

*s'intègre*

**1<sup>RE</sup>**

**MATHS**

**SPÉCIALITÉ**

**Cahier de calcul**

Conçu par un collectif  
de professeurs de lycée  
et classe prépa,  
**sous la direction  
de Colas Bardavid**

**DUNOD**

Direction et conception graphiques de la couverture :  
Nicolas Wiel - Pierre-André Gualino (graphiste)

Retrouvez nos ouvrages pour les prépas scientifiques ici



<http://dunod.link/prepassc>

Ce cahier de calcul a été écrit collectivement par une équipe composée de professeurs en classes préparatoires et de professeurs en lycée.

### **Conception et coordination**

Colas BARDAVID

### **Aide à la coordination**

Jérôme TROCHON

### **Équipe des auteurs**

Romain BASSON  
Ménard BOURGADE  
Van Bien BUI  
Carole CHABANIER  
Geneviève DAVION

Hélène GROS  
Benjamin GROUX  
Nicolas LAILLET  
Blaise LE MEAUX  
Lionel MAGNIS

Quang-Thai NGO  
Anthony OLLIVIER  
Alan PELLÉ  
Nicolas POPOFF

### **Relecture**

Rémy ALLOU, Mélissa BAILLÉUIL-INGLART, Anne-Lucie DELVALLEZ, Pierre CAUCHOIS,  
Jérôme GÄRTNER, Éliane GAYOUT, William GREGORY, Jonathan HARTER, Landry LAVOINE,  
Arthur MEYER, Pedro MONTOYA, Inès NEBZRY, Sébastien PELLERIN

### **Illustrations**

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf SCHMITZER (The Noun Project).  
Le pictogramme de la roue crantée a été créé par AFY STUDIO (The Noun Project).  
Le pictogramme de la calculatrice a été créé par Sita RAISITA (The Noun Project).  
Le pictogramme du bateau a été créé par MELLO (The Noun Project).



# Sommaire

|                                                |     |
|------------------------------------------------|-----|
| <i>Introduction</i> .....                      | vii |
| <i>Conventions suivies dans ce livre</i> ..... | ix  |

---

## Polynômes du second degré

|                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------|----|
| <input type="checkbox"/> Fiche 1. Forme canonique .....            | 3  |
| <input type="checkbox"/> Fiche 2. Discriminant et racines I .....  | 9  |
| <input type="checkbox"/> Fiche 3. Discriminant et racines II ..... | 13 |

---

## Polynômes

|                                                      |    |
|------------------------------------------------------|----|
| <input type="checkbox"/> Fiche 4. Polynômes I .....  | 18 |
| <input type="checkbox"/> Fiche 5. Polynômes II ..... | 23 |

---

## Dérivation

|                                                        |    |
|--------------------------------------------------------|----|
| <input type="checkbox"/> Fiche 6. Dérivation I .....   | 28 |
| <input type="checkbox"/> Fiche 7. Dérivation II .....  | 33 |
| <input type="checkbox"/> Fiche 8. Dérivation III ..... | 40 |

---

## Fonction exponentielle

|                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| <input type="checkbox"/> Fiche 9. Généralités sur l'exponentielle I .....   | 46 |
| <input type="checkbox"/> Fiche 10. Généralités sur l'exponentielle II ..... | 51 |
| <input type="checkbox"/> Fiche 11. Dérivation et exponentielle I .....      | 55 |
| <input type="checkbox"/> Fiche 12. Dérivation et exponentielle II .....     | 61 |

---

## Suites

|                                                                     |    |
|---------------------------------------------------------------------|----|
| <input type="checkbox"/> Fiche 13. Généralités sur les suites ..... | 66 |
| <input type="checkbox"/> Fiche 14. Suites arithmétiques .....       | 70 |
| <input type="checkbox"/> Fiche 15. Suites géométriques .....        | 74 |
| <input type="checkbox"/> Fiche 16. Calcul de sommes I .....         | 78 |
| <input type="checkbox"/> Fiche 17. Calcul de sommes II .....        | 83 |
| <input type="checkbox"/> Fiche 18. Calcul de produits .....         | 89 |

---

## Probabilités

|                          |                              |    |
|--------------------------|------------------------------|----|
| <input type="checkbox"/> | Fiche 19. Probabilités ..... | 93 |
|--------------------------|------------------------------|----|

---

## Géométrie et vecteurs

|                          |                                              |     |
|--------------------------|----------------------------------------------|-----|
| <input type="checkbox"/> | Fiche 20. Droites du plan.....               | 100 |
| <input type="checkbox"/> | Fiche 21. Généralités sur les vecteurs ..... | 106 |
| <input type="checkbox"/> | Fiche 22. Coordonnées des vecteurs.....      | 114 |

---

## Trigonométrie

|                          |                                              |     |
|--------------------------|----------------------------------------------|-----|
| <input type="checkbox"/> | Fiche 23. Fonctions trigonométriques I.....  | 122 |
| <input type="checkbox"/> | Fiche 24. Fonctions trigonométriques II..... | 126 |

---

## Produit scalaire

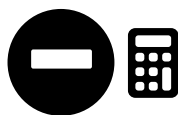
|                          |                                    |     |
|--------------------------|------------------------------------|-----|
| <input type="checkbox"/> | Fiche 25. Produit scalaire I.....  | 132 |
| <input type="checkbox"/> | Fiche 26. Produit scalaire II..... | 136 |

---

## Logique et théorie des ensembles

|                          |                                       |     |
|--------------------------|---------------------------------------|-----|
| <input type="checkbox"/> | Fiche 27. Logique .....               | 144 |
| <input type="checkbox"/> | Fiche 28. Théorie des ensembles ..... | 149 |

*Dans tout ce livre, l'usage de la calculatrice est strictement et formellement interdit.*



*Utiliser une calculatrice pour les exercices serait tout simplement absurde : le but même de ce livre est de fournir à l'étudiant un outil pour s'entraîner au calcul.*

# Introduction

## Le calcul

Le calcul a parfois été délaissé par l'école.

On lui reprochait son côté rébarbatif, on disait que les calculatrices pouvaient s'en charger.

On lui préférait les activités de recherche, plus ludiques, plus intéressantes.

On déconseillait de donner aux élèves des fiches de calcul.

Ce faisant, on a formé des élèves à qui il manquait quelque chose d'essentiel.

## Les vertus du calcul

Le calcul a de nombreuses qualités, de nombreuses vertus.

- Le calcul est indispensable aux mathématiques.

Sans calcul, les mathématiques seraient un paysage inerte, sans mouvement.

C'est le calcul qui permet de transformer une expression  $A(x)$  en une autre expression  $B(x)$ .

C'est le calcul qui permet de montrer que deux quantités sont égales, que deux choses sont identiques.

Quand on explore une situation mathématique, l'intuition est la boussole, c'est elle qui nous indique la direction à prendre. Mais c'est le calcul qui permet d'avancer, de passer d'une étape à la suivante.

- Le calcul permet de se familiariser avec les objets mathématiques compliqués.

Certains objets mathématiques sont difficiles à appréhender. Qu'on pense par exemple aux vecteurs. On peut être dérouté la première fois qu'on doit raisonner avec les vecteurs. Dans ce cas, il est conseillé de beaucoup calculer avec les vecteurs. À force d'en faire, on s'y habitue ; à la fin, on n'est plus dérouté.

- Le calcul donne des idées.

Face à un problème mathématique, être fort en calcul est très utile. On imagine rapidement ce qui va se passer, on peut prévoir « de tête » la direction globale du calcul et donc prendre une bonne direction.

- Le calcul est comme un échauffement mathématique.

- Le calcul est *a priori* une activité sans piège.

Il suffit de suivre les règles méthodiquement.

- Le calcul peut même être ludique !

# L'intérêt du calcul

C'est très simple.

Si vous voulez bien comprendre les mathématiques, le calcul est indispensable.

Quand on apprend à jouer au piano, faire des gammes est, de même, indispensable. Elles permettent de délier les doigts, elles permettent d'ancrer dans les mains des habitudes, des réflexes. Sans gamme, certains morceaux sont inabordables.

De même, la pratique du calcul permet de mieux comprendre les mathématiques.

## Le cahier de calcul

Le cahier de calcul est l'outil idéal pour vous entraîner au calcul, en toute autonomie.

Il a été conçu par une large équipe de professeurs de mathématiques, en lycée et en classes préparatoires, tous soucieux de vous apporter l'aide et les outils pour réussir.

## Comment est-il organisé ?

### Trois parties pour chaque fiche

Chaque fiche du cahier de calcul est divisée en trois parties :

- une première partie de calculs généraux, destinée à **vous entraîner sur les fondamentaux** ;
- la partie principale, qui porte sur le thème de **la fiche en question** ;
- une dernière partie, composée de **calculs plus avancés**, qui est prévue pour ceux qui veulent aller plus loin.

### Des pictogrammes

Le temps de résolution de chaque calcul (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par :

- des bateaux  pour les exercices de calculs généraux ;
- des horloges  pour les exercices de la partie principale ;
- des roues crantées  pour les exercices plus avancés.

### Des cadres pour les réponses

Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

## *Une erreur ? Une remarque ?*

*Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à nous écrire à l'adresse [cahierdecacul@gmail.com](mailto:cahierdecacul@gmail.com). Merci en nous contactant de donner l'identifiant de la fiche, écrit en gris clair en haut à gauche de chaque fiche.*

# Conventions suivies dans ce livre

## Polynômes

Dans ce cahier de calcul, nous avons choisi de noter les polynômes avec la lettre «  $X$  ».

- Ainsi, au lieu de considérer, par exemple, la fonction

$$t \mapsto 5t^4 - 3t^3 + 25t^2 + 10t - 1,$$

on considérera le polynôme

$$5X^4 - 3X^3 + 25X^2 + 10X - 1.$$

- On notera généralement les polynômes  $P$  ou  $Q$ . Par exemple, on peut poser  $P = 5X^2 - 3X - 2$ .
- Les polynômes peuvent être évalués en un nombre, comme les fonctions. Ainsi, pour  $t \in \mathbb{R}$ , on peut considérer  $P(t)$ . En reprenant l'exemple précédent, on a

$$P(1) = 5 \times 1^2 - 3 \times 1 - 2 = 0.$$

On dit alors que 1 *est une racine de*  $P$ .

## Définition des variables

Dans certains exercices, nous avons choisi, par souci de clarté et de concision, de ne pas préciser à quel ensemble appartiennent les variables.

- Par exemple, on pourra demander de simplifier l'expression

$$\frac{2-x}{x+3} - \frac{1-x}{5-x}$$

sans préciser qui est la variable  $x$ .

- Dans ce cas, il faudra toujours considérer que la variable  $x$  est implicitement définie et appartient au bon ensemble.
- Dans l'exemple précédent, il est sous-entendu que  $x$  est un nombre réel différent de  $-3$  et  $5$ .

*Bons calculs à vous !*



# Énoncés



## Forme canonique

### Quelques calculs généraux pour commencer

#### Calcul 1.1



Développer et réduire les expressions suivantes.

a)  $(2x + 3)^2$  .....

d)  $(-\sqrt{3}t - \sqrt{15})^2$  ....

b)  $(3y - 4)^2$  .....

e)  $\left(\frac{3}{2}z + 2\right)^2$  .....

c)  $(-u + \sqrt{7})^2$  .....

f)  $\left(\frac{2}{5}v - \frac{2}{3}\right)^2$  .....

#### Calcul 1.2 — Quelques factorisations.



Factoriser les expressions suivantes.

a)  $x^2 - 25$  .....

d)  $u^2 + 6u + 9$  .....

b)  $4t^2 - 9$  .....

e)  $9v^2 - 12v + 4$  .....

c)  $\frac{2}{9}y^2 - \frac{4}{5}$  .....

f)  $2z^2 + 10\sqrt{2}z + 25$  ..

#### Calcul 1.3 — Quelques équations.



Résoudre les équations suivantes.

*On donnera dans chaque cas l'ensemble des solutions.*

a)  $x^2 = 0$  .....

d)  $(-\sqrt{3}y + \sqrt{6})^2 = 0$

b)  $z^2 = 17$  .....

e)  $2u^2 - 10 = 0$  .....

c)  $(2t + 10)^2 = 0$  .....

f)  $-\frac{3}{4}v^2 + \frac{4}{15} = 0$  ....

# Changements de forme

## Calcul 1.4 — De la forme canonique à la forme développée.



Développer et réduire :

- |                                  |                      |                                                                             |                      |
|----------------------------------|----------------------|-----------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| a) $(X - 3)^2 + 7$ .....         | <input type="text"/> | d) $\sqrt{3}(2X - 1)^2 - 2\sqrt{3}$ ...                                     | <input type="text"/> |
| b) $2(X + 3)^2 - 5$ .....        | <input type="text"/> | e) $\frac{3}{4}\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + 1$ .....                    | <input type="text"/> |
| c) $-(X + \sqrt{2})^2 + 6$ ..... | <input type="text"/> | f) $\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{3}X - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{9}$ .. | <input type="text"/> |

## Calcul 1.5 — Formes canoniques (I).



Mettre les polynômes suivants sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme  $a(X - \alpha)^2 + \beta$ .

- |                         |                      |
|-------------------------|----------------------|
| a) $X^2 + 2X + 2$ ..... | <input type="text"/> |
| b) $X^2 + 4X - 1$ ..... | <input type="text"/> |

## Calcul 1.6 — Formes canoniques (II).



Mettre les polynômes suivants sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme  $a(X - \alpha)^2 + \beta$ .

- |                          |                      |                            |                      |
|--------------------------|----------------------|----------------------------|----------------------|
| a) $-X^2 + 4X - 5$ ..... | <input type="text"/> | c) $-9X^2 + 36X + 4$ ..... | <input type="text"/> |
| b) $4X^2 - 8X - 3$ ..... | <input type="text"/> | d) $-2X^2 - 20X - 17$ .... | <input type="text"/> |

## Calcul 1.7 — Formes canoniques (III).



Mettre les polynômes suivants sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme  $a(X - \alpha)^2 + \beta$ .

- |                                            |                      |                                                     |                      |
|--------------------------------------------|----------------------|-----------------------------------------------------|----------------------|
| a) $X^2 + 3X + \frac{1}{4}$ .....          | <input type="text"/> | d) $-\frac{9}{8}X^2 - \frac{1}{2}X - 4$ .           | <input type="text"/> |
| b) $\frac{1}{4}X^2 + X - 1$ .....          | <input type="text"/> | e) $\frac{1}{2}X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{3}{4}$ .. | <input type="text"/> |
| c) $\frac{2}{9}X^2 + 8X + \frac{1}{7}$ ... | <input type="text"/> | f) $-\frac{4}{5}X^2 - \frac{5}{6}X - \frac{6}{7}$ . | <input type="text"/> |