n!}.$$

∗ Si $k \geq n$, alors

$$H_n(k) = \frac{k!}{(k-n)!\,n!} = \binom{k}{n} \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

∗ Si $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$H_n(k) = 0 \in \mathbb{Z}.$$

∗ Si $k < 0$, alors

$$\begin{aligned} H_n(k) &= (-1)^n \frac{(n-k-1)(n-k-2)\cdots(n-k-n)}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{(n-k-1)!}{(n-k-1-n)!\,n!} \\ &= (-1)^n \binom{n-k-1}{n} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, $H_n(k) \in \mathbb{Z}$. Donc $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. De plus, la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à degré échelonné, donc forme une base de $\mathbb{C}[X]$.

($\Rightarrow$) On suppose que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Supposons $P$ non constant. On note $n \in \mathbb{N}^*$ son degré. $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant une base de $\mathbb{C}[X]$, on dispose de $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(X).$$

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $\mathcal{P}_n$ : « $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ ».

INITIALISATION : $a_0 = P(0) \in \mathbb{Z}$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

HÉRÉDITÉ : Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On suppose $\mathcal{P}_k$. Alors,

$$P(k+1) = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i(k+1) = a_{k+1} H_{k+1}(k+1) + \sum_{i=0}^{k} a_i H_i(k+1).$$

Or, $H_{k+1}(k+1) = \binom{k+1}{k+1} = 1$, avec (1). Donc

$$a_{k+1} = P(k+1) - \sum_{i=0}^{k} a_i H_i(k+1) \in \mathbb{Z},$$

comme somme et produits d'entiers, avec $\mathcal{P}_k$ et l'hypothèse sur $P$. D'où $\mathcal{P}_{k+1}$. Ce qui achève la récurrence. On en déduit que

$$P \in \{a_0 H_0 + \cdots + a_k H_k \mid k \in \mathbb{N},\ a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}\}.$$

Si $P$ est constant, il est constant à un entier, donc appartient à l'ensemble ci-dessus.

($\Leftarrow$) Réciproquement si $P$ appartient à l'ensemble ci-dessus, alors $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

• **3.** Notons $I$ la quantité à calculer. On écrit $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, avec $a_0, \ldots, a_d$ des complexes. D'une part,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{d} a_k e^{ik\theta} \cdot \sum_{l=0}^{d} \overline{a_l} e^{-il\theta} \cdot e^{-id\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{0\leq k,l\leq d} a_k \overline{a_l} \int_0^{2\pi} \exp(i(k-l-d)\theta)\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

Et, on a pour tous $k, l \in [\![0, d]\!]$, $k - l = d$ si et seulement si $k = d$ et $l = 0$. On en déduit que

$$I = a_d\overline{a_0}\int_0^{2\pi} e^{i(d-d)\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi a_d\overline{a_0}.$$

D'autre part, $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$, donc

$$I = \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 e^{-id\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} e^{-id\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

On en déduit que $a_d\overline{a_0} = 0$, et comme $P$ est de degré $d$, $a_d \neq 0$. D'où $a_0 = 0$, i.e. $P(0) = 0$.

• **4.** Analyse : Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. Déjà, $Q \neq 0$, car $0 \notin \mathbb{U}$. On note $m$ la multiplicité de 0 comme racine de $Q$ (qui peut être nulle). On dispose ainsi de $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$Q(X) = X^m R(X), \quad \text{où } R(0) \neq 0.$$

Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors,

$$|R(z)| = |z^m R(z)| = |Q(z)| = 1.$$

Ainsi, $R(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. Si $R$ n'était pas constant, la question précédente montrerait que $R(0) = 0$, ce qui est absurde. Ainsi $R$ est constant, et on a

$$Q(X) = aX^m, \quad \text{où } a \in \mathbb{C}.$$

Ensuite, $a = Q(1) \in \mathbb{U}$.

Synthèse : Réciproquement, soient $a \in \mathbb{U}$ et $m \in \mathbb{N}$. On pose $Q(X) = aX^m$. On a pour tout $z \in \mathbb{U}$,

$$|Q(z)| = |a| \cdot |z|^m = 1.$$

Donc $Q(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. On peut conclure que

$$S = \{aX^m \mid a \in \mathbb{U},\, m \in \mathbb{N}\}. \qquad \square$$

**Remarques**

On aurait pu utiliser la même approche fondée sur les polynômes de Lagrange pour les questions 2 (a) et 2 (b), et même la généraliser. En effet, si on prend $\mathbb{L}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, et $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\mathbb{L}) \subset \mathbb{L}$, alors on peut écrire

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{P(x_i)}_{\in \mathbb{L}} \cdot \underbrace{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{X - x_i}{x_j - x_i}}_{\in \mathbb{L}[X]} \in \mathbb{L}[X],$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{L}$. La question suivante est bien plus difficile, car on voudrait montrer que seuls les polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ conviennent. Cependant,

le polynôme

$$Q(X) = \frac{X(X+1)}{2}$$

est un exemple simple vérifiant $Q(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. L'indication aurait pu être intégrée directement dans l'exercice, mais sans elle, il y a une possibilité de prise d'autonomie. Si vous n'avez pas réussi, ce n'est pas grave : souvenez-vous de l'approche à adopter, et réessayez une autre fois.

Enfin, pour la dernière question, on aurait aussi pu raisonner par récurrence sur le degré du polynôme en exploitant l'annulation en 0 trouvée en question 3.

**Exercice 8**

• **1.** $(\Rightarrow)$ On suppose qu'il existe $h \in \mathscr{L}(F,G)$ telle que $g = h \circ f$. Soit $x \in \ker(f)$, alors

$$g(x) = h(f(x)) = h(0_F) = 0_G,$$

donc $x \in \ker(g)$. D'où $\ker(f) \subset \ker(g)$.

$(\Leftarrow)$ Supposons que $\ker(f) \subset \ker(g)$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\ker(f)$, qu'on complète en $(e_1, \dots, e_q)$ une base de $\ker(g)$, puis en $(e_1, \dots, e_m)$ une base de $E$. Alors $(f(e_{p+1}), \dots, f(e_m))$ est une famille libre de $F$, qu'on complète en $(v_1, \dots, v_k, f(e_{p+1}), \dots, f(e_m))$ une base de $F$. On définit $h \in \mathscr{L}(F,G)$ sur cette base de $F$ par

$$h(v_j) = 0_G, \quad \text{pour tout } j \in [\![1,k]\!],$$

puis

$$h(f(e_j)) = g(e_j), \quad \text{pour tout } j \in [\![p+1,m]\!].$$

Montrons que $g$ et $h \circ f$ coïncide sur $(e_1, \dots, e_m)$. Soit $j \in [\![1,m]\!]$.

∗ Si $i \in [\![1,p]\!]$, $e_i \in \ker(f) \subset \ker(g)$, et

$$h(f(e_i)) = h(0_F) = 0_G = g(e_i).$$

∗ Si $i \in [\![p+1,m]\!]$, alors $h(f(e_i)) = g(e_i)$ par définition.

Ainsi $g = h \circ f$, car ces applications linéaires coïncident sur une base de $E$.

• **2.** $(\Rightarrow)$ On suppose qu'il existe $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $g = h \circ f$. Alors $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(h)$.

$(\Leftarrow)$ Supposons que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(h)$. Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une base de $E$. Pour tout $j \in [\![1,m]\!]$, $g(e_j) \in \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(h)$, donc on dispose de $y_j \in F$ tel que $h(y_j) = g(e_j)$. Alors, on définit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ sur la base de $E$ ci-dessus par

$$f(e_j) = y_j, \quad \text{pour tout } j \in [\![1,m]\!].$$

Ainsi, pour tout $j \in [\![1,m]\!]$,

$$h(f(e_j)) = h(y_j) = g(e_j).$$

Ainsi $g = h \circ f$, car ces applications linéaires coïncident sur une base de $E$. □

**Remarques**

Ce type d'exercice demandant la construction d'une application linéaire ou d'une base nécessite de la méthode et une bonne compréhension du résultat à démontrer. En plus, le résultat de la première question pourrait être utilisé dans d'autres oraux. Par ailleurs, on aurait aussi pu généraliser ce résultat en ne supposant plus les espaces de dimension finie. Il suffit pour cela d'indexer les bases par des familles d'indices $I$, $J$ et $K$ ; puisque le théorème de la base incomplète reste vrai en dimension quelconque.

**Exercice 9**

• **1.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1})$. Ainsi, la suite $(\dim(\ker(u^k)))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers positifs, majorée par $\dim(E)$, donc converge. Or toute suite d'entiers convergeant est stationnaire. Ainsi, on dispose de $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geq p, \quad \dim(\ker(u^k)) = \dim(\ker(u^p)).$$

Or, pour $k \geq p$, $\ker(u^k) \subset \ker(u^p)$ et on a égalité des dimensions, donc $\ker(u^k) = \ker(u^p)$. Ainsi la suite $(\ker(u^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

• **2.** D'après la question précédente, on dispose de $p \in \mathbb{N}$ tel que pour $k \geq p$, $\ker(u^k) = \ker(u^p)$. Or, pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $\ker(u^k) \subset \ker(u^p)$. Donc,

$$N = \ker(u^p).$$

Pour tout $k \geq p$, d'après le théorème du rang appliqué à $u^k$,

$$\dim(E) = \dim(\ker(u^k)) + \mathrm{rg}(u^k) = \dim(\ker(u^p)) + \mathrm{rg}(u^k).$$

Le théorème du rang appliqué à $u^p$ montre alors que $\mathrm{rg}(u^k) = \mathrm{rg}(u^p)$. Or, $\mathrm{Im}(u^k) \subset \mathrm{Im}(u^p)$, donc $\mathrm{Im}(u^k) = \mathrm{Im}(u^p)$. De plus, pour tout $j \in [\![0, p]\!]$, $\mathrm{Im}(u^p) \subset \mathrm{Im}(u^j)$. Ainsi

$$J = \ker(u^p).$$

On en déduit que $N$ et $J$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$. Soit $x \in N$.

$$u^p(u(x)) = u(u^p(x)) = u(0_E) = 0_E,$$

donc $u(x) \in \ker(u^p) = N$. Ainsi $N$ est stable par $u$. Soit $y \in J$. On dispose de $x \in E$ tel que $u^p(x) = y$. Alors,

$$u(y) = u(u^p(x)) = u^p(u(x)) \in \mathrm{Im}(u^p) = J.$$

Ainsi $J$ est stable par $u$. D'après le théorème du rang appliqué à $u^p$,

$$\dim(E) = \dim(\ker(u^p)) + \mathrm{rg}(u^p) = \dim(N) + \dim(J).$$

Montrons que $N$ et $J$ sont en somme directe. Soit $y \in N \cap J$. $y \in J$, donc on dispose de $x \in E$ tel que $y = u^p(x)$. Or,

$$u^{2p}(x) = u^p(y) = 0_E,$$

car $y \in N$. Or $\ker(u^{2p}) = \ker(u^p)$ par définition de $p$, donc $y = u^p(x) = 0_E$. Ainsi $N$ et $J$ sont en somme directe. Avec l'égalité des dimensions, on en déduit que $N$ et $J$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$, stable par $u$ et supplémentaires. □

**Remarques**

Cet exercice est classique et à savoir traiter rapidement. En particulier, ce résultat montre que toute matrice non nulle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $B \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice 10**

• **1.** On suppose que $u$ est nilpotent d'indice $n$. En particulier, $u^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. On dispose ainsi de $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0_E$. Montrons que $\mathcal{B} = (x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de $E$. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0 x + \ldots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(x) = 0_E.$$

On suppose par l'absurde qu'il existe $i \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$. On pose

$$j = \min\{k \in [\![0, n-1]\!] \mid \lambda_k \neq 0\}.$$

Ainsi,

$$\lambda_j u^j(x) + \ldots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(x) = 0_E.$$

Or, $u^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$, donc on compose par $u^{n-1-j}$ à gauche, ce qui donne

$$\lambda_j u^{n-1}(x) = 0_E,$$

ce qui est absurde, car $u^{n-1}(x) \neq 0_E$. Ainsi $\mathcal{B}$ est libre et comporte $n = \dim(E)$ vecteurs, donc est une base. D'où le résultat.

• **2.** On suppose que $u$ admet $n$ valeurs propres distinctes. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de $E$, associée aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ toutes distinctes. On pose

$$x = e_1 + \ldots + e_n.$$

Par récurrence immédiate, il vient que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u^k(x) = \lambda_1^k e_1 + \ldots + \lambda_n^k e_n.$$

On pose $\mathcal{B} = (x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$, et on considère des réels $a_0, \ldots, a_{n-1}$ tels que

$$0_E = \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} a_i \lambda_j^i e_j = \sum_{j=1}^{n} \Big( \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_j^i \Big) e_j.$$

Par liberté de la famille $(e_1, \ldots, e_n)$, il vient que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_j^i = 0.$$

En posant

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

on remarque que $V(a_0 \dots a_{n-1})^T = (0 \dots 0)^T$. Or $V$ est une matrice de Vandermonde inversible, car les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont tous distincts. On en déduit que $a_0 = \dots = a_{n-1} = 0$. Ainsi $\mathcal{B}$ est libre et comporte $n = \dim(E)$ vecteurs, donc est une base. D'où le résultat.

• **3.** Comme $u$ est cyclique, on dispose de $x \in E$ tel que $(x, \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de $E$. Soit $v \in \mathcal{C}(u)$. $v(x) \in E$, donc on dispose de $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$v(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x).$$

Or, pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$,

$$v(u^j(x)) = u^j(v(x)) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^j(u^k(x)) = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k\Big)(u^j(x)).$$

Ainsi, $v$ et $\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$ coïncident sur une base de $E$, donc sont égaux. D'où $v \in \mathbb{R}_{n-1}[u]$. La réciproque étant évidente, on en déduit que

$$\mathcal{C}(u) = \mathbb{R}_{n-1}[u]. \qquad \square$$

**Remarques**

On peut aller légèrement plus loin dans la dernière question, en donnant la dimension de $\mathcal{C}(u)$. En effet, $(\mathrm{id}, u, \dots, u^{n-1})$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_{n-1}[u]$, qui est aussi libre. Pour le montrer, on prend $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ des réels tels que

$$\lambda_0 \mathrm{id} + \lambda_1 u + \dots + \lambda_{n-1} u^{n-1} = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Alors en évaluant en $x$ et en utilisant que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de $E$, on en déduit que les coefficients sont tous nuls. Enfin, on peut établir une bijection entre $\mathcal{C}(u)$ et $E$ avec l'application linéaire $v \in \mathcal{C}(u) \mapsto v(x) \in E$.

**Exercice 11**

Supposons par l'absurde qu'il existe un hyperplan $H \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne contenant aucune matrice inversible. $I_n \notin H$, donc $H \oplus \mathrm{Vect}(I_n) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $N$ une matrice nilpotente. On écrit

$$N = h + \lambda I_n, \quad \text{avec } h \in H.$$

Soit $X \in \ker(h)$ non nul, car $h$ est non inversible. On a $NX = hX + \lambda X = \lambda X$. En itérant,

$$0 = N^n X = \lambda^n X,$$

donc $\lambda = 0$. Donc $N = h \in H$. Ainsi, $H$ contient toutes les matrices nilpotentes. Or,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Et cette matrice devrait appartenir à $H$, car elle est somme de matrices nilpotentes, qui sont des éléments de $H$. Absurde. D'où le résultat. □

**Exercice 12**

• **1.** $\det(R + XJ)$ est un polynôme réel non nul, car ne s'annulant pas en $i$, donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\det(R + tJ) \neq 0$. Ainsi, $R + tJ \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

• **2.** On a

$$AR + iAJ = AP = PB = RB + iJB.$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire, on en déduit que $AR = RB$ et $AJ = JB$. Ainsi, $A(R + tJ) = B(R + tJ)$, puis

$$A = (R + tJ)B(R + tJ)^{-1},$$

d'où le résultat. □

**Remarques**

Ce résultat peut servir à résoudre élégamment certains problèmes. Par exemple, considérons $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta \in ]0, 2\pi[$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$A^2 - 2\cos(\theta)A + I_n = 0_n.$$

Alors $(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$ est un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ annulant $A$, car $e^{i\theta} \neq e^{-i\theta}$. Comme $A$ est une matrice à coefficients réels, on en déduit que $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ ont même multiplicité comme valeur propre de $A$. Ainsi, on peut diagonaliser $A$ comme

$$A = P \cdot \mathrm{diag}(\Theta, \ldots, \Theta) \cdot P^{-1}, \quad \text{où } \Theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \text{ et } P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

Ce qui montre par ailleurs que $n$ est nécessairement pair. Posons alors

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \text{puis} \quad R_n(\theta) = \mathrm{diag}(R(\theta), \ldots, R(\theta)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Comme $R(\theta)$ est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ à $\Theta$, on en déduit que $R_n(\theta)$ est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à

$$\mathrm{diag}(\Theta, \ldots, \Theta),$$

et donc à $A$ par transitivité de la similitude. Maintenant, $A$ et $R_n(\theta)$ sont deux matrices à coefficients réels, semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La réciproque étant évidente, cela résout l'équation matricielle proposée. On a ainsi étendu notre problème aux nombres complexes, afin de montrer que $A$ agissait comme une rotation d'angle $\theta$ sur divers plans de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

**Exercice 13**

La trace d'un projecteur est un entier naturel, comme vu en remarque de l'exercice 2. Ainsi,

$$\operatorname{tr}(p) + \sqrt{2}\operatorname{tr}(q) + \sqrt{3}\operatorname{tr}(r) = k \in \mathbb{N}.$$

D'où,

$$3\operatorname{tr}(r)^2 = (\sqrt{3}\operatorname{tr}(r))^2 = (k - \operatorname{tr}(p) - \sqrt{2}\operatorname{tr}(q))^2 = (k - \operatorname{tr}(p))^2 - 2\sqrt{2}\operatorname{tr}(q) + 2\operatorname{tr}(q)^2.$$

Or $\sqrt{2}$ est irrationnel, donc nécessairement $\operatorname{tr}(q) = 0$. Sinon, on pourrait écrire $\sqrt{2}$ comme quotient de deux nombres entiers. Or $\operatorname{rg}(q) = \operatorname{tr}(q) = 0$, d'où $q$ est nul. Il reste donc

$$\operatorname{tr}(p) + \sqrt{3}\operatorname{tr}(r) = k.$$

Or $\sqrt{3}$ est irrationnel, donc nécessairement $\operatorname{tr}(r) = 0$, puis $r$ est nul. □

**Exercice 14**

Soit $x \in E$ non nul. $(x, f(x))$ est liée et $x$ est non nul, donc on dispose de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$. Soit $y \in E$.

- On suppose que $(x, y)$ est liée. On dispose de $a \in \mathbb{K}$ tel que $y = ax$. Ainsi,

$$f(y) = af(x) = a\lambda x = \lambda y.$$

- On suppose que $(x, y)$ est libre. En particulier, $y \neq 0$ et $x + y \neq 0$, donc on dispose de $a, b \in \mathbb{K}$ tels que

$$f(y) = ay \quad \text{et} \quad f(x + y) = b \cdot (x + y).$$

D'une part,

$$f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda x + ay.$$

D'autre part, $f(x + y) = bx + by$. D'où

$$\lambda x + ay = bx + by.$$

Par liberté de la famille, $b = \lambda$ et $a = b$. Donc $a = \lambda$, et $f(y) = \lambda y$.

Dans tous les cas, $f(y) = \lambda y$. Donc $f$ est une homothétie. □

**Remarques**

Cet exercice est un grand classique à maîtriser.

**Exercice 15**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n$ : « Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}(A) = 0$ est semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont tous nuls ».

Initialisation : La seule matrice de trace nulle de $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ est $(0)$, qui est donc bien semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont tous nuls. Donc $H_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $H_n$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}(A) = 0$. Si $A$ est une homothétie, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A = \lambda I_{n+1}$, puis $A = 0_n$, car $\operatorname{tr}(A) = 0$. Ce qui prouve le

résultat dans ce cas. Sinon, on dispose de $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$ tel que $(X, AX)$ est libre, d'après l'exercice précédent. On complète cette famille en une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$. Dans cette base, l'action de $A$ s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & B \end{pmatrix},$$

où $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Comme $A$ et $M$ sont semblables et que $\mathrm{tr}(A) = 0$, on sait que $\mathrm{tr}(M) = 0$. Ainsi, $\mathrm{tr}(B) = 0$. Par hypothèse de récurrence, $B$ est semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont tous nuls, qu'on note $B'$. On dispose de $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $B = PB'P^{-1}$. Alors,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & LP \\ P^{-1}C & B' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}.$$

Or la matrice du milieu dans le membre de droite possède tous ses coefficients diagonaux nuls, et $M$ lui est semblable. Or $A$ et $M$ sont semblables, donc $A$ est semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont tous nuls. Ce qui montre $H_n$ et achève la récurrence. □

**Remarques**

Comment penser à introduire la famille $(X, AX)$ ? On essaye de se ramener à une matrice de taille plus petite, l'idéal serait donc d'avoir un zéro en haut à gauche. Pour cela, on veut construire une base commençant par $(X, AX)$. Seulement, cette famille n'est pas toujours libre. En effet, $A$ pourrait être une homothétie d'après l'exercice précédent. Une fois cette difficulté écartée, la suite se fait naturellement.

**Exercice 16**

• **1.** Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. On a

$$[A \operatorname{com}(A)^T]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}[\operatorname{com}(A)]_{j,k}.$$

On note $B$ la matrice formée de $A$ en remplaçant la $j$-ième ligne par la $i$-ème ligne. Dans ce cas, le membre de droite est le développement du déterminant de $B$ selon sa $j$-ème ligne. Cependant, si $i \neq j$, $B$ n'est pas inversible, car possède deux lignes égales. Ainsi,

$$[A \operatorname{com}(A)^T]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}[\operatorname{com}(A)]_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} b_{j,k}[\operatorname{com}(B)]_{j,k} = \det(B) = 0,$$

avec le rappel sur la comatrice du début de chapitre. Si $i = j$,

$$[A \operatorname{com}(A)^T]_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}[\operatorname{com}(A)]_{i,k} = \det(A),$$

par développement du déterminant sur la $i$-ème ligne. On en déduit que

$$A \operatorname{com}(A)^T = \det(A) I_n,$$

et on fait de même pour la seconde égalité.

• **2.** Si $\mathrm{rg}(A) = n$, $\det(A) \neq 0$, et dans ce cas $\mathrm{com}(A)$ est inversible. D'où

$$\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = n.$$

Si $\mathrm{rg}(A) = n-1$, par théorème du rang $\dim(\ker(A)) = 1$. Or, $A\,\mathrm{com}(A)^T = 0_n$, donc

$$\mathrm{Im}(\mathrm{com}(A)^T) \subset \ker(A), \quad \text{puis} \quad \mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = \mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)^T) \leq 1.$$

Ensuite, on note $(C_1, \dots, C_n)$ les colonnes de $A$. Comme $A$ est de rang $n-1$, on peut supposer sans perte de généralité que $(C_1, \dots, C_{n-1})$ est libre. On peut ainsi compléter cette famille en une base $(C_1, \dots, C_{n-1}, C'_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On note $B$ la matrice formée de ces colonnes, qui est alors inversible. Par développement du déterminant sur la dernière colonne de $B$,

$$\det(B) = \sum_{k=1}^{n} b_{k,n}[\mathrm{com}(B)]_{k,n} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,n}[\mathrm{com}(A)]_{k,n},$$

car pour $k \in [\![1, n]\!]$, la matrice de taille $n-1$ extraite de $A$ en enlevant la dernière colonne et la $k$-ième ligne, et celle extraite de $B$ en enlevant la dernière colonne et la $k$-ième ligne sont les mêmes, car $A$ et $B$ diffèrent uniquement de la dernière colonne. Ainsi, $\mathrm{com}(A)$ possède au moins un coefficient non nul, sinon on aurait $\det(B) = 0$. Donc $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) \geq 1$. D'où

$$\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = 1.$$

Si $\mathrm{rg}(A) \leq n-2$, alors toute famille de $n-1$ colonnes de $A$ est liée, et tous les déterminants extraits de $A$ en enlevant une ligne et une colonne sont donc nuls. D'où $\mathrm{com}(A) = 0_n$, et

$$\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = 0.$$

• **3.** On pose $P_A(X) = (-1)^n \frac{\chi_A(0) - \chi_A(X)}{X} \in \mathbb{C}[X]$. On obtient alors que

$$AP_A(A) = (-1)^n(\chi_A(0)I_n - \chi_A(A)) = (-1)^n(-1)^n \det(A)I_n = \det(A)I_n,$$

d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Si $A$ est inversible, comme $A\,\mathrm{com}(A)^T = \det(A)I_n$, on en déduit que $P_A(A) = \mathrm{com}(A)^T$. Sinon,

$$M \mapsto P_M(M) \quad \text{et} \quad M \mapsto \mathrm{com}(M)^T$$

sont des applications polynômiales en les coefficients des matrices, donc continues. Or ces deux applications coïncident sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, qui est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On en déduit alors que

$$P_A(A) = \mathrm{com}(A)^T. \qquad \square$$

**Remarques**

Le programme de mathématiques des classes préparatoires ne se concentrant pas sur la partie déterminant, cet exercice peut être particulièrement ardu. On conseille de le reprendre à tête reposé si vous ne l'avez pas réussi. En effet, comme la comatrice ne fait pas partie du programme de PCSI, un exercice sur celle-ci pourrait tomber aux oraux de PC ou de PSI. Il est donc utile de maîtriser les subtilités associées.

Pour la troisième question, le fait que les matrices inversibles soient denses dans les matrices est un grand classique. Il suffit en effet de considérer la suite

$$A_p = A + \frac{1}{p} I_n, \qquad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}^*.$$

$A$ possédant un nombre fini de valeurs propres, les $(A_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ sont inversibles à partir d'un certain rang, et la suite converge bien vers $A$. Notons enfin que dans le cas où $A$ est inversible,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{com}(A)^T.$$

Or l'application déterminant est polynômiale en les coefficients des matrices, et de même pour l'application comatrice. Ainsi l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$$

est continue.

**Exercice 17**

Supposons $A$ inversible. Alors

$$\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

En passant au déterminant et en reconnaissant des matrices triangulaires par blocs, on obtient

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B) = \det(DA - CA^{-1}BA) = \det(DA - CB),$$

avec $AB = BA$. Ainsi la relation est vraie quand $A$ est inversible. Dans le cas quelconque, on approche $A$ par la suite de matrices définie par $A_k = A + \frac{1}{k} I_n$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. C'est une suite de matrices inversibles à partir d'un certain rang, commutant avec $B$ et convergeant vers $A$. On en déduit le résultat par continuité du déterminant. □

**Remarques**

On utilise ici à nouveau la densité des matrices inversibles, qui montre comment on peut se restreindre à ces matrices afin d'avoir un résultat concernant des matrices quelconques. Il faut cependant bien faire attention que la suite de matrices par laquelle on approche $A$ commute bien avec $B$. Pour le cas inversible, de nombreuses décompositions sont possibles, comme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^{-1} & -B \\ 0_n & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ CA^{-1} & DA - CB \end{pmatrix}.$$

**Exercice 18**

Comme $A$ et $B$ commutent, $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$. D'où,

$$\det(A^2 + B^2) = \det(A + iB)\det(A - iB) = \det(A + iB)\overline{\det(A + iB)} = |\det(A + iB)|^2 \geq 0,$$

car $A$ et $B$ sont à coefficients réels. □

**Remarques**

Cet exercice repose uniquement sur le fait que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\overline{\det(M)} = \det(\overline{M})$. En effet, la formule du déterminant donne

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \cdot m_{\sigma(1),1} \cdots m_{\sigma(n),n},$$

d'où

$$\overline{\det(M)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \cdot \overline{m_{\sigma(1),1}} \cdots \overline{m_{\sigma(n),n}} = \det(\overline{M}),$$

car pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$, donc est réel. Si vous n'avez jamais vu la formule du déterminant et que ce $\varepsilon(\sigma)$, qui donne la signature de la permutation $\sigma$, ne vous dit rien, apprenez simplement le résultat. En effet, la connaissance de la définition d'une signature ne vous apportera rien, hormis un peu de culture, c'est d'ailleurs pour cela qu'elle n'a ni été reprise dans la partie 2 ni dans les définitions de ce début de chapitre. Vous pouvez évidemment vous renseigner plus amplement dans d'autres ouvrages, ou demander à votre professeur.

**Exercice 19**

• **1.** Soient $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On trigonalise $A$ selon $A = PTP^{-1}$, avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qu'on écrit

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{où } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$T_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{k} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n + \frac{1}{k+n} \end{pmatrix}.$$

Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$. Si $\lambda_i = \lambda_j$, alors

$$\lambda_i + \frac{1}{k+i} \neq \lambda_j + \frac{1}{k+j}, \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

Sinon, on peut supposer que $\lambda_i < \lambda_j$ sans perte de généralité, et on dispose de $N_{i,j} \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall k \geq N_{i,j}, \quad 0 \leq \frac{1}{k} < \frac{\lambda_j - \lambda_i}{2}.$$

Ainsi, pour tout $k \geq N_{i,j}$,

$$\lambda_i + \frac{1}{k+i} < \frac{\lambda_i + \lambda_j}{2} < \lambda_j + \frac{1}{k+j}.$$

Ainsi, à partir du rang $N = \max\{N_{i,j} \mid i, j \in [\![1, n]\!]\}$, les $(T_k)_{k \geq N}$ possèdent tous $n$ valeurs propres distinctes, donc sont diagonalisables. Or $(T_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $T$. Donc $(PT_kP^{-1})_{k \geq N}$ est une suite de matrice diagonalisables, convergeant vers $A$ par continuité du produit matriciel. D'où le résultat.

• **2.** On définit

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ & M & \longmapsto & \chi_M(M). \end{array}$$

$\varphi$ est continue comme application polynômiale en les coefficients des matrices. Soit $M$ une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qu'on écrit

$$M = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) P^{-1},$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Alors

$$\chi_M(X) = \det(XI_n - M) = \det(XI_n - \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i).$$

D'où,

$$\chi_M(M) = \prod_{i=1}^{n} (M - \lambda_i I_n) = P \cdot \prod_{i=1}^{n} (\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) - \lambda_i I_n) \cdot P^{-1} = 0_n,$$

car les matrices au centre du produit sont diagonales, donc commutent. Ainsi $\varphi$ est nulle sur les matrices diagonalisables, qui sont denses dans l'ensemble des matrices. Donc $\varphi$ est nulle par continuité. En particulier $\chi_A(A) = 0_n$. D'où le théorème de Cayley-Hamilton. □

**Remarques**

En oral, l'examinateur vous aurait sûrement fait passer le détail du fait que les matrices exhibées possèdent bien $n$ valeurs propres distinctes à partir d'un certain rang, mais sachez le démontrer au cas où c'est demandé. Enfin, attention à la manipulation du produit dans la seconde question : on n'a pas sorti $P$ et $P^{-1}$ du produit parce qu'elles commutent avec les autres matrices, mais parce que ces matrices se compensent deux à deux dans le produit.

Pour se convaincre que le produit fait bien $0_n$, il suffit de remarquer que quand on multiplie deux matrices diagonales, on le fait coefficient par coefficient. Or, ici il y a $n$ matrices diagonales, et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on peut toujours en trouver une qui a un coefficient nul en position $(i, i)$.

**Exercice 20**

$(\Rightarrow)$ On suppose que $\chi_A = \chi_B$. Alors $A$ et $B$ ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. Or pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i^k$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de $A$, et $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités respectives. Or ces valeurs sont les mêmes pour $B$. D'où $\mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(B^k)$.
$(\Leftarrow)$ On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(B^k)$. Par linéarité de la trace,

$$\mathrm{tr}(P(A)) = \mathrm{tr}(P(B)), \quad \text{pour tout } P \in \mathbb{C}[X].$$

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Par théorème d'interpolation de Lagrange (p. 436), on dispose d'un polynôme $Q$ tel que $Q(\lambda) = 1$ et $Q(\mu) = 0$ pour tout $\mu \in (\mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(B)) - \{\lambda\}$. Alors,

$$m_{\lambda,A} = \mathrm{tr}(Q(A)) = \mathrm{tr}(Q(B)) = m_{\lambda,B},$$

donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ et $\lambda$ a la même multiplicité dans $\chi_A$ et dans $\chi_B$. Ceci étant vrai pour toute valeur propre de $A$, on en déduit que $\chi_A = \chi_B$, car $\chi_A$ et $\chi_B$ ont même degré. □

**Remarques**

La preuve sur l'inversibilité des matrices de Vandermonde utilisant parfois l'interpolation de Lagrange, on aurait aussi pu approcher le sens réciproque par une telle méthode. Cependant, l'utilisation de l'interpolation de Lagrange est plus élégante et efficace.

Par ailleurs, cet exercice donne une caractérisation intéressante des matrices nilpotentes. En effet, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, i.e. $\chi_A(X) = X^n = \chi_{0_n}(X)$. On en déduit que $A$ est nilpotente si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{tr}(A^k) = 0.$$

**Exercice 21**

• **1.** On suppose que $A$ est diagonalisable. On écrit

$$A = Q\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)Q^{-1},$$

où $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on dispose de $x_i \in \mathbb{C}$ tel que $P(x_i) = \lambda_i$, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss appliqué à $P(X) - \lambda_i$. On pose

$$M = Q\,\mathrm{diag}(x_1, \dots, x_n)Q^{-1},$$

de sorte que

$$P(M) = Q\,\mathrm{diag}(P(x_1), \dots, P(x_n))Q^{-1} = A.$$

Ce qui montre l'existence d'une solution.

• **2.** Si $n = 1$, on se ramène au théorème de d'Alembert-Gauss, et on a toujours une solution. Si $n \geq 2$, on suppose que $A$ est nilpotente non nulle et que $P(X) = X^n$. Si par l'absurde on avait $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que

$$M^n = A,$$

alors $M$ serait nilpotente. Mais d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $M^n = 0_n$. Absurde, car $A$ est non nulle.

• **3.** Supposons avoir $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une solution de l'équation. On va distinguer plusieurs cas selon les valeurs propres de $A$.

∗ Si les valeurs propres de $A$ sont distinctes :
Dans ce cas, $A$ est diagonalisable, et on l'écrit

$$A = Q\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}Q^{-1},$$

où $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ distinctes. On pose $B = Q^{-1}MQ$. Ainsi,

$$B^2 = Q^{-1}M^2Q = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $B^2 = \mathrm{tr}(B)B - \det(B)I_2$. Si par l'absurde $\mathrm{tr}(B)$ était nulle, alors

$$-\det(B)I_2 = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix},$$

donc $\lambda = -\det(B) = \mu$, absurde. Ainsi $\mathrm{tr}(B) \neq 0$, et on en déduit que $B$ est diagonale. On écrit $B = \mathrm{diag}(a, b)$, où $a, b \in \mathbb{C}$. Alors

$$a^2 = \lambda \quad \text{et} \quad b^2 = \mu.$$

Tout complexe admettant une racine carrée complexe, on note $r_1$ une racine carrée de $\lambda$ et $r_2$ une racine carrée de $\mu$. En revenant à $M$, on obtient que

$$S = \left\{ Q\begin{pmatrix}\varepsilon_1 r_1 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 r_2\end{pmatrix}Q^{-1} \;\middle|\; \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}\right\},$$

puisque réciproquement, ces matrices vérifient bien l'équation. On remarque par ailleurs que l'ensemble des solutions comporte trois ou quatre matrices, selon que 0 est valeur propre de $A$ ou non.

∗ Si $A$ est diagonalisable et possède une seule valeur propre :
Il vient alors que $A$ est un multiple de $I_2$, et on dispose de $a \in \mathbb{C}$ tel que $A = aI_2$. Alors,

$$\mathrm{tr}(M)M - \det(M)I_2 = M^2 = aI_2,$$

d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Si $\mathrm{tr}(M) \neq 0$, on en déduit que $M$ est diagonale. Puis en notant $r \in \mathbb{C}$ une racine carrée de $a$, on a

$$M \in \left\{ \begin{pmatrix}\varepsilon_1 r & 0\\ 0 & \varepsilon_2 r\end{pmatrix} \;\middle|\; \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}\right\}.$$

Si $\mathrm{tr}(M) = 0$, on dispose de $x, y, z \in \mathbb{C}$ tels que

$$M = \begin{pmatrix}x & y\\ z & -x\end{pmatrix}, \quad \text{puis on calcule} \quad M^2 = (x^2 + yz)I_2.$$

On identifie donc $x^2 + yz = a$. Ainsi,

$$M \in \left\{ \begin{pmatrix}x & y\\ z & -x\end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{C},\ x^2 + yz = a\right\}.$$

Ce qui nous donne l'ensemble total des solutions

$$S = \left\{ \begin{pmatrix}x & y\\ z & -x\end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{C},\ x^2 + yz = a\right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix}\varepsilon_1 r & 0\\ 0 & \varepsilon_2 r\end{pmatrix} \;\middle|\; \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}\right\},$$

puisque réciproquement ces solutions conviennent bien, et où $r$ est une racine carrée de $a$.

* Si $A$ n'est pas diagonalisable et possède une seule valeur propre :
  On trigonalise $A$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, et on l'écrit

$$A = Q \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} Q^{-1},$$

  où $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $a \in \mathbb{C}$. On peut en effet mettre un 1 en haut à droite, quitte à dilater le second vecteur de la nouvelle base. On pose $B = Q^{-1}MQ$. Ainsi,

$$B^2 = Q^{-1}M^2Q = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

  D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $B^2 = \mathrm{tr}(B)B - \det(B)I_2$. Si par l'absurde $\mathrm{tr}(B)$ est nulle, alors

$$-\det(B)I_2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

  Ainsi $\mathrm{tr}(B) \neq 0$, et $B$ est triangulaire supérieure. On dispose de $x, y, z \in \mathbb{C}$ tels que

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}, \quad \text{puis on calcule} \quad M^2 = \begin{pmatrix} x^2 & y(x+z) \\ 0 & z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

  Par identification, $x^2 = a = z^2$. Or, on doit avoir $x + z \neq 0$, et $x^2 - z^2 = 0$, donc $x = z$. On remarque par ailleurs que si par l'absurde $a = 0$, alors $x = 0$, et $1 = y(x+z) = 0$. Donc $a \neq 0$, autrement dit $A$ n'est pas nilpotente non nulle. La suite de la résolution donne que

$$S = \left\{ \pm Q \begin{pmatrix} r & \frac{1}{2r} \\ 0 & r \end{pmatrix} Q^{-1} \right\},$$

  où $r$ est une racine carré de $a$. On vérifie que ces deux matrices conviennent bien.

On peut donc conclure que l'équation admet des solutions si et seulement si $A$ n'est pas nilpotente non nulle. Le nombre de solutions est

* 3 ou 4, si $A$ possède deux valeurs propres distinctes.
* infini, si $A$ est un multiple de l'identité.
* 2 sinon. □

**Remarques**

Il peut être assez surprenant de voir une infinité de solutions quand $A$ est un multiple de l'identité, puisqu'on pourrait s'attendre à avoir uniquement les solutions du second ensemble de l'union. Intuitivement, l'infinité de solutions provient de toutes les symétries du plan dans le cas où $A$ est non nulle. Dans le cas où $A$ est nulle, l'ensemble correspond simplement aux matrices nilpotentes.

Dans la résolution, attention à bien distinguer le cas où la trace est nulle, puisque dans le cas où $A$ est multiple de l'identité, on a bien de telles solutions. Cette résolution est détaillée et méthodique, et montre l'intérêt, en tout cas en taille 2, des outils de réduction à notre disposition. Pour la partie où $A$ possédait deux valeurs propres distinctes, on

aurait pu faire appel à l'exercice 10, et au fait que $A$ et $M$ commutent :

$$AM = M^3 = MA,$$

afin de conclure que $M$ était une fonction linéaire de $A$. Mais les conditions sur les coefficients auraient donné lieu à de nombreuses disjonctions de cas.

**Exercice 22**

Supposons avoir $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une solution. Dans ce cas, avec le théorème de Cayley-Hamilton, on obtient

$$A = M^2 + M = (1 + \operatorname{tr}(M))M - \det(M)I_2,$$

puis

$$(1 + \operatorname{tr}(M))M = \begin{pmatrix} 1 + \det(M) & 1 \\ 1 & 1 + \det(M) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

On applique la trace et le déterminant. Ce qui nous donne

$$\begin{cases} (1 + \operatorname{tr}(M)) \operatorname{tr}(M) & = 2(1 + \det(M)), \\ (1 + \operatorname{tr}(M))^2 \det(M) & = (2 + \det(M)) \det(M). \end{cases} \tag{3}$$

∗ Si $\det(M) = 0$ :
Alors $\operatorname{tr}(M)^2 + \operatorname{tr}(M) - 2 = 0$, donc $\operatorname{tr}(M) \in \{-2, 1\}$. Avec (2), on en déduit que

$$M = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

∗ Si $\det(M) \neq 0$ :
La deuxième équation de (3) donne

$$\det(M) = (1 + \operatorname{tr}(M))^2 - 2. \tag{4}$$

On réinjecte dans la première équation de (3),

$$(1 + \operatorname{tr}(M)) \operatorname{tr}(M) = 2((1 + \operatorname{tr}(M))^2 - 1) = 2 \operatorname{tr}(M)(2 + \operatorname{tr}(M)).$$

- Si $\operatorname{tr}(M) = 0$. Avec (4), on a $\det(M) = -1$. Ainsi (2) donne

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Sinon, $1 + \operatorname{tr}(M) = 4 + 2 \operatorname{tr}(M)$, donc $\operatorname{tr}(M) = -3$. On a ainsi $\det(M) = 2$. Avec (2), on a

$$M = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Les calculs réciproques étant évidents, on a

$$S = \left\{-A,\ \frac{1}{2}A,\ A - I_2,\ -\frac{1}{2}A - I_2\right\}. \qquad \square$$

**Remarques**

Cet exercice permet de montrer une autre méthode pour résoudre des équations matricielles, sans passer par les coefficients.

**Exercice 23**

• **1. (a)** Soient $\lambda$ une valeur propre de $u$ et $x$ un vecteur propre associé. Alors

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x).$$

Ainsi $v(x)$ est vecteur propre de $u$ pour $\lambda$. D'où le résultat.

**(b)** Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de $E$ formée de vecteurs propres de $u$, et $(\lambda_i)_{i\in I}$ les valeurs propres associées. Pour tout $i \in I$,

$$u(v(e_i)) = \lambda_i v(e_i) = v(\lambda_i e_i) = v(u(e_i)).$$

Ainsi $u \circ v$ et $v \circ u$ coïncident sur une base de $E$, donc sont égales.

• **2.** Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille codiagonalisable d'endomorphismes de $E$. On dispose de $(e_j)_{j\in J}$ une base de $E$ composée de vecteurs propres communs à tous les $(u_i)_{i\in I}$, dont on note $((\lambda_{i,j})_{j\in J})_{i\in I}$ les familles de valeurs propres associées. Soient $k, l \in I$ et $m \in J$. On a

$$u_k(u_l(e_m)) = u_k(\lambda_{l,m} e_m) = \lambda_{k,m}\lambda_{l,m} e_m = \lambda_{k,m} u_l(e_m).$$

Ainsi, $u_l(e_m)$ est un vecteur propre de $u_k$ pour la valeur propre $\lambda_{k,m}$. On en déduit que $u_l$ stabilise les espaces propres de $u_k$. Or $u_k$ est diagonalisable. Donc $u_l$ et $u_k$ commutent. D'où le résultat.

• **3. (a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n$ : « toute famille de $n$ endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, qui sont diagonalisables et commutent deux à deux, est codiagonalisable ».

Initialisation : $H_1$ est évidemment vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $H_n$. Soient $V$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $v_0, \dots, v_n$ une famille de $n+1$ endomorphismes de $V$ diagonalisables et commutant deux à deux. En particulier, $v_0$ est diagonalisable et on note $(V_\lambda)_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u_0)}$ ses espaces propres. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(v_0)$. D'après la question 1 (a),

$$v_i \text{ stabilise } E_\lambda, \quad \text{pour tout } i \in [\![1, n]\!].$$

Or $v_i$ est diagonalisable, donc la restriction de $v_i$ à $E_\lambda$ est diagonalisable. Ainsi la famille des restrictions $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille de $n$ endomorphismes de $V_\lambda$ diagonalisables et commutant deux à deux. D'après $H_n$, on dispose de $\mathcal{B}_\lambda$ une base de vecteurs propres des restrictions des $(v_1, \dots, v_n)$ à $V_\lambda$. Or, $v_0$ est diagonalisable, donc

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda\in \mathrm{Sp}(v_0)} \mathcal{B}_\lambda$$

est une base de $E$ formée de vecteurs propres communs à $v_0$, et aux $v_1, \dots, v_n$. Donc $(v_0, \dots, v_n)$ est codiagonalisable. Ainsi $H_{n+1}$ est vraie. Ce qui achève la récurrence et montre le résultat.

**(b)** Comme $E$ est de dimension finie, le rang de la famille $(u_i)_{i\in I}$ est finie. On peut ainsi extraire une famille $(u_1,\dots,u_n)$ d'endomorphismes telle que tous les autres en soient une combinaison linéaire. Cette sous-famille est finie et comporte des endomorphismes diagonalisables et commutant deux à deux. Ainsi, cette sous-famille est codiagonalisable d'après la question précédente. On note $\mathcal{B}$ une base de $E$ formée de vecteurs propres communs aux $u_1,\dots,u_n$. Or, pour tout $i\in I$,

$$u_i \in \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n),$$

donc $\mathcal{B}$ est une famille de vecteurs propres de $u_i$. Ainsi, $(u_i)_{i\in I}$ est codiagonalisable. □

**Remarques**

Cet exercice est un peu technique, et ne vous serait sûrement pas demandé en dimension quelconque. Cependant, il permet de mieux comprendre ce que l'on manipule, et surtout : le résultat démontré peut être très intéressant à réutiliser.

**Exercice 24**

• **1.** Soient $\alpha\in\mathrm{Sp}(A)$ et $\beta\in\mathrm{Sp}(B)$. On dispose de $X$ un vecteur propre de $A$ pour $\alpha$, et $Y$ un vecteur propre de $B^T$ pour $\beta$. En effet, $B$ et $B^T$ ont les mêmes valeurs propres. Alors,

$$u(XY^T) = AXY^T - XY^TB = (AX)Y^T - X(B^TY)^T = \alpha XY^T - \beta XY^T = (\alpha-\beta)XY^T.$$

Or $X$ et $Y$ sont non nuls, et $XY^T = (x_iy_j)_{1\leq i,j\leq n}$, donc $XY^T$ possède au moins une coordonnée non nulle. Ainsi $\alpha-\beta\in\mathrm{Sp}(u)$.

• **2. (a)** On a $AM = MB + \lambda M = M(B+\lambda I_n)$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on pose $H_k$ :

$$A^kM = M(B+\lambda I_n)^k.$$

INITIALISATION : $H_0$ est évidente, et $H_1$ est vraie par hypothèse.

HÉRÉDITÉ : Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On suppose $H_k$.

$$A^{k+1}M = A^k\cdot AM = A^kM(B+\lambda I_n) = M(B+\lambda I_n)^k\cdot(B+\lambda I_n),$$

donc $H_{k+1}$ est vraie. Ce qui achève la récurrence et montre le résultat par linéarité.

**(b)** On choisit pour polynôme le polynôme caractéristique de $A$, de sorte que

$$M\chi_A(B+\lambda I_n) = \chi_A(A)M = 0_n.$$

Si par l'absurde, $\chi_A(B+\lambda I_n)$ était inversible, on aurait $M=0_n$. Ainsi,

$$\chi_A(B+\lambda I_n) = \prod_{\alpha\in\mathrm{Sp}(A)} (B+(\lambda-\alpha)I_n)^{m_\alpha}$$

est non inversible, donc un des facteurs de ce produit aussi. On dispose ainsi de $\alpha\in\mathrm{Sp}(A)$ tel que $B+(\lambda-\alpha)I_n$ est non inversible. Ainsi $\beta=-(\lambda-\alpha)$ est une valeur propre de $B$. Or,

$$\lambda = \alpha-\beta.$$

D'où le résultat.

• **3.** On déduit des questions 1 et 2 que

$$\mathrm{Sp}(u) = \{\alpha - \beta \mid \alpha \in \mathrm{Sp}(A),\ \beta \in \mathrm{Sp}(B)\}.$$

• **4.** Cette condition est équivalente au fait que $u$ admette 0 comme valeur propre. Mais d'après la question précédente, $u$ admet 0 comme valeur propre si et seulement si $A$ et $B$ ont une valeur propre commune. La condition nécessaire et suffisante recherchée est donc

$$\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) \neq \emptyset.$$ □

**Exercice 25**

• **1.** Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. On dispose de $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_i| = \|X\|_\infty$. Alors,

$$\lambda x_i = [AX]_{i,1} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j,$$

d'où

$$|\lambda - a_{i,i}| \cdot |x_i| = \left|\sum_{j\neq i} a_{i,j} x_j\right| \leq \sum_{j\neq i} |a_{i,j}| \cdot |x_j| \leq |x_i| \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|.$$

Or $|x_i| > 0$, donc en simplifiant par ce réel, on a

$$|\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|.$$

D'où $\lambda \in D_i$. On en déduit le résultat.

• **2.** Supposons que $0 \in \mathrm{Sp}(A)$. D'après la question précédente, on dispose de $i \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$|a_{i,i}| = |0 - a_{i,i}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|,$$

ce qui contredit l'hypothèse. Donc $A$ est inversible. □

**Remarques**

Par ailleurs, on considérant $A^T$, on montre aussi que $\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D'_i$, où

$$D'_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{j,i}| \right\}.$$

Ce résultat permet de localiser les valeurs propres d'une matrice, et s'appelle le théorème de Gerschgorin.

**Exercice 26**

• **1.** Déjà, $\mathcal{S}$ est non vide, car $I_n$ est une matrice stochastique. Soient $A, B \in \mathcal{S}$ et $t \in [0, 1]$. On a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} (t a_{i,j} + (1-t) b_{i,j}) = t \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} + (1-t) \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = t + (1-t) = 1.$$

De plus, les coefficients de $tA+(1-t)B$ sont positifs. Donc $tA+(1-t)B \in \mathcal{S}$. Ce qui montre la convexité. Tous les coefficients d'une matrice stochastique sont entre 0 et 1, ce qui montre le caractère borné de $\mathcal{S}$, en considérant la norme infinie. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}$ convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} [A_n]_{i,j} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1,$$

par convergence coefficient à coefficient. On en déduit aussi que tous les coefficients de $A$ sont positifs. Ainsi $A \in \mathcal{S}$. L'ensemble $\mathcal{S}$ est donc fermé borné, c'est-à-dire compact en dimension finie (p. 391). Enfin, soient $A, B \in \mathcal{S}$. $A$ et $B$ étant à coefficients positifs, leur produit aussi. Maintenant, pour $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} [AB]_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = 1.$$

Donc $AB \in \mathcal{S}$. D'où le résultat.

• **2.** Soient $A \in \mathcal{S}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A$, et $X$ un vecteur propre associé. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$|\lambda| \cdot |x_i| = |[AX]_{i,1}| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\|X\|_\infty \leq \|X\|_\infty.$$

En particulier, on peut choisir $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_i| = \|X\|_\infty$, et comme $X$ est non nul, on a $|\lambda| \leq 1$. D'où le résultat.

• **3. (a)** Soit $i \in [\![1,n-1]\!]$.

$$1 - a_{i,i} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j} > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1} a_{i,j},$$

car $a_{i,n} > 0$. Or $1-a_{i,i}$ est positif et $A$ est à coefficients positifs, donc

$$\Big|[B-I_{n-1}]_{i,i}\Big| = 1 - a_{i,i} > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1} \Big|[B-I_{n-1}]_{i,j}\Big|.$$

Donc $B-I_{n-1}$ est à diagonale strictement dominante.

**(b)** D'après le résultat de l'exercice précédent, $B-I_{n-1}$ est inversible. On en déduit que $\dim(\ker(A-I_n)) \leq 1$. En effet, si la dimension était strictement supérieur à 1, l'espace engendré par les colonnes de $A-I_n$ serait de dimension inférieur ou égale à $n-2$. Cela signifie qu'il existerait une combinaison linéaire non nulle des $n-1$ premières colonnes donnant la colonne nulle, autrement dit $B-I_{n-1}$ ne serait pas inversible. D'où

$$\dim(\ker(A-I_n)) \leq 1.$$

Or, en notant $X = (1 \cdots 1)^T$, on a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$[AX]_{i,1} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 = x_i.$$

Ainsi, $AX = X$. D'où

$$\dim(\ker(A - I_n)) = 1.$$

**(c)** Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ de module 1. En reprenant la preuve de l'exercice précédent, on montre qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$|\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} a_{i,j} = 1 - a_{i,i}.$$

Ainsi,

$$1 = |\lambda| = |\lambda - a_{i,i} + a_{i,i}| \leq |\lambda - a_{i,i}| + a_{i,i} \leq 1,$$

avec l'équation précédente. On a donc égalité dans l'inégalité triangulaire. Comme $a_{i,i} \neq 0$, on dispose de $\mu \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\lambda - a_{i,i} = \mu a_{i,i}.$$

En particulier, $\lambda$ est un réel positif. Donc $\lambda = 1$. D'où le résultat. □

**Remarques**

Les matrices stochastiques sont particulièrement intéressantes en probabilité, puisqu'elles peuvent encoder une marche aléatoire. Donnons-nous par exemple $n$ points du plan, qu'on numérote de 1 à $n$, et $p\colon [\![1, n]\!] \to [0, 1]$ une probabilité sur cet ensemble. On note $\pi$ son vecteur de probabilité associé, c'est-à-dire que

$$\pi_i = p(i), \quad \text{pour tout } i \in [\![1, n]\!].$$

On place une puce au temps $t = 0$ sur un des points du plan, selon la probabilité $p$. Puis, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $a_{i,j}$ la probabilité qu'a la puce de passer du point $i$ au point $j$, d'un temps à un autre. Par formule des probabilités totales, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1, \quad \text{pour tout } i \in [\![1, n]\!].$$

Et les probabilités étant toujours positives, la matrice $A$ associée est donc une matrice stochastique. Il vient par récurrence immédiate que la distribution de probabilité de la place de la puce au temps $t = n$ suit la loi

$$\pi^{(n)} = A^n \pi,$$

puisqu'on passe d'un temps à un autre à l'aide de la matrice $A$. On peut alors étudier la convergence éventuelle de la suite $(\pi^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, pour avoir la loi « à l'infini » de la place de la puce. Si la suite converge, et qu'on note $\pi^{(\infty)}$ le vecteur de probabilité associé, on remarque que

$$A\pi^{(\infty)} = A \cdot \lim_{n \to +\infty} A^n \pi = \lim_{n \to +\infty} A^{n+1} \pi = \pi^{(\infty)},$$

par continuité du produit matriciel. Le vecteur $\pi^{(\infty)}$ est donc un vecteur propre pour $A$, associé à la valeur propre 1. Dans le cas où $A$ est à coefficients strictement positifs, $\pi^{(\infty)}$