

mini Manuel

d'Analyse

Cours et exercices corrigés

François Liret

Maître de conférences à l'université Paris Diderot

Charlotte Scribot

Professeure agrégée au Lycée de Créteil

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

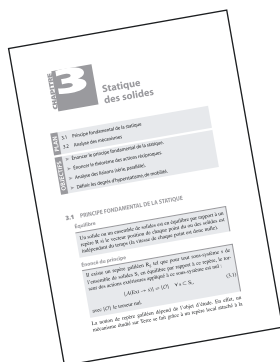


© Dunod, Paris, 2010
ISBN 978-2-10-055447-8

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

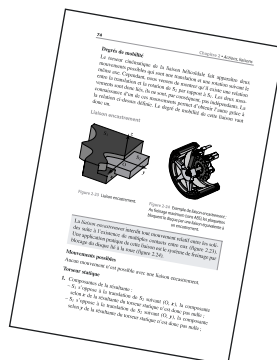
La page d'entrée de chapitre



Elle rappelle les objectifs pédagogiques du chapitre.

Le cours

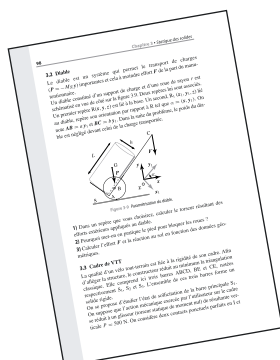
Le cours, concis et structuré, expose les notions importantes du programme.



Les rubriques

Un exemple pour comprendre

Les conseils, les méthodes



Les exercices

Ils sont regroupés en fin de chapitre, avec leur solution, pour se tester tout au long de l'année.

Table des matières

1	Suites et fonctions	1
1.1	Des théorèmes généraux	1
1.2	Suites itératives	7
1.3	Fonctions et équations trigonométriques	8
1.4	Fonctions trigonométriques réciproques	10
1.5	Fonctions hyperboliques	12
	<i>Exercices</i>	16
	<i>Solutions</i>	18
2	Formules de Taylor	29
2.1	La formule des accroissements finis	29
2.2	Le théorème de l'Hospital	31
2.3	Les formules de Taylor	32
	<i>Applications</i>	35
	<i>Exercices</i>	38
	<i>Solutions</i>	40
3	Développement limité	45
3.1	Fonction négligeable devant une autre	45
3.2	Développement limité	46
3.3	Les développements limités usuels	50
3.4	Développement limité en un point a	53
	<i>Exercices</i>	54
	<i>Solutions</i>	56

4	Calcul des développements limités	63
4.1	Quelques propriétés de la notation $o(\)$	63
4.2	Calcul des développements limités	64
4.3	Calcul de limites	69
	<i>Exercices</i>	72
	<i>Solutions</i>	73
5	Étude locale d'une fonction	83
5.1	Signes d'une fonction au voisinage d'un point	83
5.2	Étude locale d'une fonction	85
5.3	Droite asymptote	89
	<i>Exercices</i>	91
	<i>Solutions</i>	93
6	Intégrale et primitive	101
6.1	L'intégrale	101
6.2	Primitives	103
6.3	Règles de calcul et primitives à connaître	105
	<i>Exercices</i>	108
	<i>Solutions</i>	110
7	Calcul d'intégrales	117
7.1	Méthodes générales	117
7.2	Méthode du changement de variable	117
7.3	Intégrale d'une fonction rationnelle	120
7.4	Intégrale de $\frac{ax+b}{\sqrt{x^2+px+q}}$ et de $\sqrt{x^2+px+q}$	124
7.5	Intégrale de $(\sin x)^p(\cos x)^q, p, q \in \mathbb{N}$	125
7.6	Intégrale de fonctions rationnelles en sinus et cosinus	127
7.7	Intégrale de $e^{ax}\sin bx$ et $e^{ax}\cos bx$	129
7.8	Intégrale de $P(x)e^{\alpha x}$ où P est un polynôme	131
	<i>Exercices</i>	132
	<i>Solutions</i>	135

8	Courbe paramétrée	149
8.1	Notion de courbe paramétrée plane	149
8.2	Vecteur dérivé, tangente	151
8.3	Étude en un point singulier	155
8.4	Asymptotes	161
8.5	Plan d'étude d'une courbe paramétrée plane	164
8.6	Un exemple de courbe paramétrée dans l'espace	165
	<i>Exercices</i>	166
	<i>Solutions</i>	168
9	Équations différentielles	179
9.1	Équation différentielle $y' = a(x)y$	179
9.2	Équation $y' = a(x)y + b(x)$	181
9.3	Équation $y'' + py' + qy = 0$	184
9.4	Équation $y'' + py' + qy = b(x)$	189
	<i>Exercices</i>	193
	<i>Solutions</i>	194
10	Exemples d'études de surfaces	203
10.1	Les fonctions de deux variables	203
10.2	Surface d'équation $z = f(x, y)$	204
10.3	Surface de révolution d'axe Oz	207
10.4	Dérivées partielles	209
10.5	Plans tangents à une surface	212
10.6	Extremum	214
	<i>Exercices</i>	217
	<i>Solutions</i>	220
	Index	227



Suites et fonctions

OBJECTIFS

Dans ce chapitre, nous rappelons les propriétés de la limite, des fonctions continues et des fonctions dérivables.

Nous revenons aussi sur les fonctions sinus, cosinus, tangente et nous présentons les fonctions trigonométriques réciproques. Enfin, nous introduisons et étudions les fonctions hyperboliques.

1.1 DES THÉORÈMES GÉNÉRAUX

1.1.1 Limites, fonctions continues

Définition : limite d'une suite

- Soit (u_n) une suite de nombres et soit ℓ un nombre réel ou complexe. On dit que *la suite (u_n) a pour limite ℓ* , ou que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$, si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier N tel qu'on ait l'implication

$$n \geq N \implies u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon].$$

Cela se note $\lim u_n = \ell$.

On a l'équivalence : $\lim u_n = \ell \iff \lim |u_n - \ell| = 0$.

- Une suite est *convergente* si elle a une limite.

Définition : limite d'une fonction, fonction continue

- Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Soit a un élément de D ou une borne de D . On dit que *$f(x)$ tend vers le nombre réel ℓ quand x tend vers a* , ou que *la fonction f a pour limite ℓ en a* , si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un nombre $\alpha > 0$ tel qu'on ait l'implication

$$x \in D \text{ et } x \in [a - \alpha, a + \alpha] \implies f(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon].$$

Cela se note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

- On dit que f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est continue si pour tout $a \in D$, f est continue en a .

Propriétés des limites

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$, alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = \ell + \ell' \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \ell\ell'.$$

- Si de plus $\ell' \neq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = \ell/\ell'$.
- On a les mêmes propriétés pour les limites de suites.

Fonctions continues et limites

- a) Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- b) La somme et le produit de deux fonctions continues est continue.
Si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$, alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ est continue en a .
- c) Si f et g sont des fonctions continues et si la fonction composée $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ est définie, alors $g \circ f$ est continue.
- d) Soit (u_n) une suite et f une fonction telle que la suite $(f(u_n))$ est définie. Si $\lim u_n = \ell$ et si f est continue en ℓ , alors $\lim f(u_n) = f(\ell)$.

1.1.2 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires. Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $a, b \in I$. Pour tout nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un nombre c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Le nombre c est une solution de l'équation $f(x) = k$. Pour trouver une valeur approchée de c , on peut pratiquer la « méthode du partage en deux » qui permet d'ailleurs de démontrer le théorème.

Méthode du partage en deux. Pratiquons-la sur un exemple en cherchant une solution de l'équation $x^3 - x - 1 = 0$.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3 - x - 1$. C'est une fonction polynôme, donc elle est continue. On a

$$f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0 \quad \text{et} \quad f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 5 > 0$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un nombre $c \in [1, 2]$ tel que $f(c) = 0$: ce nombre c est une solution de l'équation $f(x) = 0$. Le milieu du segment $[1, 2]$ est $3/2$. Comme on a

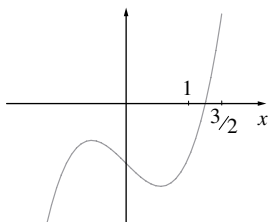
$$f(1) < 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{8} > 0$$

on en déduit de même que l'équation $f(x) = 0$ a une solution dans le segment $[1, 3/2]$.

Poursuivons : le milieu du segment $[1, 3/2]$ est $5/4$ et l'on a

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{19}{64} < 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{3}{2}\right) > 0$$

L'équation $f(x) = 0$ a donc une solution dans le segment $[5/4, 3/2] = [1, 25; 1, 5]$. En continuant de cette manière, on obtient des valeurs de plus en plus précises pour une solution de l'équation.



Courbe de la fonction $f : x \mapsto x^3 - x - 1$

Théorème de l'extremum. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f a un maximum et un minimum, c'est-à-dire qu'il existe des nombres $u, v \in [a, b]$ tels que

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

Principe de la démonstration. On commence par montrer que f est majorée en raisonnant par l'absurde (la définition d'une fonction majorée se trouve page 4). Supposons f non majorée, c'est-à-dire qu'il y a des valeurs de f aussi grandes qu'on veut. Soit m le milieu de $[a, b]$. Il y a au moins un des deux intervalles $[a, m]$ ou $[m, b]$ sur lequel f n'est pas majorée (sinon elle serait majorée sur leur réunion $[a, b]$) : notons $I_1 = [a_1, b_1]$ cet intervalle. On considère la fonction f sur I_1 et l'on recommence : on coupe I_1 en deux, etc. On obtient ainsi des intervalles emboîtés $I_1, I_2, \dots$ de plus en plus petits, donc leurs bornes a_n et b_n tendent vers un nombre $c \in [a, b]$. Par construction, f n'est pas majorée sur