

prépaBAC



T^{le}
GÉNÉRALE

Maths

SPÉCIALITÉ

& Maths expertes

**Cours &
entraînement**

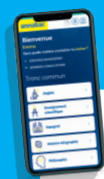
**NOUVEAU
BAC**

Pour **exceller**
en maths!

- ✓ Un **cours** complet et visuel
- ✓ Les **méthodes** clés
- ✓ **350 exos & sujets** guidés
- ✓ Des **corrigés** expliqués

INCLUS

Des vidéos de révision



+

OFFERT Un abonnement
au site de révision **annabac**





Maths SPÉCIALITÉ & Maths expertes

**Cours &
entraînement**

- ▶ **Michel Abadie**
Professeur agrégé de mathématiques
- ▶ **Jacques Delfaud**
Professeur agrégé de mathématiques
- ▶ **Annick Meyer**
Professeure agrégée de mathématiques
- ▶ **Jean-Dominique Picchiottino**
Professeur agrégé de mathématiques
- ▶ **Sophie Touzet**
Professeure agrégée de mathématiques
- ▶ **Martine Salmon**
Professeure agrégée de mathématiques

Mode d'emploi

Voici les ressources que vous trouverez dans ce Prépabac :

Dans chaque chapitre

Un cours visuel

1. Des fiches synthétiques et illustrées
2. Des méthodes détaillées
3. Une carte mentale récapitulative

Un entraînement progressif

1. Des quiz pour se tester
2. Des exercices guidés
3. Des sujets de type bac

Des corrigés détaillés



Et aussi : Des vidéos de cours
au fil des chapitres. Retrouvez leur liste **p. 10**

Nous vous recommandons d'utiliser régulièrement l'ouvrage, en fonction de vos besoins. Ainsi vous pourrez aborder l'épreuve écrite de maths et le Grand Oral en toute sérénité, et acquérir les compétences nécessaires à la poursuite de vos études.

Les auteurs



Michel Abadie



Jacques Delfaud



Pierre Larivière



Annick Meyer



Jean-Dominique
Picchiotino



Sophie Touzet



Martine Salmon

SOMMAIRE

Algèbre et géométrie

1 Combinatoire et dénombrement



COURS & MÉTHODES

- 1 Réunion, produit cartésien et parties d'ensembles ... 14
- 2 Arrangements, factorielle et combinaisons ... 16
- 3 Démonstration par récurrence ... 18

MÉMO VISUEL

- EXERCICES & SUJETS SE TESTER • DÉMONSTRATIONS CLÉS ... 22
- S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC ... 23
- CORRIGÉS ... 26

2 Vecteurs, droites et plans de l'espace

COURS & MÉTHODES

- 4 Les vecteurs de l'espace ... 36
- 5 Positions relatives de deux droites de l'espace ... 38
- 6 Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace ... 40
- 7 Positions relatives de deux plans de l'espace ... 42
- 8 Étude vectorielle du parallélisme dans l'espace ... 44

MÉMO VISUEL



- EXERCICES & SUJETS SE TESTER • S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC ... 48
- CORRIGÉS ... 54



3 Orthogonalité et distances dans l'espace



COURS & MÉTHODES

- 9 Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace ... 60
- 10 Orthogonalité et produit scalaire ... 62
- 11 Projeté orthogonal d'un point sur une droite ou un plan de l'espace ... 64

MÉMO VISUEL



- EXERCICES & SUJETS SE TESTER • DÉMONSTRATION CLÉ ... 68
- S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC ... 69
- CORRIGÉS ... 75

4 Équations de droites et de plans



COURS & MÉTHODES

- 12** Équation cartésienne d'un plan de l'espace 86
- 13** Représentation paramétrique d'une droite de l'espace 88
- 14** Coordonnées des points d'intersection de droites et de plans 90

MÉMO VISUEL



92

EXERCICES & SUJETS

- SE TESTER • DÉMONSTRATION CLÉ** 94
- S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC** 96
- CORRIGÉS** 99

Analyse

5 Suites numériques

COURS & MÉTHODES

- 15** Définitions, comparaison et encadrement 112
- 16** Limites : opérations et suites monotones 114
- 17** Suites géométriques et fonction exponentielle 116

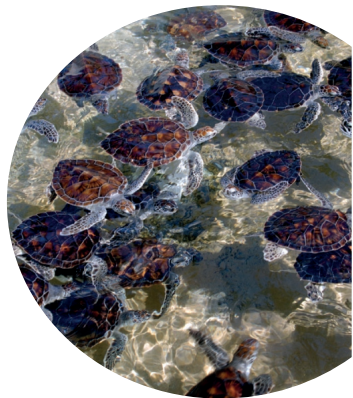
MÉMO VISUEL



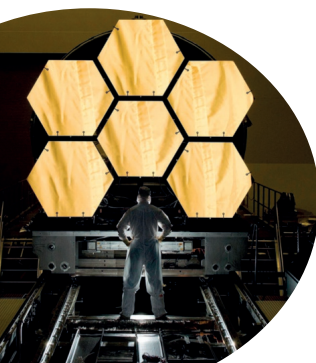
118

EXERCICES & SUJETS

- SE TESTER • DÉMONSTRATIONS CLÉS** 120
- S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC** 122
- CORRIGÉS** 127



6 Compléments sur la dérivation



COURS & MÉTHODES

- 18** Dérivée de la composée de deux fonctions 138
- 19** Fonctions convexes 140

MÉMO VISUEL



142

- EXERCICES & SUJETS** **SE TESTER • DÉMONSTRATION CLÉ** 144
- S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC** 145

CORRIGÉS

153

7 Limites et continuité des fonctions d'une variable réelle



COURS & MÉTHODES

20	Limites et asymptotes	162
21	Opérations sur les limites, comparaison	164
22	Limites et continuité	166

MÉMO VISUEL



168

EXERCICES & SUJETS	SE TESTER • DÉMONSTRATION CLÉ	170
S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC		171

CORRIGÉS

176

8 Fonctions de référence : logarithme, sinus et cosinus

COURS & MÉTHODES

23	Définition et propriétés analytiques de la fonction logarithme népérien	186
24	Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien	188
25	Comparaison des fonctions puissance, ln et exp	190
26	Fonctions trigonométriques	192

MÉMO VISUEL



194

EXERCICES & SUJETS	SE TESTER • DÉMONSTRATIONS CLÉS	196
S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC		197

CORRIGÉS

202



9 Primitives, équations différentielles



COURS & MÉTHODES

27	Notions d'équation différentielle et de primitive	214
28	Équation différentielle $y' = ay + f$	216
29	Calculs de primitives	218

MÉMO VISUEL



220

EXERCICES & SUJETS	SE TESTER • DÉMONSTRATIONS CLÉS	222
S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC		223

CORRIGÉS

227

10 Calcul intégral



COURS & MÉTHODES

30	Définition de l'intégrale	234
31	Propriétés de l'intégrale	236

MÉMO VISUEL

		238
--	--	-----

EXERCICES & SUJETS

SE TESTER • DÉMONSTRATIONS CLÉS	240
S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC	242

CORRIGÉS

	247
--	-----

Probabilités

11 Schéma de Bernoulli, loi binomiale

COURS & MÉTHODES

32	Schéma de Bernoulli	260
33	Succession d'épreuves	262
34	Loi binomiale	264

MÉMO VISUEL

		266
--	--	-----

EXERCICES & SUJETS

SE TESTER • DÉMONSTRATION CLÉ	268
S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC	269

CORRIGÉS

	278
--	-----



12 Sommes de variables aléatoires



COURS & MÉTHODES

35	Somme de deux variables aléatoires	288
36	Application à la loi binomiale	290
37	Échantillon de taille n d'une loi de probabilité	292

MÉMO VISUEL

EXERCICES & SUJETS	SE TESTER • DÉMONSTRATION CLÉ	296
S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC		297
CORRIGÉS		302

13 Concentration, loi des grands nombres



COURS & MÉTHODES

38	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev Inégalité de concentration	312
39	Loi des grands nombres	314

MÉMO VISUEL

EXERCICES & SUJETS		
SE TESTER • S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC		318
CORRIGÉS		324

Enseignement optionnel Maths expertes

14 Nombres complexes : points de vue algébrique et géométrique



COURS & MÉTHODES

40	Calculs dans $\mathbb{C}$	340
41	Image et affixe d'un nombre complexe	342
42	Différentes écritures d'un nombre complexe	344
43	Propriétés du module et des arguments d'un nombre complexe	346

MÉMO VISUEL

348

EXERCICES & SUJETS

SE TESTER • DÉMONSTRATIONS CLÉS	350
S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC	351
CORRIGÉS	356

15 Applications des nombres complexes

COURS & MÉTHODES

44	Trigonométrie, formules d'Euler et de Moivre	372
45	Équations du second degré dans $\mathbb{C}$ à coefficients réels	374
46	Polynômes et racines n -ièmes de l'unité	376

MÉMO VISUEL

378

EXERCICES & SUJETS

SE TESTER • DÉMONSTRATIONS CLÉS	380
S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC	382
CORRIGÉS	387



16 Arithmétique

COURS & MÉTHODES

47	Divisibilité et congruences	404
48	PGCD de deux entiers	406
49	Entiers premiers entre eux	408
50	Nombres premiers	410

MÉMO VISUEL

412

EXERCICES & SUJETS

SE TESTER • DÉMONSTRATIONS CLÉS	414
S'ENTRAÎNER • OBJECTIF BAC	416
CORRIGÉS	422



17 Graphes et matrices



COURS & MÉTHODES

51	Matrices et opérations	434
52	Puissance et inverse d'une matrice – Matrices colonnes	436
53	Sommets, arêtes et chaînes d'un graphe	438
54	Chaînes de Markov	440

MÉMO VISUEL

442

EXERCICES & SUJETS

SE TESTER • S'ENTRAÎNER

444

OBJECTIF BAC

450

CORRIGÉS

452

ANNEXES

55	Les listes	466
56	Logique mathématique	468
57	Algorithmique : variables, boucles, fonctions	470
58	Le raisonnement par récurrence	472
Index		475

Les vidéos de l'ouvrage



Retrouvez l'ensemble de ces vidéos

sur la chaîne Youtube **annabac**

(playlist : Maths T^{le} (spécialité) – Les notions-clés)

■ Les notions-clés

▶ Quelles sont les positions relatives de droites et de plans dans l'espace ?

hatier-clic.fr/mat-e_T_01



▶ Qu'est-ce qu'une représentation paramétrique de droite dans l'espace ?

hatier-clic.fr/mat-e_T_02



▶ Comment déterminer une équation cartésienne de plan dans l'espace ?

hatier-clic.fr/mat-e_T_03



▶ Comment appliquer les principaux théorèmes relatifs aux limites de suites ?

hatier-clic.fr/mat-e_T_04



▶ Qu'est-ce que la composée de deux fonctions ?

hatier-clic.fr/mat-e_T_05



▶ Comment étudier les asymptotes à la courbe représentative d'une fonction ?

hatier-clic.fr/mat-e_T_06



▶ Comment montrer l'existence de solutions à l'équation $f(x) = f$?

hatier-clic.fr/mat-e_T_07



▶ Quelles sont les propriétés à connaître de la fonction logarithme népérien ?

hatier-clic.fr/mat-e_T_08



▶ Comment déterminer une primitive d'une fonction ?

hatier-clic.fr/mat-e_T_09



▶ Comment montrer qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale ?

hatier-clic.fr/mat-e_T_10

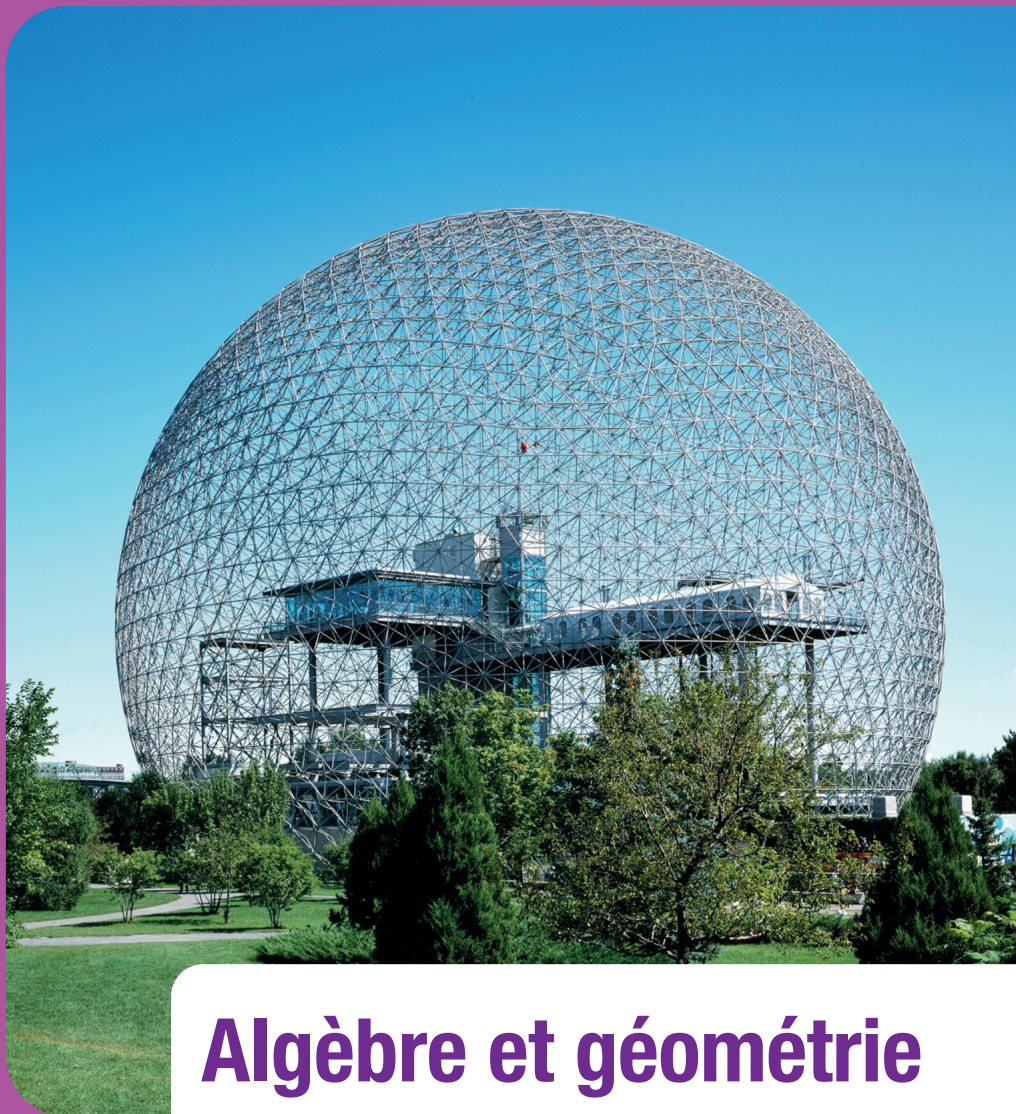


■ Savoir-faire & démonstrations

▶ Maths T^{le} (spécialité)
Savoir-faire & démonstrations

hatier-clic.fr/mat-e_T





Algèbre et géométrie

Enseignement de spécialité

1 Combinatoire et dénombrement

La combinatoire et le dénombrement permettent de compter le nombre d'objets possédant une qualité donnée. La gestion des mégadonnées (big data), dont la taille rend le dénombrement difficile, constitue un défi pour les statistiques et l'informatique.

FICHES DE COURS

1	Réunion, produit cartésien et parties d'ensembles	14
2	Arrangements, factorielle et combinaisons	16
3	Démonstration par récurrence	18

MÉMO VISUEL	20
--------------------	----

EXERCICES & SUJETS

SE TESTER	Exercices 1 à 3	22
DÉMONSTRATIONS CLÉS	Exercices 4 à 6	23
S'ENTRAÎNER	Exercices 7 à 13	23
OBJECTIF BAC	Exercice 14 • Sujet guidé	25

CORRIGÉS

Exercices 1 à 14	27
------------------	----

1

Réunion, produit et parties d'ensembles

En bref

Décrire un ensemble d'objets à l'aide de réunions, de produits ou de parties d'ensembles permet de les dénombrer rigoureusement.

I Réunion de deux ensembles

■ **Définition :** La **réunion** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A **ou** à B ; elle est notée $A \cup B$.



À NOTER

L'**intersection** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A et à B ; elle est notée $A \cap B$.

■ **Principe additif :** Soient A et B deux ensembles disjoints (d'intersection vide). Si m et n sont les nombres d'éléments respectifs de A et de B , alors la réunion de A et B comporte $m + n$ éléments.



À NOTER

Si les deux ensembles ne sont pas disjoints, il faut ôter au résultat le nombre d'éléments r de leur intersection.

II Produit cartésien

■ **Définitions :** Le **produit cartésien** de deux ensembles A et B est l'ensemble des couples (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$. Il est noté $A \times B$.

On note A^k l'ensemble $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ termes}}$, ces éléments sont des k -uplets.

■ **Principe multiplicatif :** Si m et n (entiers naturels non nuls) sont les nombres d'éléments respectifs de deux ensembles A et B , alors le produit cartésien $A \times B$ comporte $m \times n$ éléments.

Soit A un ensemble à n éléments et k un entier naturel non nul. L'ensemble A^k des k -uplets (k -listes) d'éléments de A comporte n^k éléments.

III Parties d'un ensemble

■ **Définition :** Un ensemble A est une **partie** d'un ensemble E si et seulement si tous les éléments de A sont des éléments de E . On écrit alors $A \subset E$.

On dit également que A est un **sous-ensemble** de E .

■ **Théorème :** Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n .



À NOTER

C'est également le nombre de n -uplets de l'ensemble $\{0; 1\}$.

Méthodes

1 Déterminer le nombre d'éléments d'une réunion d'ensembles

Déterminer le nombre d'entiers naturels inférieurs à 199 dont l'écriture décimale comporte le chiffre 0.

SOLUTION

On considère les ensembles disjoints suivants :

$A = \{0; 10; \dots; 90\}$, le sous-ensemble de ces entiers inférieurs à 99 ;

$B = \{100; \dots; 109\}$, le sous-ensemble de ces entiers compris entre 100 et 109

et $C = \{110; \dots; 190\}$ le sous-ensemble de ces entiers supérieurs à 109.

A et B ont chacun 10 éléments et C en a 9. **Il y a donc en tout 29 entiers naturels** inférieurs à 199 dont l'écriture décimale comporte le chiffre 0.



CONSEILS

Regroupez les nombres considérés en plusieurs ensembles facilement dénombrables.

2 Utiliser le produit cartésien

Les cartes d'un jeu sont numérotées de 1 à 3 et coloriées en rouge, vert, bleu, jaune ou noir. Toutes les cartes de ce jeu sont différentes et ce jeu contient toutes les cartes possibles.

Combien y a-t-il de cartes dans ce jeu ?

SOLUTION

Considérons $N = \{1; 2; 3\}$ et $C = \{\text{rouge}; \text{vert}; \text{bleu}; \text{jaune}; \text{noir}\}$. Alors chaque couple de $N \times C$ définit une unique carte du jeu complet.

Il y a donc $3 \times 5 =$ **15 cartes** dans ce jeu.



CONSEILS

Caractérisez chaque carte par un couple.

3 Dénombrer le nombre de parties d'un ensemble

Un caractère Braille est représenté par deux colonnes de trois points chacune, chaque point étant ou non en relief.

Combien peut-on former de caractères différents, sachant qu'au moins un des points doit être en relief ?

SOLUTION

Considérons l'ensemble B des six points des deux colonnes, tous ces points étant en relief. Fabriquer un caractère braille, c'est choisir les points qui seront en relief, c'est-à-dire choisir une partie de B différente de la partie vide (un au moins des points est en relief) : il y a donc $2^6 - 1$ choix possibles, soit **63 caractères brailles**.



CONSEILS

Considérez un caractère comme une partie d'un ensemble à six éléments.

2

Arrangements, factorielle et combinaisons

En bref

Le nombre de listes de k objets deux à deux distincts pris parmi n , ordonnées ou non, se détermine en fonction de k et de n .

I Arrangements et factorielle

■ **Définition :** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle **arrangement** de k éléments d'un ensemble E comportant n éléments, tout k -uplet d'éléments deux à deux distincts de E .

■ **Théorème :** Le nombre d'arrangements de k éléments d'un ensemble à n éléments est $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$.

■ **Définition :** La **factorielle** d'un entier naturel non nul n est le produit des entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à n ; elle est notée $n!$.

On convient de plus que $0! = 1$.

Remarque : Un arrangement des n éléments d'un ensemble E à n éléments est appelé une **permutation** des éléments de E . Il y a $n!$ permutations de E .



À NOTER

Pour tout entier naturel n :
 $(n+1)! = (n+1) \times n!$

II Combinaisons

■ **Définition :** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle **combinaison** de k éléments d'un ensemble E comportant n éléments, toute partie de E possédant k éléments.

■ **Théorème :** Soit $n \in \mathbb{N}$ et k entier, $0 \leq k \leq n$. Le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments est $\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$ ou encore $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ce nombre est noté $\binom{n}{k}$ qu'on lit « k parmi n ».

■ Valeurs particulières et propriétés

Pour tous entiers naturels n et k , $0 \leq k \leq n$:

$$\bullet \binom{n}{0} = 1 ; \binom{n}{1} = n ; \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \text{ et } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

■ Relation de Pascal

$$\text{Si } k+1 \leq n, \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Cette relation permet de construire le **triangle de Pascal** qui donne la valeur des $\binom{n}{k}$ pour des petites valeurs de n :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Méthodes

1 | Déterminer un nombre de k -uplets

On dispose de 10 couleurs pour fabriquer un drapeau tricolore de trois bandes horizontales. Combien de drapeaux différents pourra-t-on fabriquer ?



CONSEILS

Identifiez la taille des k -uplets, c'est-à-dire k , et l'ensemble des éléments pouvant former ces k -uplets.

SOLUTION

Pour fabriquer un drapeau tricolore il faut choisir trois couleurs différentes parmi les 10 couleurs et colorier les bandes du drapeau, par exemple de haut en bas, à l'aide de ces trois couleurs.

Il y a $10 \times 9 \times 8$ triplets de trois couleurs distinctes, soit **720 drapeaux** tricolores possibles.

2 | Calculer à l'aide de combinaisons

a. On désire former une équipe de 15 élèves dans une classe qui en comporte 20. Combien d'équipes différentes pourrait-on former ?

b. Calculer $\binom{9}{4}$ et $\binom{9}{6}$. En déduire $\binom{9}{5}$, $\binom{10}{5}$, $\binom{10}{6}$ et $\binom{11}{6}$.



CONSEILS

On rappelle que $\binom{n}{k}$ est le nombre de choix de k objets parmi n .

SOLUTION

a. Il y a $\binom{20}{15}$ manières de choisir 15 élèves cartes parmi 20.

Or, $\binom{20}{15} = \binom{20}{5}$ par symétrie et $\binom{20}{15} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \mathbf{15\,504}$.

b. On a $\binom{9}{4} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \mathbf{126}$ et, par symétrie, $\binom{9}{6} = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = \mathbf{84}$.

En utilisant la symétrie puis la relation de Pascal :

$$\binom{9}{5} = \binom{9}{4} = \mathbf{126} ;$$

$$\binom{10}{5} = \binom{9}{4} + \binom{9}{5} = \mathbf{252} ;$$

$$\binom{10}{6} = \binom{9}{5} + \binom{9}{6} = \mathbf{210} ;$$

$$\text{et } \binom{11}{6} = \binom{10}{5} + \binom{10}{6} = \mathbf{462}.$$

3

Démonstration par récurrence

En bref

Une démonstration par récurrence consiste à démontrer qu'une infinité de propositions dépendantes d'un entier naturel n sont vraies.

I Le principe de récurrence

Soit n_0 un entier naturel et soit $\mathcal{P}_{n_0}, \mathcal{P}_{n_0+1}, \mathcal{P}_{n_0+2}, \dots, \mathcal{P}_n, \dots$ une suite de propositions.

Si la $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie et si, pour n'importe quel entier naturel n tel que $n \geq n_0$, la vérité de $\mathcal{P}_n$ entraîne celle de $\mathcal{P}_{n+1}$, alors on peut conclure que pour tout entier naturel n tel que $n \geq n_0$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.



À NOTER

Dans la grande majorité des cas, n_0 vaut 0 ou 1.

II La démonstration par récurrence

1 Mise en œuvre

Soit n_0 un entier naturel. Pour démontrer par récurrence qu'une proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on procède en deux étapes qui permettront de conclure :

- l'**initialisation** pour vérifier que la proposition $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie ;
- l'**hérédité** montrant que si la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel n quelconque tel que $n \geq n_0$, alors la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ doit être également vraie.

Le principe de récurrence permettra alors de conclure que pour tout entier naturel n tel que $n \geq n_0$, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie.



À NOTER

Lors de la seconde étape, on suppose la proposition $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain rang n : c'est l'**hypothèse de récurrence**, souvent notée HR.

2 Quelques pièges à éviter

■ Oublier l'initialisation : par exemple la proposition « $10^n + (-1)^n$ est un multiple de 11 » est héréditaire, puisque $10^{n+1} + (-1)^{n+1} = 10(10^n + (-1)^n) - 11(-1)^n$, mais elle est fausse pour tout entier n .

■ Supposer, pour montrer l'hérédité, que la proposition est vraie pour **tout** entier naturel n , puisque c'est ce que l'on veut justement démontrer !

On supposera donc la proposition vraie pour **un** entier naturel.

Méthode

Démontrer une égalité

Démontrer par récurrence que pour tout entier n strictement positif :

$$\sum_{k=1}^n (k+1) \times 2^{k-1} = n \times 2^n.$$



CONSEILS

Lorsque l'on exprime la propriété au rang $n+1$, il faut penser à remplacer « tous les n » par des « $n+1$ ». Pour la notation Σ , se référer au mémo visuel.

SOLUTION

■ **Initialisation** : Pour $n = 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k+1) \times 2^{k-1} &= \sum_{k=1}^1 (k+1) \times 2^{k-1} \\ &= 2 \times 2^0 = 2. \end{aligned}$$

Et, $n \times 2^n = 2$.

La proposition est donc vraie au rang 1.

■ **Hérédité** : Supposons que pour un entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=1}^n (k+1) \times 2^{k-1} = n \times 2^n.$$

(C'est l'hypothèse de récurrence : HR.)

On veut en déduire que $\sum_{k=1}^{n+1} (k+1) \times 2^{k-1} = (n+1) \times 2^{n+1}$.



CONSEILS

Lors de cette étape, tout d'abord, établissez un lien entre les propositions aux rangs n et $n+1$, puis utilisez l'hypothèse de récurrence.

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (k+1) \times 2^{k-1} &= \sum_{k=1}^n (k+1) \times 2^{k-1} + (n+2)2^n \\ &= n \times 2^n + (n+2)2^n \quad (\text{HR}) \\ &= (2n+2) \times 2^n \\ &= (n+1) \times 2 \times 2^n \\ &= (n+1) \times 2^{n+1}. \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

■ **Conclusion** : Le principe de récurrence permet de conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (k+1) \times 2^{k-1} = n \times 2^n.$$

Nombre d'éléments

- Pour la **réunion** d'ensembles disjoints, on additionne leurs nombres d'éléments.
- Pour un **produit**, on multiplie leurs nombres d'éléments.
- Les **parties** d'un ensemble possédant n éléments, sont au nombre de 2^n .

Comment déterminer le nombre d'éléments à l'aide de plusieurs ensembles ?

DÉNOMBREMENTS

Comment calculer le nombre d'éléments

deux à deux distincts d'une liste ?

Nombre d'éléments d'une liste

Nombre de k -uplets

Le nombre de k -uplets d'éléments **deux à deux distincts** d'un ensemble à n éléments est $n(n-1)\dots(n-k+1)$

Nombre de permutations

Le nombre de permutations (n -uplets d'éléments **deux à deux distincts**) d'un ensemble à n éléments est $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$

Nombre de combinaisons

Le nombre de combinaisons de k objets choisis parmi n (nombres de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments) est $\binom{n}{k}$.

Propriétés de $\binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$

- Valeurs particulières :

$$\binom{n}{0} = 1; \binom{n}{1} = n; \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

- Symétrie :

$$\text{si } 0 \leq k \leq n, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

- Relation de Pascal :

$$\text{si } 1 \leq k+1 \leq n, \\ \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

- Triangle de Pascal

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Comment calculer avec
les factorielles ?

Factorielles

Premiers termes

On a $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$ et $3! = 3 \times 2 = 6$.

Cas général

Si $n \geq 3$, $n! = n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1$.

Récurrence

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Comment mettre en œuvre une démonstration
par récurrence ?

Récurrence

Démonstration par récurrence

• **Initialisation** : On démontre la proposition à démontrer au premier rang

(en général 0 ou 1) $\mathcal{P}_0$ ou $\mathcal{P}_1$ est vraie

• Hérité

On démontre que si la proposition est vraie pour un rang n alors elle est vraie

pour le rang $n+1$. $\mathcal{P}_n$ est vraie entraîne $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

• **Conclusion** Pour tout n , $n \geq 0$ ou $n \geq 1$, $\mathcal{P}_n$ est vraie

Comment travailler avec le symbole Σ ?

Symbole Σ

• Pour des entiers n et m
tels que $n \geq m$:

$$\sum_{k=m}^n u_k = u_m + u_{m+1} + \dots + u_n$$

• **Télescopage** :

$$\sum_{k=m}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m$$

• **Linéarité** : $\sum_{k=m}^n (u_k + v_k) = \sum_{k=m}^n u_k + \sum_{k=m}^n v_k$ et $\sum_{k=m}^n \lambda u_k = \lambda \sum_{k=m}^n u_k$

SE TESTER QUIZ

Vérifiez que vous avez bien compris les points clés des **fiches 1 à 3**.

1 Réunions, produit et parties d'ensembles

→ FICHE 1

1. Un code est composé de 2 lettres de l'alphabet suivies de 3 chiffres. Le nombre de codes différents est :

- ☐ a. supérieur à 8×5^7 ☐ b. 676 000 ☐ c. 82

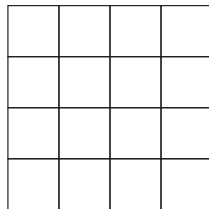
2. Le nombre de carrés dont les côtés sont des segments du quadrillage de la figure ci-contre est :

- ☐ a. 1 ☐ b. 16 ☐ c. 30

3. Quatre personnes se présentent à un casting à l'issue duquel jusqu'à quatre personnes peuvent être retenues.

Le nombre de situations différentes produites est :

- ☐ a. 4 ☐ b. 5 ☐ c. 16



2 k-uplets, factorielle, combinaisons

→ FICHE 2

1. En utilisant chaque lettre du mot MATHS une et une seule fois, le nombre de mots que l'on peut former, sans tenir compte de leur signification, est :

- ☐ a. 24 ☐ b. 120 ☐ c. 5^5

2. Le code d'un cadenas est composé de 3 chiffres (de 0 à 9) deux à deux distincts. Le nombre de codes possibles est :

- ☐ a. 720 ☐ b. 30 ☐ c. 1 000

3. Les élèves de première générale d'un lycée doivent choisir trois spécialités parmi les 12 proposées. Le nombre de groupes d'élèves ayant choisi les trois mêmes spécialités vaut au maximum :

- ☐ a. 36 ☐ b. 1 320 ☐ c. 220

4. Pour tous entiers naturels n , p et k tels que $k > 1$, on a :

- ☐ a. $\binom{n+p}{p} = \binom{n+p}{n}$ ☐ b. $\binom{k \times n}{k \times p} = \binom{n}{p}$ ☐ c. $\binom{k+n}{k+p} = \binom{n}{p}$

3 Récurrence et sommes

→ FICHE 3

1. La somme $\sum_{k=0}^{10} (-1)^k$ vaut :

- ☐ a. 1 ☐ b. -1 ☐ c. 0

2. On peut démontrer par récurrence que la somme des mesures des angles intérieurs (en degrés) d'un polygone convexe à n sommets vaut :

- ☐ a. 180 ☐ b. $60n$ ☐ c. $180(n-2)$