

Aurélien Poiret | Éliane Gayout

MATHS

**SUJETS PORTANT SUR
LE PROGRAMME DE 1^{re} ANNÉE**

MPSI-MP2I-PCSI-PTSI

ANNALES CORRIGÉES

l'intel

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

Retrouvez nos ouvrages pour les prépas scientifiques ici



<http://dunod.link/prepassc>

Avant-propos

Cet ouvrage regroupe une sélection d'extraits de sujets des écrits de concours suivants : Banque PT, Centrale-Supélec, Concours commun INP (CCINP), Concours national marocain (CNM), ENAC, EPITA, e3a-Polytech, Mines-Ponts et Polytechnique-Écoles normales supérieures (X-ENS).

Nous avons également inclus des sujets de devoirs donnés dans la classe de MPSI du lycée Jeanne d'Albret de Saint-Germain-en-Laye. Cela permet d'avoir des sujets plus longs, car un sujet de concours en mathématiques porte très rarement uniquement sur le programme de première année. De plus, ce sont des sujets originaux, dont tout ou partie pourrait figurer un jour dans un sujet de concours.

Tous les sujets proposés sont récents (2020-2024) et conformes aux programmes actuels. La plupart sont accessibles aux élèves de MPSI, MP2I, PCSI et PTSI. Cependant, certains sujets ou certaines questions s'adressent plus particulièrement aux élèves de MPSI et MP2I et nous les signalons par la lettre (M).

Le chapitre sur les espaces préhilbertiens réels n'est pas au programme de PTSI, mais seulement de PT.

Nous avons rédigé cet ouvrage pour trois raisons principales.

— La première est de permettre aux étudiants de première année de classe préparatoire de réviser chaque chapitre du cours avec des sujets effectivement tombés aux concours. Trop souvent, les étudiants pensent qu'il faut attendre la deuxième année pour pouvoir faire un vrai sujet de concours, mais ce n'est pas le cas. Au contraire, commencer à faire ces sujets dès le début de la formation est important : les révisions sont alors plus concrètes et plus motivantes. À noter cependant que, en mathématiques, il est difficile de se cantonner à un seul domaine dans un énoncé. Il faudra alors faire appel à différents chapitres pour résoudre certains exercices.

— La deuxième est aussi d'accompagner les étudiants de deuxième année dans leurs révisions.

— La troisième est de permettre aux étudiants, dès la première année, de repérer les attentes des divers concours, chacun d'entre eux étant différent sur la forme (questions plus ou moins guidées, plus ou moins longues, etc.). Il est bon de repérer ces particularités dès le début de la formation pour une meilleure préparation. L'intitulé « Problème » signale un sujet plus long qui se traite au minimum en 3 ou 4 heures.

Les sujets proposés ont été regroupés selon les chapitres conformes au programme de première année de classe préparatoire. Ils sont de longueurs et de difficultés très variées. Lorsqu'ils ont été modifiés, nous l'avons indiqué par une astérisque (*). Chaque sujet est suivi d'une proposition de corrigé, dans laquelle nous avons parfois intégré des extraits de rapports de jury. Ces rapports sont importants à lire car ils ciblent les difficultés classiques retrouvées dans les copies de concours. Ils mettent en avant les éléments fondamentaux à retenir ainsi que les erreurs à éviter.

Nous tenons à remercier notre collègue et ami Gilles Borenstein pour sa relecture attentive de certains chapitres, ainsi que pour les discussions enrichissantes que nous avons eues, qui ont permis d'améliorer le contenu de cet ouvrage.

Nous remercions également notre collègue Bruno Winckler pour l'autorisation qu'il nous a donnée d'utiliser ses codes source Latex pour le tracé de certains graphiques.

Enfin, un grand merci à nos conjoints qui nous ont encouragés et soutenus dans ce projet.

Table des matières

Algèbre et Probabilités

1	Trigonométrie, ensembles et calcul algébrique	8
1.1	Calcul de deux sommes	8
1.2	Mots bien parenthésés (Centrale 2021)	9
1.3	Une somme avec des coefficients binomiaux	10
1.4	Une curieuse inégalité	11
1.5	Une équation fonctionnelle (Banque PT 2020)	14
1.6	Problème : notion de tribu	16
2	Nombres complexes	24
2.1	Somme et produit des racines n -ièmes de l'unité (e3a 2022)	24
2.2	Développement d'une fonction en série trigonométrique (CNM 2022)	25
2.3	Un peu de géométrie	27
2.4	Problème : formule de Héron et inégalités isopérimétriques (M)	29
3	Arithmétique et groupe cyclique	47
3.1	Permutations conjuguées (M) (Centrale 2020)	47
3.2	Quaternions (M) (X-ENS 2023)	49
3.3	Problème : fonctions arithmétiques multiplicatives $(*)$ (M) (Centrale 2020)	52
3.4	Problème : une divisibilité compliquée à établir (M)	59
4	Espaces vectoriels	64
4.1	Applications linéaires sur un espace de suites (e3a 2020)	64
4.2	Applications linéaires sur un espace de polynômes (e3a 2021)	67
4.3	Applications linéaires sur un espace de fonctions $(*)$ (CCINP 2020)	69
4.4	Noyaux itérés $(*)$ (CNM 2024)	72
4.5	Projecteurs $(*)$ (EPITA 2021)	75
4.6	Problème : formes linéaires	77

5 Matrices	84
5.1 : Endomorphismes tels que $u^2 - 3u + 2\text{id}_E = 0$ (*) (e3a 2023)	84
5.2 : Suites et matrices (*) (CNM 2022)	85
5.3 : Un espace vectoriel de matrices (e3a 2020)	87
5.4 : Racines cubiques d'une matrice (*) (CCINP 2024)	88
5.5 : Matrices nilpotentes (*) (Centrale 2022)	90
5.6 : Matrices équitables (e3a 2024)	91
5.7 : Déterminant de Vandermonde (M) (CCINP 2022)	94
5.8 : Problème : recherche d'hyperplans stables par produit matriciel (*) (CNM 2020)	97
6 Probabilités	104
6.1 : Appareils défectueux (Banque PT 2021)	104
6.2 : Matrices et loi binomiale (*) (e3a 2024)	106
6.3 : Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ (*) (CCINP 2023)	107
6.4 : Urnes de Polya (CCINP 2023)	111
6.5 : Tirages successifs avec remise (*) (CCINP 2024)	116
6.6 : Un couple de variables aléatoires (*) (e3a 2023)	118
6.7 : Jouons au golf (*) (Banque PT 2022)	120
6.8 : Problème : paradoxe de Penney	125
7 Espaces préhilbertiens réels	133
7.1 : Construction d'une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (CNM 2022)	133
7.2 : Un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ (e3a 2020)	136
7.3 : Un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ (e3a 2020)	138
7.4 : Un endomorphisme qui conserve le produit scalaire (e3a 2023)	141
7.5 : Déterminant de Gram et p -volume (M) (*) (X-ENS 2022)	143
7.6 : Problème : formes symplectiques (Centrale 2022)	148

Analyse

8 Suites	154
8.1 : Formule de Stirling (Mines-Ponts 2020)	154
8.2 : Deux suites récurrentes (*) (e3a 2021)	155
8.3 : Une suite récurrente (CCINP 2024)	156
8.4 : Un résultat asymptotique (*) (Mines-Ponts 2020)	159
8.5 : Problème : le théorème de Lamé	162
9 Polynômes	167
9.1 : Polynômes d'Hermite (Centrale 2024)	167
9.2 : Polynômes de Laguerre (Centrale 2021)	168
9.3 : Polynômes de Tchebychev (Centrale 2022)	170

9.4 : Étude d'une suite de polynômes (CNM 2022)	173
10 Dérivation	177
10.1 : Une inégalité (CNM 2022)	177
10.2 : Inégalités d'interpolation des dérivées (*) (Centrale 2022)	178
10.3 : Fonctions de Lambert (*) (Centrale 2020)	181
10.4 : Problème : fonctions absolument monotones	185
11 Équations différentielles	195
11.1 : Une équation différentielle du premier ordre (e3a 2023)	195
11.2 : Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (*) (Banque PT 2024)	195
11.3 : Problème : une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients non constants	199
11.4 : Solutions périodiques d'une équation différentielle (*) (X-ENS 2024)	203
12 Intégration	207
12.1 : Une comparaison série-intégrale (Mines-Ponts 2020)	207
12.2 : Un équivalent d'une intégrale (*) (Mines-Ponts 2020)	208
12.3 : Convergence d'une suite (CCINP 2022)	209
12.4 : Une inégalité	213
12.5 : Étude de la somme d'une série (*) (EPITA 2022)	214
13 Fonctions de deux variables	219
13.1 : Un problème d'extremum (*) (CCINP 2023)	219
13.2 : Un extremum global (*) (CNM 2023)	220
13.3 : Un autre extremum global (CCINP 2021)	221
13.4 : Étude de points critiques (CCINP 2021)	222
14 Séries	224
14.1 : Série harmonique (Centrale 2024)	224
14.2 : Un calcul de $\zeta(2)$ (Mines-Ponts 2023)	226
14.3 : Produit infini (*) (ENAC 2024)	228
14.4 : Étude de sommes doubles (M) (Centrale 2023)	232
14.5 : Problème : la somme des entiers vaut-elle réellement $-1/12$?	236
15 Révisions générales	251
15.1 : Problème : moyenne arithmético-géométrique de deux réels positifs	251
15.2 : Problème : marche aléatoire sur un damier	260
15.3 : Problème : il existe deux points sur Terre diamétralement opposés qui ont même température et même pression (M)	267
15.4 : Problème : permutations et probabilités (M) (*) (X-ENS 2024)	279

Partie 1

Algèbre et Probabilités

Trigonométrie, ensembles et calcul algébrique

Exercice 1.1 : Calcul de deux sommes

1. Pour $n \geq 1$, calculer $T_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right)$.
2. a. Développer $(1+k+k^2)^2$.
- b. Pour $n \geq 1$, calculer $S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$.

1. Par linéarité de la somme, on a :

$$T_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1-k}.$$

En réalisant le changement d'indice à rebours $i = n+1-k$ dans la seconde somme, on obtient :

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 0.$$

2. a. Pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$(1+k+k^2)^2 = 1 + k^2 + k^4 + 2k + 2k^2 + 2k^3 = k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1.$$

b. On en déduit :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} &= \frac{k^2(k+1)^2 + (k+1)^2 + k^2}{k^2(k+1)^2} \\ &= \frac{k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k^2 + k + 1)^2}{k^2(k+1)^2}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)} \geq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k(k+1)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = n + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right). \end{aligned}$$

Par télescopage, on en déduit que : $S_n = n + 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n(n+2)}{n+1}$.

Exercice 1.2 : Mots bien parenthésés (Centrale 2021)

On s'intéresse à des chaînes de caractères constituées uniquement des deux caractères : parenthèse ouvrante et parenthèse fermante. On dit qu'un mot est *bien parenthésé* s'il commence par une parenthèse ouvrante et qu'à toute parenthèse ouvrante est associée une (unique) parenthèse fermante *qui lui est postérieure*. Par exemple le mot

() (())

est bien parenthésé. En revanche, le mot

()) ()

n'est pas bien parenthésé. Un mot bien parenthésé est ainsi forcément constitué d'un nombre pair de caractères ; chaque parenthèse qui s'ouvre doit se refermer. Pour tout entier $n \geq 1$, on note C_n le nombre de mots bien parenthésés de longueur $2n$. On pose, par commodité, $C_0 = 1$.

1. En énumérant les différents mots bien parenthésés de longueur 2, 4 et 6, montrer que $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ et déterminer C_3 .
2. Montrer que, pour tout entier naturel n : $C_n \leq 2^{2n}$.
3. Montrer par un raisonnement combinatoire que, pour tout entier $k \geq 1$:

$$C_k = \sum_{i=0}^{k-1} C_i C_{k-i-1}.$$

1. Le seul mot bien parenthésé de longueur 2 est : (). Donc $C_1 = 1$.
 Les mots bien parenthésés de longueur 4 sont : () () et (()). Donc $C_2 = 2$.
 Les mots bien parenthésés de longueur 6 sont : () () () , () (()) , (()) () , (() ()) et ((())) .
 Donc $C_3 = 5$.

2. Le nombre total de mots formés avec seulement des parenthèses ouvrantes ou fermantes est égal à 2^{2n} puisque ces mots comportent $2n$ caractères dont chacun est soit une parenthèse ouvrante, soit une parenthèse fermante. Parmi tous ces mots, il y a ceux bien parenthésés. Donc $C_n \leq 2^{2n}$.

3. Un mot bien parenthésé de longueur $2k$ peut s'écrire $m_1(m_2)$ où m_1 est un mot bien parenthésé de longueur $2i$ avec i variant de 0 à $k-1$ et m_2 est un mot bien parenthésé de longueur $2k-2i-2$ (puisque l'on a déjà deux parenthèses autour de m_2). On a C_i mots bien parenthésés de longueur $2i$ et C_{k-i-1} mots bien parenthésés de longueur $2k-2i-2$. Il y a donc $C_i \times C_{k-i-1}$ mots bien parenthésés de longueur $2k$ dont la première partie est un mot bien parenthésé de longueur $2i$. Puis :

$$C_k = \sum_{i=0}^{k-1} C_i \times C_{k-i-1}.$$

Exercice 1.3 : Une somme avec des coefficients binomiaux

L'objectif de cet exercice est de déterminer la valeur de $S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2^k} \binom{k}{n}$.

1. Calculer S_0 , S_1 et S_2 . Conjecturer la valeur de S_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{n+k}} \binom{k+n}{k}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\binom{2n+2}{n+1} = 2 \binom{2n+1}{n+1}$.

En déduire que : $S_{n+1} = \frac{1}{2} S_n + \frac{1}{2} S_{n+1}$.

4. Conclure.

1. On a : $S_0 = 1$, $S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 2 = 1$ et $S_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times 3 + \frac{1}{16} \times 6 = 1$.
On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le changement d'indice $i = k - n$ donne :

$$S_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^{i+n}} \binom{i+n}{n} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^{i+n}} \binom{i+n}{i}$$

par la propriété d'invariance des coefficients binomiaux.

L'indice de sommation étant muet, on a bien : $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{n+k}} \binom{k+n}{k}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = 2(n+1) \frac{(2n+1)!}{(n+1)!^2} = 2 \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} = 2 \binom{2n+1}{n+1}.$$

La relation de Pascal donne :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^{n+1+k}} \binom{k+n+1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^{n+1+k}} \binom{k+n}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^{n+1+k}} \binom{k+n}{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^{n+1+k}} \binom{k+n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^{n+1+k}} \binom{k+n}{k-1} \end{aligned}$$

car le terme de la deuxième somme est nul si $k = 0$.

Le changement d'indice $i = k - 1$ dans la seconde somme donne :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{1}{2^{2n+2}} \binom{2n+1}{n+1} + \frac{1}{2} S_n + \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^{n+2+i}} \binom{i+1+n}{i} \\ &= \frac{1}{2^{2n+2}} \binom{2n+1}{n+1} + \frac{1}{2} S_n + \frac{1}{2} S_{n+1} - \frac{1}{2^{2n+3}} \binom{2n+2}{n+1} \\ &= \frac{1}{2} S_n + \frac{1}{2} S_{n+1} \end{aligned}$$

en utilisant le résultat établi en début de question.

On en déduit que : $S_{n+1} = \frac{1}{2} S_n + \frac{1}{2} S_{n+1}$.

4. En vertu de la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_{n+1} = S_n$.

La suite (S_n) est donc constante. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = S_0 = 1$.

Exercice 1.4 : Une curieuse inégalité

Dans cet exercice, p et q désignent deux entiers naturels tels que $q \geq p$. L'objectif est de démontrer, par trois méthodes, l'inégalité :

$$\frac{q!}{p!} \leq \left(\frac{q+p+1}{2} \right)^{q-p}.$$

1. *Première méthode*

a. En utilisant la propriété de concavité de la fonction $\ln$, montrer que :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*, \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

b. En déduire l'inégalité désirée.

2. *Deuxième méthode*

a. Montrer que, pour tout réel $a \geq 0$:

$$\forall x \in [0, a], \quad x(a-x) \leq \frac{a^2}{4}.$$

b. En observant que : $\prod_{i=p+1}^q i = \prod_{i=p+1}^q (q + p + 1 - i)$, prouver l'inégalité désirée.

3. Troisième méthode

Démontrer l'inégalité par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$.

1. a. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme la fonction $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque sa dérivée y est décroissante, par l'inégalité de Jensen, on a :

$$\ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i) = \ln \left(\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \right).$$

Puis, comme $\exp$ est croissante, on en déduit que :

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Cette inégalité, nommée inégalité *arithmético-géométrique*, signifie que la moyenne géométrique est toujours inférieure à la moyenne arithmétique.

b. Si $p = q$ alors l'inégalité est claire.

Si $p < q$, prenons : $n = q - p$, $x_1 = p + 1, \dots, x_{q-p} = q$. L'inégalité arithmético-géométrique permet d'obtenir :

$$\sqrt[q-p]{(p+1) \times \dots \times q} \leq \frac{(p+1) + \dots + q}{q-p},$$

c'est-à-dire :

$$\left(\frac{q!}{p!} \right)^{1/(q-p)} \leq (q-p) \times \frac{q+p+1}{2} \times \frac{1}{q-p},$$

soit

$$\frac{q!}{p!} \leq \left(\frac{q+p+1}{2} \right)^{q-p}$$

puisque $x \mapsto x^{(q-p)}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. a. Soient $a \geq 0$ et $0 \leq x \leq a$.

On a :

$$\frac{a^2}{4} - x(a-x) = \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \geq 0.$$

Ainsi, $\forall x \in [0, a]$, $x(a-x) \leq \frac{a^2}{4}$.

b. Le changement d'indice à rebours $j = q + p + 1 - i$ permet de légitimer l'égalité :

$$\prod_{i=p+1}^q i = \prod_{i=p+1}^q (q + p + 1 - i).$$

Ainsi, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
 \frac{q!}{p!} &= \prod_{i=p+1}^q i = \sqrt{\prod_{i=p+1}^q i \times \prod_{i=p+1}^q i} = \sqrt{\prod_{i=p+1}^q i \times \prod_{i=p+1}^q (q+p+1-i)} \\
 &= \sqrt{\prod_{i=p+1}^q i \times (q+p+1-i)} \\
 &\leq \sqrt{\prod_{i=p+1}^q \frac{(q+p+1)^2}{4}} = \left(\frac{q+p+1}{2}\right)^{q-p}.
 \end{aligned}$$

3. Pour $q \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}_q : \ll \forall p \in \llbracket 0, q \rrbracket, \frac{q!}{p!} \leq \left(\frac{q+p+1}{2}\right)^{q-p} \gg$.

Si $q = 0$, nécessairement, $p = 0$ et l'inégalité est évidente. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Supposons $\mathcal{P}_q$ vraie pour un entier naturel q .

On souhaite montrer que $\mathcal{P}_{q+1}$ est vraie, à savoir que :

$$\forall p \in \llbracket 0, q+1 \rrbracket, \frac{(q+1)!}{p!} \leq \left(\frac{q+p+2}{2}\right)^{q+1-p}.$$

Si $p = q+1$, on a : $\frac{(q+1)!}{p!} = 1$ et $\left(\frac{q+p+2}{2}\right)^{q+1-p} = 1$ puisque $q+1-p = 0$.

Donc l'inégalité est vérifiée.

Si $p = q$, on a : $\frac{(q+1)!}{p!} = q+1$ et $\left(\frac{q+p+2}{2}\right)^{q+1-p} = q+1$, donc l'inégalité est également vérifiée.

Supposons $p \leq q-1$. Alors $p+1 \leq q$ et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, qui donne :

$$\frac{q!}{(p+1)!} \leq \left(\frac{q+p+2}{2}\right)^{q-p-1}.$$

Puis, en multipliant cette inégalité par $(q+1)(p+1)$, on obtient :

$$\frac{(q+1)!}{p!} \leq (q+1)(p+1) \times \left(\frac{q+p+2}{2}\right)^{q-p-1}.$$

Il reste donc à prouver que : $(q+1)(p+1) \leq \left(\frac{q+p+2}{2}\right)^2$.

On peut tout développer et, en travaillant par équivalence, aboutir à l'inégalité $(p-q)^2 \geq 0$ qui est toujours vraie.

On peut également utiliser la question 2.a en posant : $x = p+1$ et $a = p+q+2$.

On a alors : $x(a-x) = (p+1)(q+1) \leq \frac{a^2}{4} = \left(\frac{q+p+2}{2}\right)^2$.

D'où : $\frac{(q+1)!}{p!} \leq \left(\frac{q+p+2}{2}\right)^{q-p+1}$. $\mathcal{P}_{q+1}$ est vraie. Par récurrence, on a l'inégalité désirée.