MATEMÁTICA FINANCEIRA

COMPLETA

Novidade: uma parte introdutória de

MATEMÁTICA COMERCIAL

Solução dos exercícios pelo método algébrico e pela calculadora HP 12c



Professor **George Hessel**

PREFÁCIO

O presente trabalho tem como objetivo principal, oferecer ao leitor conhecimento avançado sobre o tema **Matemática Financeira** completa, contendo, portanto, a abordagem de todos os conteúdos, inclusive com o tema introdutório de **Matemática Comercial.**

No seu desenvolvimento foi adotado o critério de aplicação de um exercício criteriosamente selecionado para cada conteúdo, sendo que cada exercício dispõe simultaneamente das soluções por fórmulas, e no fim de cada exercício a solução pela calculadora HP 12c, para que o aluno, além de conferir se os resultados obtidos no cálculo estão corretos, também adquirem o próprio conhecimento do seu manuseio.

O leitor após entender cada exercício de cada conteúdo, terá todas as condições de resolver quaisquer exercícios sem grandes dificuldades, pois somente haverá alternância das incógnitas, o que implicará somente na diferenciação do cálculo matemático, e desde que seja obedecido todos os passos estabelecidos no capítulo introdução.

Este trabalho foi minuciosamente construído com aplicações de técnicas modernas para que o leitor possa solucionar quaisquer exercícios de forma prática e com extrema facilidade, sendo a mais interessante no que diz respeito à Matemática Financeira e especificamente ao conteúdo mais amplo e complexo que trata de ”**juros simples e compostos”**, com a utilização de uma fórmula geral e simplificada que substitui várias outras fórmulas tradicionais, e que ainda diminui consideravelmente o grau de dificuldade do entendimento, e do próprio desenvolvimento das questões. Quanto ao conteúdo “**taxas de juros**” também são aplicadas fórmulas modernas e inéditas, facilitando o desenvolvimento das questões mais complexas. Somente nos conteúdos “**Descontos**” e “**Amortização**” as fórmulas tradicionais devem ser mantidas.

Antes de entrar diretamente nos conteúdos com o desenvolvimento dos exercícios, apresentamos inicialmente no capítulo Introdução algumas recomendações e dicas muito importantes, assim como também a apresentação de todas as fórmulas correspondentes a todos os conteúdos, tanto da matemática financeira, como também da matemática comercial.

SUMÁRIO

PREFÁCIO 2

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO 5
1.1 Recomendações Iniciais 5
1.2 Fórmulas 5
1.2.1 Matemática Comercial 5
1.2.2 Matemática Financeira 7

CAPÍTULO 2 - MATEMÁTICA COMERCIAL 11
2.1 Razão 11
2.2 Proporção 11
2.3 Regra de sociedade 12
2.3.1 diretamente proporcional 12
2.3.2 inversamente proporcional 13
2.3.3 diretamente e inversamente proporcional 14
2.4 Regra de três 15
2.4.1 Regra de três simples 15
2.4.1.1 diretamente proporcional 15
2.4.1.2 inversamente proporcional 15
2.4.2 Regra de três composta 15
2.5 Porcentagem 16
2.5.1 Porcentagem 16
2.5.2 Valor líquido 17
2.5.2.1 Redução percentual 17
2.5.2.2 Aumento percentual 17
2.5.3 Variação percentual 18
2.5.3.1 Aumento do valor 18
2.5.3.2 Redução do valor 18
2.5.4 Porcentagem do total 18
2.6 Calendário 19
2.6.1 Número de dias entre duas datas 19
2.6.2 Cálculo de uma data a partir de outra 20
2.7 Convenção 20
2.7.1 Convenção exponencial 20
2.7.2 Convenção linear 21
2.8 Taxa de juros 22
2.8.1 Taxa de juros acumulada 22
2.8.2 Taxa de juros média 22
2.8.3 Taxa de juros real 23
2.9 Coeficiente de financiamento 23
2.10 Descontos 24

CAPÍTULO 3 - MATEMÁTICA FINANCEIRA 26
3.1 Juros simples 26
3.2 Juros compostos 27

3.2.1 Montante, capital e juros 27
3.2.2 Equivalência de Capitais 27
3.2.2.1 Capital posterior 28
3.2.2.2 Capital anterior 28
3.2.3 Série de pagamentos diferentes 29
3.2.4 Série de pagamentos iguais e consecutivos 30
3.2.4.1 Pagamento postecipado 30
3.2.4.2 Pagamento antecipado 31
3.2.4.3 Pagamento com carência 32
3.3 Taxas de juros 33
3.3.1 Taxas de juros proporcionais (juros simples) 33
3.3.2 Taxas de juros equivalentes (juros compostos) 34
3.3.2.1 Capitalização igual 35
3.3.2.2 Capitalização diferente 35
3.4 Descontos 35
3.4.1 Desconto racional (por dentro) 35
3.4.1.1 simples 35
3.4.1.2 composto 36
3.4.2 Desconto comercial (por fora) 36
3.4.2.1 simples 36
3.4.2.2 composto 37
3.5 Sistemas de amortização 38
3.5.1 Sistema de amortização SAC 38
3.5.1.1 sem carência 38
3.5.1.2 com carência e sem juros 39
3.5.1.3 com carência e com juros 41
3.5.1.4 Exercício prático 42
3.5.2 Sistema de amortização Price 44
3.5.2.1 sem carência 44
3.5.2.2 com carência e sem juros 45
3.5.2.3 com carência e com juros 46
3.5.2.4 Exercício prático 48
3.5.3 Sistema de amortização americano 49
3.5.3.1 sem carência 49
3.5.3.2 com carência e sem juros 50
3.5.3.3 com carência e com juros 51

CAPÍTULO 4 – CONSIDERAÇÕES FINAIS 53
4.1 como resolver os exercícios de Matemática Financeira 53
4.2 apresentação de Vídeo 53
4.3 sobre o autor 54

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

1.1 RECOMENDAÇÕES INICIAIS:

Todas as operações com a HP, antes de iniciar cada exercício, deverá ser clicada as teclas  para fins de limpeza do registro.

No início do desenvolvimento de cada exercício, a taxa de juros "i" que é dada em porcentagem (%), deverá ser ajustada para o seu valor algébrico, isto é, deverá ser dividida por 100, para após ser aplicada no cálculo pelas fórmulas.

No início de cada exercício, se for necessário, o valor do período "n" deverá ser ajustado, de modo que sua unidade seja correspondente as unidades da taxa de juros "i".

No caso do cálculo pela HP, a taxa de juros "i" deverá ser introduzida com o seu valor em porcentagem (%).

Para o desenvolvimento de cada exercício, através do cálculo pelas fórmulas, procurar seguir a seguinte ordem:

1º) Ler o enunciado atentamente, procurando entender o que pede o exercício (obrigatório);
2º) Extrair todos os dados do enunciado (obrigatório);
3º) Ajustar o valor da taxa de juros "i" (obrigatório);
4º) Ajustar o valor do período "n" (se for necessário);
5º) Desenhar o fluxo de caixa através de um diagrama (se for necessário);
6º) Introdução das fórmulas adequadas (obrigatório);
7º) Introdução dos dados nas fórmulas (obrigatório);
8º) Cálculo matemático das equações (obrigatório).

1.2. FÓRMULAS

1.2.1. MATEMÁTICA COMERCIAL

1.2.1.1 Razão: $\frac{a}{b} = x$

Legenda:
a, b = quantidades
x = incógnita

1.2.1.2 Proporção: $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$

Legenda:
a, b, c = quantidades
x = incógnita

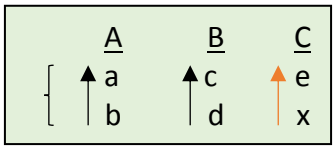
1.2.1.3 Regra de três Simples:

A	B
a	c
b	x

$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$

Legenda:
a, b = quantidades de A
c, x = quantidades de B
x = incógnita
A, B = unidades

1.2.1.4. Regra de três composta:



$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{e}{x}$$

Legenda:
a, b = quantidades de A
c, d = quantidades de B
e, x = quantidades de C
x = incógnita
A, B, C = unidades

1.2.1.5 Regra de sociedade:

$$L_1 + L_2 = L$$

$$\frac{L_1}{d_1 \times \frac{1}{i_1}} = \frac{L_2}{d_2 \times \frac{1}{i_2}} = \frac{L}{d_1 \times \frac{1}{i_1} + d_2 \times \frac{1}{i_2}}$$

Legenda:
L_1 = Parte de um sócio A
L_2 = Parte de um sócio B
L = Parte total dos sócios
d = variável diretamente proporcional
i = variável inversamente proporcional

1.2.1.6 Porcentagem:

$$V_f = V_i \pm i \times V_i$$

Legenda:
V_f = valor final
V_i = valor inicial
i = taxa de juros

1.2.1.7 Convenção exponencial:

$$M = C \times (1+i)^n$$

$$M = C + J$$

Legenda
n = período
M = montante
C = capital
i = taxa de juros
J = juros

1.2.1.8 Convenção linear:

$$M = C \times (1+i)^{n_1} \times (1+ i \times n_2)$$

$$M = C + J$$

n_1 = valor inteiro
n_2 = valor decimal

$$n = n_1 + n_2$$

Legenda
n = período
M = montante
C = capital
i = taxa de juros
J = juros

1.2.1.9 Taxa de juros acumulada:

$$i_{ac} = \left[(1+i_1) \times (1+i_2) + \ldots \right] - 1$$

Legenda:
i_{ac} = taxa de juros acumulada
i_m = taxa de juros média
i_r = taxa de juros real (efetiva)
i_I = taxa de juros da Inflação

1.2.1.10 Taxa de juros média:

$$i_m = \left[\sqrt[n]{1 + i_{ac}} \right] - 1$$

Legenda:
i_{ac} = taxa de juros acumulada
i_m = taxa de juros média
i_r = taxa de juros real (efetiva)
i_I = taxa de juros da Inflação

1.2.1.11 Taxa de juros real:

$$i_r = \left[\frac{1+ i_{ac}}{1+ i_I} \right] - 1$$

Legenda:
i_{ac} = taxa de juros acumulada
i_m = taxa de juros média
i_r = taxa de juros real (efetiva)
i_I = taxa de juros da Inflação

1.2.1.12 Coeficiente de financiamento:

$P_i = V_i$ x CF

$$CF = \frac{i}{1-\frac{1}{(1+i)^n}}$$

Legenda:
n = nº períodos
P_i = valores das prestações (iguais)
V_i = Valor inicial
CF = coeficiente de financiamento
i = taxa de juros

1.2.1.13 Desconto racional simples:

$$D_R = \frac{T\ x\ i\ x\ n}{1+\ i\ x\ n}$$

D_R = T - T_L

Legenda:
T = título nominal
VR = valor de resgate
D_C = desconto comercial
D_T = desconto total
i_{IOF} = taxa de juros do IOF
i_C = taxa de juros comercial
i_E = taxa de juros efetiva
IOF = Valor total do IOF
TA = valor total da TA
i_A = taxa de juros Administração
D_R = desconto racional
n = nº de períodos

1.2.1.14 Desconto comercial simples:

$D_T = D_C$ + IOF + TA

D_T = T - VR

D_C = T x i_C x n

IOF = i_{IOF} x T x n

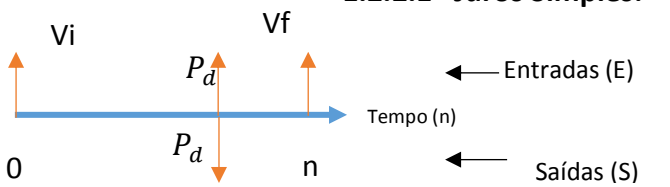
TA = i_A x T

$$i_E = \frac{D_T}{VR}$$

1.2.2. MATEMÁTICA FINANCEIRA:

Legenda:
M = Vf = montante (valor final)
C = Vi = capital (valor inicial)
J = juros (rendimentos)
P_d = pagamentos diferentes
P_i= pagamentos iguais
∑E = somatório das entradas
∑S = somatório das saídas
n = períodos
i = taxa de juros

1.2.2.1 Juros Simples:



∑ E = ∑ S

J = M - C

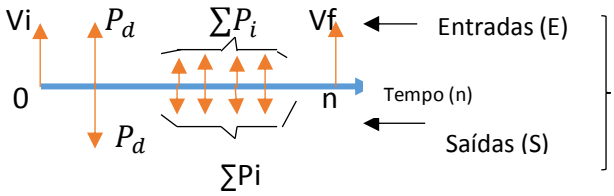
Valores diversos: (P_d; Vi; Vf)

Deslocamento p/ à esquerda →

$$\frac{P_d}{(1+\ i.n)} \qquad \frac{V_i}{(1+\ i.n)} \qquad \frac{V_f}{(1+\ i.n)}$$

O "n" nestas fórmulas é a distância do P_d , Vi, Vf, até o ponto de referência 0(zero).

1.2.2.2 Juros compostos:



∑ E = ∑ S

J = M - C

Valores diversos: (P_d; Vi; Vf) — Deslocamento p/ à esquerda →

$$\frac{P_d}{(1+i)^n} \qquad \frac{V_i}{(1+i)^n} \qquad \frac{V_f}{(1+i)^n}$$

O "n" nestas fórmulas é a distância do P_d , Vi, Vf, até o ponto de referência 0 (zero).

Pagamentos iguais = (P_i) → Deslocamento p/ à esquerda →

$$\sum P_i = P_i \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \, x \, i}\right]$$

O "n" nestas fórmulas é o n total de períodos.

Observações:

Todos os valores diversos (P_d, Vi, Vf) e os pagamentos iguais (P_i) devem ser direcionados para um mesmo tempo anterior "n" de referência, preferencialmente para o tempo "0" (zero).

O tempo "n" de referência escolhido, deve estar sempre localizado em 1 (um) período antes do início dos pagamentos iguais (P_i).

As Entradas (E) devem ser representadas com setas para cima no diagrama do fluxo de caixa.
As Saídas (S) devem ser representadas com setas para baixo no diagrama do fluxo de caixa.

1.2.2.3 Taxas de juros simples proporcionais:

$i_{N_1} \longrightarrow i_{N_2}$ $\quad i_{N_1} \times f_{N_1} = i_{N_2} \times f_{N_2}$

1.2.2.4 Taxas de juros compostos equivalentes:
(Mesma capitalização)

$i_{N_1} \longrightarrow i_{N_2}$ $\quad (1 + i_{N1})^{f_{N1}} = (1 + i_{N2})^{f_{N2}}$

Legenda:
i_E = taxa de juros efetiva (real)
i_C = taxa de juros capitalizada
i_N = taxa de juros nominal
f_E = frequência anual da i_E
f_C = frequência anual da i_C
f_N = frequência anual da i_N

1.2.2.5 Taxas de juros Nominal e Efetiva
(Capitalização diferente)

$i_N \longrightarrow i_C$ $\quad i_N \times f_N = i_C \times f_C$

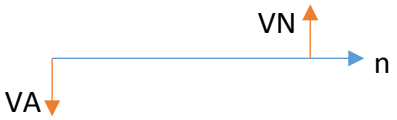
$i_C \longrightarrow i_E$ $\quad (1 + i_C)^{f_C} = (1 + i_E)^{f_E}$

f_d = frequência diária..... = 360
f_m = frequência mensal ..... = 12
f_b = frequência bimestral ..... = 6
f_t = frequência trimestrall ..... = 4
f_q = frequência quadrimestral = 3
f_s = frequência semestral ..... = 2
f_a = frequência anual ..... = 1

Observações:

f = frequência = quantidade de vezes que um determinado período tem durante um ano.

1.2.2.6 Desconto racional simples:



Racional = por dentro
Comercial = por fora

$VN = VA \times (1 + i \times n)$

$DRS = VN - VA$

1.2.2.7 Desconto racional composto:

$VN = VA \times (1 + i)^n$

$DRC = VN - VA$

1.2.2.8 Desconto comercial simples:

$VA = VN \times (1 - i \times n)$

$DCS = VN - VA$

1.2.2.9 Desconto comercial composto:

$VA = VN \times (1 - i)^n$

$DCC = VN - VA$

Legenda:
DRS = desconto racional simples
DCS = desconto comercial simples
DRC = desconto racional composto
DCC = desconto comercial composto
VN = valor nominal do título
VA = valor atual do título (valor presente)
n = nº de períodos
i = taxa de juros ou de desconto

Observações:

VA = valor atual do título (valor presente)
É o valor do título na data definida antes da data de seu vencimento.
VN = valor nominal do título.
É o valor do título na data de seu vencimento.
Desconto Racional: VN e VA são capitais equivalentes.
A taxa de desconto é a taxa de juros.
Desconto Comercial: VN e VA não são capitais equivalentes.
A taxa de desconto não é a taxa de juros.

1.2.2.10 Sistema de Amortização Price: (P = P_i = cte)

$V_i = \sum P_i$

$\sum P_i = P_i \times \left[\frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^p \times i} \right]$

$J_n = SD_{n-1} \times i$

$m_n = P_i - J_n$

$SD_n = SD_{n-1} - m_n$

$SD_n = V_i - \sum m_n$

$m_n = m_1 \times (1 + i)^{n-1}$

$\sum m_n = m_1 \times s$

$s = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

$\sum P_{i_n} = n \times P_i$

$\sum P_{i_n} = \sum J_n + \sum m_n$

Legenda:
V_f = valor final (Montante)
V_i = valor inicial (Capital)
n = nº períodos
i = taxa de juros
p = nº de pagamentos
SD = saldo devedor
J = juros
m = amortização
P_i = pagamentos iguais
S = coeficiente de amortização

1.2.2.11 Sistema de Amortização SAC (m = cte):

$m = \frac{V_i}{n}$ $\quad J_n = SD_{n-1} \times i$ $\quad P_n = J_n + m$ $\quad SD_n = SD_{n-1} - m$

$\sum m_n = m \times n$ $\quad SD_n = V_i - \sum m_n$ $\quad P_n = P_1 + (n-1) \times (-m \times i)$

Legenda:
V_f = valor final (Montante)
V_i = valor inicial (Capital)
n = nº períodos
i = taxa de juros
p = nº de pagamentos
SD = saldo devedor
J = juros
m = amortização
s = coeficiente de amortização
P = valor do pagamento

1.2.2.12 Sistema de Amortização Americano:

(m=0; P=cte; J=cte; SD=cte)

$J_n = SD_{n-1} \times i$ $\quad P_n = J_n$

Legenda:
SD = saldo devedor
J = juros
P = pagamento
i = taxa de juros