ECG2

MATHS APPROFONDIES

Méthodes
Rappels de cours
Exercices et corrigés vidéo 

Lionel Magnis

ellipses

MATHS
APPROFONDIES

**Méthodes, rappels de cours,
exercices et corrigés vidéo**

ECG2

MATHS APPROFONDIES

Méthodes, rappels de cours, exercices et corrigés vidéo

Lionel Magnis

ellipses

ISBN 9782340-115736
Dépôt légal : août 2026
©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Que contient ce livre ?

Cet ouvrage est destiné aux étudiant.e.s de classe préparatoire ECG, deuxième année, option mathématiques approfondies.
Il est séparé en 26 chapitres qui couvrent l'ensemble du programme de deuxième année, de nombreux rappels de première année ainsi que quelques éléments hors-programme (indiqués comme tels) dont la maîtrise est importante pour réussir les concours.
Chaque chapitre contient :

- des résultats théoriques
- des méthodes
- des exercices
- une interro bilan
- un lien vers une vidéo qui contient des corrigés, des explications et des démonstrations. Ces éléments sont repérés dans le texte par le symbole .

Les exercices

Il y a trois types d'exercices.

- les « Entraînements » sont des exercices d'application directe d'une méthode ou d'un théorème du cours. Ils apparaissent au fil du chapitre ;
- les « Exemples » sont similaires mais plus complexes ;
- les « Exercices d'approfondissements » permettent d'aller plus loin dans la maîtrise des méthodes et la réflexion. Ils sont situés dans la dernière section du chapitre, et triés par difficulté croissante. Le symbole indique un exercice qui peut être traité rapidement.

Les corrigés

Il y a différents formats de corrigés au sein de chaque chapitre :

- les solutions des « Entraînements » sont regroupées dans une section dédiée, après l'interro bilan ;
- chaque « Exemple » est associé à un corrigé vidéo ;
- l'interro bilan est accompagnée d'un corrigé vidéo avec barème pour s'auto-évaluer ;
- les corrigés détaillés des « Exercices d'approfondissements » sont rédigés en fin de chapitre.

Remerciements

Ce cours est l'aboutissement de cinq années d'enseignement au lycée Gaston Berger de Lille.

Je remercie chaleureusement mes étudiant.e.s qui ont contribué à l'améliorer, année après année, en proposant des idées originales et en rectifiant de nombreuses erreurs.

Bien plus encore, je les remercie de m'avoir permis de travailler dans une ambiance bienveillante, sereine et rigoureuse, et d'aimer mon métier.

Cet ouvrage leur est dédié.

Table des matières

Liste des méthodes 5

Première partie : Analyse 9

Chapitre 1. Intégrales impropres 11

Chapitre 2. Séries 29

Chapitre 3. Fonctions de plusieurs variables 47

Chapitre 4. Dérivées partielles d'ordre 1 65

Chapitre 5. Dérivées partielles d'ordre 2 83

Chapitre 6. Extremums sous contrainte 101

Deuxième partie : Algèbre 121

Chapitre 7. Rappels et compléments d'algèbre linéaire 123

Chapitre 8. Diagonalisation d'une matrice carrée 141

Chapitre 9. Polynômes d'endomorphisme 167

Chapitre 10. Diagonalisation d'un endomorphisme 179

Chapitre 11. Produit scalaire 195

Chapitre 12. Matrices symétriques 213

Chapitre 13. Compléments sur l'orthogonalité 227

Chapitre 14. Endomorphismes symétriques 247

Chapitre 15. Projection orthogonale 261

Chapitre 16. Matrices et vecteurs avec Python 281

Troisième partie : Probabilités **289**

Chapitre 17. Variables aléatoires à densité **291**

Chapitre 18. Lois à densité usuelles **313**

Chapitre 19. Variables aléatoires discrètes **329**

Chapitre 20. Compléments sur les variables aléatoires discrètes **349**

Chapitre 21. Couples de variables aléatoires **363**

Chapitre 22. $n-$uplets de variables aléatoires **377**

Chapitre 23. Convergence en loi, convergence en probabilité **393**

Chapitre 24. Estimation ponctuelle **415**

Chapitre 25. Estimation par intervalle de confiance **429**

Chapitre 26. Compléments d'informatique pour les probabilités **443**

Liste des méthodes

Méthodes d'analyse **9**

1 Calcul d'intégrale impropre par primitive 11
2 Convergence d'intégrale par majoration 13
3 Convergence absolue d'une intégrale 13
4 Convergence d'une intégrale par équivalence 14
5 Divergence d'une intégrale par équivalence 14
6 Convergence d'une intégrale par négligeabilité 15
7 Intégration par parties 16
8 Changement de variable 17
9 Monotonie d'une suite d'intégrales 18
10 Limite d'une suite d'intégrales 18

11 Convergence d'une série : convergence monotone 31
12 Convergence absolue d'une série par majoration 32
13 Convergence d'une série par équivalent 33
14 Divergence d'une série par équivalent 33
15 Convergence d'une série par négligeabilité 34
16 Convergence de (u_n) par la série $\sum(u_{k+1} - u_k)$ 34
17 Convergence d'une série à signe alterné 36

18 Montrer que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est majorée 52
19 Montrer que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas majorée 52
20 Justifier que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue 54
21 Extremum évident 56
22 Extremum par composition 56

23 Calcul de dérivées partielles 66
24 Justifier que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ 67
25 Recherche de points critiques 70
26 Infinité de points critiques 71
27 Point col : par le calcul 72
28 Calcul de gradient 73

29 Calcul de dérivées partielles secondes 83
30 Calculer une matrice hessienne 85
31 Nature d'un point critique par le spectre de la matrice hessienne . . . 86
32 Condition suffisante d'extremum global 88

33 Montrer qu'un ensemble est fermé/ouvert 103
34 Montrer qu'un ensemble est borné 105
35 Existence d'extremum : bornes atteintes 105
36 Extremum : paramétrage d'une contrainte 106
37 Points critiques sous contrainte 108
38 Points critiques sous contrainte multiple 110

Méthodes d'algèbre **121**

39 Calcul de $f(x)$ par le produit AX 125
40 Endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ 127
41 Matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ 128
42 Lecture de rang image et noyau sur $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ 130

43 Base d'un sous-espace propre 146
44 Etude complète d'une matrice triangulaire 148
45 Valeurs propre d'une matrice de taille 2 149
46 Polynôme annulateur d'une matrice et valeurs propres 150
47 Trace et valeurs propres 151
48 Transfert de spectre 152

49 Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$ 168
50 Montrer que $F+G=E$ 169
51 Montrer que $E=F+G$: à partir de $\mathrm{Id}=\cdots+\cdots$ 170
52 Polynôme annulateur et automorphisme 171

53 Diagonalisation de f à partir de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ 183
54 Polynôme annulateur et valeurs propres 184
55 Polynôme annulateur et sous-espaces propres 185

56 Inégalité de Cauchy-Schwarz 196
57 Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$ 200
58 Produit scalaire : intégrale 202
59 Produit scalaire : intégrale de polynômes 203

60 Matrice diagonalisable : symétrique 214

61 Forme quadratique associée à une matrice . . . 215
62 Matrice symétrique associée à une forme quadratique . . . 217

63 Montrer que F et G sont orthogonaux . . . 227
64 Reconnaître $F^\perp$ . . . 228
65 Supplémentaires orthogonaux . . . 230
66 Dimension de F : en reconnaissant $G^\perp$ . . . 230
67 Calculs avec une famille orthogonale . . . 231
68 Décomposition dans une base orthogonale . . . 232

69 Montrer qu'un endomorphisme est symétrique : par le calcul . . . 247
70 Montrer qu'un endomorphisme est symétrique : matrice . . . 248
71 Montrer qu'un endomorphisme est symétrique : intégration par parties 249

72 Projection orthogonale sur une droite . . . 262
73 Déterminer $p_F(u)$: à partir d'une base orthogonale de F . . . 263
74 Déterminer $p_F(u)$: à partir de $p_{F^\perp}(u)$ . . . 264
75 Déterminer $p_F(u)$: à partir d'une base non-orthogonale de F . . . 265
76 Minimisation et projection orthogonale . . . 267
77 Projection orthogonale : reconnaître un problème de minimisation . . 268
78 Reconnaître un projecteur orthogonal . . . 269
79 Montrer que f est un projecteur orthogonal . . . 271

80 Matrice avec Python . . . 285

Méthodes de probabilités **289**

81 Densité de probabilité . . . 292
82 De la densité à la fonction de répartition . . . 294
83 De la fonction de répartition à une densité . . . 296
84 Espérance d'une variable aléatoire à densité . . . 297
85 Transfert d'espérance pour une variable à densité . . . 298
86 Transfert de fonction de répartition . . . 300
87 Transfert de densité . . . 301

88 Calculs avec la fonction Φ . . . 319
89 Calcul d'intégrale à l'aide de la loi normale . . . 319

90 Espérance d'une variable aléatoire finie . . . 333
91 Variable discrète : pas d'espérance . . . 333
92 Variable discrète : espérance et calcul . . . 334

93 Transfert d'espérance pour une variable discrète 335
94 Calcul de loi à partir de lois conditionnelles 336

95 Espérance totale 351
96 Espérance totale : conditionnement par une variable aléatoire 352

97 Fonction de répartition de $\max(X,Y)$ 365
98 Fonction de répartition de $\min(X,Y)$ 366
99 Densité de $X+Y$ 367

100 Fonction de répartition de $\max(X_1,\ldots,X_n)$ 379
101 Fonction de répartition de $\min(X_1,\ldots,X_n)$ 381
102 Limite $1^{+\infty}$ 382

103 Convergence en loi : $\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x)$ 394
104 Convergence en loi : suite de variables discrètes 394
105 Appliquer le théorème limite central 396
106 Calcul de limite par le théorème limite central 396
107 Opération sur la convergence en loi : multiplication 398
108 Convergence en probabilité : par Bienaymé-Tchebychev 399
109 Appliquer la loi faible des grands nombres 400
110 Opération sur la convergence en probabilité : multiplication 401
111 Opération sur la convergence en probabilité : composition 401

112 Estimateur convergent : par la loi faible des grands nombres 416
113 Trouver un estimateur sans biais 417
114 Condition suffisante d'estimateur convergent 418

115 Intervalle de confiance asymptotique 434

116 Méthode d'inversion 443
117 Monte-Carlo : valeur approchée d'une probabilité 445
118 Monte-Carlo : valeur approchée d'une espérance 446

Première partie : Analyse

Chapitre 1. Intégrales impropres

Plan du chapitre

I. Montrer qu'une intégrale impropre converge **11**
II. Transformation d'intégrales impropres **15**
III. Suite d'intégrales **17**
IV. Fonction Gamma **19**
V. Interro bilan **20**
VI. Solutions des entraînements **20**
VII. Exercices d'approfondissement **21**

Vidéo du chapitre ☞

Une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est impropre lorsqu'une des bornes est exclue de l'ensemble de définition de f (ou les deux). Si c'est possible, on définit alors cette intégrale comme limite d'intégrales sur un segment. Par exemple :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t+t^2}\ \mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{t+t^2}\ \mathrm{d}t \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$$

Si la **limite existe et est finie** on dit que l'intégrale **converge**

I. Montrer qu'une intégrale impropre converge

I.1. En la calculant

Méthode 1. Calcul d'intégrale impropre par primitive

On va justifier que l'intégrale $A = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t$ converge et la calculer.

Etape 1 : continuité de l'intégrande

La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$. L'intégrale est impropre en $+\infty$.

Etape 2 : calcul

Sous réserve de convergence :

$$A = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty} \left[\ \frac{-1}{t}\ \right]_{t=1}^{t=b} = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{-1}{b}+1\right) = \boxed{1}$$

ce qui prouve que l'intégrale A converge

Entraînement 1.1. Déterminer si les intégrales suivantes convergent en essayant de les calculer :

$$A = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t, \quad B = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \quad C = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t, \quad D = \int_0^{+\infty} \cos(t)\,\mathrm{d}t$$

Les choses ne sont pas toujours aussi simples. Comment faire lorsqu'on ne connaît pas de primitive de l'intégrande ? Il faut connaître quelques intégrales de référence et s'y ramener par comparaison (majoration, équivalence ou négligeabilité).

I.2. Intégrales convergentes de référence

En $+\infty$: les intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ avec $\alpha > 1$, exemple $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t}$

En $+\infty$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ avec $p > 0$, typiquement $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}$

En 0 : les intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ avec $\alpha < 1$, typiquement $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t}$

En $-\infty$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{|t|^\alpha}\,\mathrm{d}t$ avec $\alpha > 1$, typiquement $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t}$

En $-\infty$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}t$ avec $p > 0$, typiquement $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t}$

En $+\infty$ et $-\infty$: l'intégrale de Gauss $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}}$

I.3. Convergence par majoration

Rappel 1.2. Si on a l'inégalité $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ sur l'intervalle d'intégration, et si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Méthode 2. Convergence d'intégrale par majoration

On veut par exemple montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge.

- La fonction $t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}$ est continue sur $[0;+\infty[$. L'intégrale est impropre en $+\infty$.
- Pour tout $t \in [0;+\infty[$ on a : $0 \leqslant \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$ donc $\boxed{0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t} \leqslant \mathrm{e}^{-t}}$
- Et, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Par majoration l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Rappel 1.3. Si on a l'inégalité $|f(t)| \leqslant g(t)$ sur l'intervalle d'intégration, et si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Ceci implique que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, on dit qu'elle **converge absolument**

Méthode 3. Convergence absolue d'une intégrale

On veut par exemple montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

- La fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$. L'intégrale est impropre en $+\infty$.
- Pour tout $t \in [1;+\infty[$ on a : $|\sin(t)| \leqslant 1$ donc $\boxed{\left|\dfrac{\sin(t)}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}}$
- De plus, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Par majoration l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right|\,\mathrm{d}t$ converge. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc elle converge.

Entraînement 1.4. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

I.4. Par équivalence ou négligeabilité

Proposition 1.5. On considère une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ impropre en b et on suppose que $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$ avec g de signe constant (c'est-à-dire $g(t) \geqslant 0$ ou bien $g(t) \leqslant 0$, mais g ne change pas de signe).

- si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ converge, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.
- si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ diverge, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ diverge.

Méthode 4. Convergence d'une intégrale par équivalence

On cherche par exemple à montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}+t^2}\ \mathrm{d}t$ converge.

- La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}+t^2}$ est continue sur $]0;1]$. L'intégrale est impropre en 0.
- On a : $\dfrac{1}{\sqrt{t}+t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.
- De plus : $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \geqslant 0$
- et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ converge (Riemann en 0, $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$).

Par équivalence, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}+t^2}\ \mathrm{d}t$ converge.

Méthode 5. Divergence d'une intégrale par équivalence

On cherche à montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+t^3}\ \mathrm{d}t$ diverge.

- La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2+t^3}$ est continue sur $]0;1]$. L'intégrale est impropre en 0.
- On a : $\dfrac{1}{t^2+t^3} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$.
- De plus : $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$
- et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t$ diverge (Riemann en 0, $\alpha = 2 \geqslant 1$).

Par équivalence, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+t^3}\ \mathrm{d}t$ diverge.

Entraînement 1.6. Etudier la nature des intégrales suivantes.

$$(1)\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}\ \mathrm{d}t \qquad (2)\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{t+\mathrm{e}^{-t}}\ \mathrm{d}t$$

Proposition 1.7. On considère une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ impropre en b et on suppose que $f(t) \underset{t\to b}{=} o\big(g(t)\big)$ avec $g(t)$ de signe constant. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

Méthode 6. Convergence d'une intégrale par négligeabilité

Exemple : on cherche à montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\ \mathrm{e}^{-2t}\ \mathrm{d}t$ converge.

- La fonction $t \longmapsto t\ \mathrm{e}^{-2t}$ est continue sur $[0;+\infty[$. L'intégrale est impropre en $+\infty$.
- $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t\ \mathrm{e}^{-2t}}{\mathrm{e}^{-t}} = \lim_{t\to+\infty} t\ \mathrm{e}^{-t} = 0$ (croissances comparées). Donc $t\ \mathrm{e}^{-2t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{-t}\right)$.
- De plus : $\mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$
- et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ converge (exponentielle décroissante).

Par négligeabilité, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\ \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ converge.

Exemple 1.8. Montrer que les intégrales suivantes convergent. Corrigé

$$(1)\ \int_1^{+\infty} t^4\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \qquad (2)\ \int_0^1 \ln(t)\ \mathrm{d}t$$

II. Transformation d'intégrales impropres

II.1. Parité de l'intégrande

Proposition 1.9. On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge. Alors :

- si la fonction f est impaire, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = 0$
- si la fonction f est paire, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$

II.2. Intégration par parties

Méthode 7. Intégration par parties

On souhaite calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'une intégration par parties.

Etape 1 : on pose u et v

On pose $\begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$

Etape 2 : IPP sur un segment

L'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $b > 0$. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^b \underbrace{t}_{u(t)} \times \underbrace{e^{-t}}_{v'(t)}\,\mathrm{d}t &= \Big[\ \underbrace{t}_{u(t)} \times \underbrace{(-e^{-t})}_{v(t)}\ \Big]_{t=0}^{t=b} - \int_0^b \underbrace{1}_{u'(t)} \times \underbrace{(-e^{-t})}_{v(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= -be^{-b} - 0 + \int_0^b e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= -be^{-b} + \Big[\ -e^{-t}\ \Big]_{t=0}^{t=b} = -be^{-b} - e^{-b} + 1\end{aligned}$$

Etape 3 : on passe à la limite

$$\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty} \big(\underbrace{-be^{-b}}_{\to 0 \text{ (c.comp.)}} - \underbrace{e^{-b}}_{\to 0} + 1\big) = \boxed{1}$$

Remarque. Ce calcul prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exemple 1.10. Calculer l'intégrale $A = \displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

Corrigé

II.3. Changement de variable

Méthode 8. Changement de variable

On cherche à transformer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t$ par le changement de variable $u = \mathrm{e}^{2t}$.

Etape 1 : justification du changement de variable

La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{2t}$ est strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;+\infty[$: le changement de variable $u = \mathrm{e}^{2t}$ est licite

Etape 2 : on dérive le changement de variable

$u = \mathrm{e}^{2t}$ donc $\mathrm{d}u = (\mathrm{e}^{2t})'\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}t$. D'où :

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\frac{1}{u}+u}\frac{1}{2u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2(1+u^2)}\,\mathrm{d}u$$

Etape 3 : changement de bornes et conclusion

t	$-\infty$	$+\infty$
$u = \mathrm{e}^t$	0	$+\infty$

D'où : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+u^2)}\,\mathrm{d}u$

Remarque. Pour un changement de variable affine on saute l'étape 1.

Exemple 1.11. Transformer les intégrales suivantes au moyen du changement de variable indiqué.

$$A = \int_4^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad (u=\sqrt{t}) \qquad B = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+9}\,\mathrm{d}t \quad (u = t/3)$$

Corrigé

Remarque 1.12. Parfois, le changement de variable est indiqué en sens inverse (t en fonction de u). Par exemple : transformer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ au moyen du changement de variable $t = \sin(u)$.

Corrigé

III. Suite d'intégrales

Dans cette section, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Méthode 9. Monotonie d'une suite d'intégrales

On veut montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Etape 1 : expression de $I_{n+1}-I_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} I_{n+1}-I_n &= \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\frac{t^{n+1}}{1+t} - \frac{t^n}{1+t}\right)\mathrm{d}t \quad \text{(linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 \frac{t^n(t-1)}{1+t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Etape 2 : croissance de l'intégrale

Pour tout $t\in[0;1]$ on a : $t-1\leqslant 0$ donc $\dfrac{t^n(t-1)}{1+t}\leqslant 0$. Par croissance de l'intégrale (licite : les bornes sont dans le bon sens $0\leqslant 1$) :

$$I_{n+1}-I_n = \int_0^1 \frac{t^n(t-1)}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant 0$$

Bilan : $I_{n+1}\leqslant I_n$ donc la suite (I_n) est décroissante.

Méthode 10. Limite d'une suite d'intégrales

On veut maintenant montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Etape 1 : encadrement de l'intégrande

Pour tout $t\in[0;1]$: $\quad 0\leqslant \dfrac{1}{1+t}\leqslant 1 \qquad$ donc $\qquad \boxed{0\leqslant \dfrac{t^n}{1+t}\leqslant t^n}$

Etape 2 : croissance de l'intégrale

Par croissance de l'intégrale : $\quad 0\leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t.$

Or : $\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \left[\ \frac{t^{n+1}}{n+1}\ \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{n+1}.$

Etape 3 : limite par encadrement

On a $0\leqslant I_n\leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$. Par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

IV. Fonction Gamma

Les démonstrations de cette section sont à savoir faire.

Définition 1.13. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Démonstration

On note Γ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad \boxed{\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}$$

Proposition 1.14. Pour tout $x \in]0;+\infty[$ on a : $\Gamma(x) > 0$.

Proposition 1.15. Pour tout réel $x > 1$ on a : $\boxed{\Gamma(x) = (x-1)\,\Gamma(x-1)}$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$

Démonstration

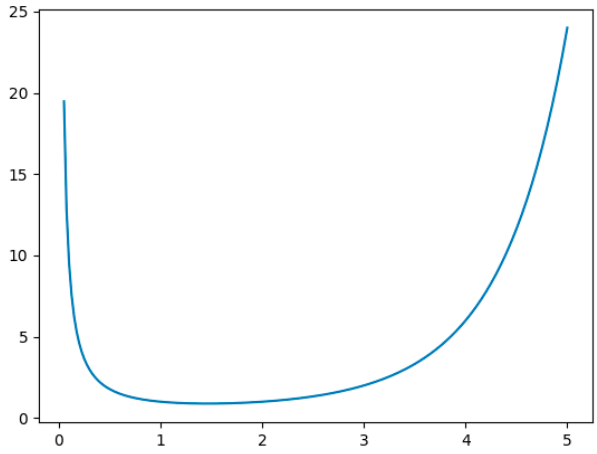
Exemple 1.16. Prouver en un minimum de calculs que les intégrales suivantes convergent et, si possible, donner leur valeur :

$$A = \int_0^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t, \qquad B = \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$$

Corrigé

Remarque 1.17. Voici comment afficher le graphe de la fonction Γ avec Python :

```
import numpy as np                  | x = np.linspace(0.05,5,200)
import scipy.special as sp          | plt.plot(x,sp.gamma(x))
import matplotlib.pyplot as plt     | plt.show()
```



Quelques explications

V. Interro bilan

1. On considère l'intégrale $A = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{(2+t)^3}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que cette intégrale converge.

b) Calculer A à l'aide du changement de variable $u = 2 + t$.

2. On considère l'intégrale $B = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t$

a) Montrer que cette intégrale converge.

b) Calculer B à l'aide d'une intégration par parties.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n converge.

b) Calculer I_0.

c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

Corrigé et barème

VI. Solutions des entraînements

Entraînement 1.1. $A = \dfrac{1}{2}$, B diverge $(+\infty)$, $C = 2$, D diverge (pas de limite).

Entraînement 1.4. $|\cos(t)\mathrm{e}^{-t}| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Entraînement 1.6. Rédaction comme dans la méthode à partir des équivalents suivants :

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t^4}} = \dfrac{1}{t^2}$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}\,\mathrm{d}t$ converge.

(2) $\dfrac{1}{t+\mathrm{e}^{-t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Remarque. Pour (1) on peut aussi raisonner par majoration à partir de l'encadrement : $\quad 0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

VII. Exercices d'approfondissement

VII.1. Enoncés

Exercice 1.1.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\ \mathrm{d}t$ converge.

2. Calculer cette intégrale au moyen du changement de variable $u = \sqrt{t}$.

Exercice 1.2. ϟ

1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^4}\ \mathrm{d}t$ converge.

2. Donner sans calcul la valeur de I.

Exercice 1.3. ϟ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$$

converge et que : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 1.4. ϟ Soit $x > -1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-nt}\ \mathrm{d}t$$

converge et que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-nt}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n^{x+1}}\Gamma(x+1)$.

Exercice 1.5.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\ \mathrm{d}t$ converge.

2. Montrer que la fonction I est décroissante sur $]0;+\infty[$.

3. Montrer que pour tout $x > 0$: $0 \leqslant I(x) \leqslant \dfrac{1}{2x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x)$.

4. Montrer que pour tout $x > 0$: $I(x) \geqslant \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{x+t}\ \mathrm{d}t$. En déduire $\lim\limits_{x\to0^+} I(x)$.

Exercice 1.6. On considère un réel $c > 0$.

1. Montrer que l'intégrale suivante converge : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^t\ \mathrm{e}^{-c\mathrm{e}^t}\ \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$.

2. Au moyen du changement de variable $u = \mathrm{e}^t$, montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^t\ \mathrm{e}^{-c\mathrm{e}^t}\ \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{c^2}$$

Exercice 1.7.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 \mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\ \mathrm{d}t$ converge.

2. A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-t}}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\ \mathrm{d}t$$

VII.2. Corrigés

Exercice 1.1.

1. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t)}$ est continue sur $]0;+\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas. L'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$.
En 0 :

$$\frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} \boxed{\underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}}$$

Or : $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \geqslant 0$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ converge (Riemann en 0, exposant $\dfrac{1}{2} < 1$).
Par équivalence $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\ \mathrm{d}x \text{ converge}}$

En $+\infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{3/2}}$$

Or : $\dfrac{1}{t^{3/2}} \geqslant 0$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\ \mathrm{d}x$ converge (Riemann en $+\infty$, exposant $\dfrac{3}{2} > 1$). Donc $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\ \mathrm{d}t \text{ converge}}$

Bilan : l'intégrale $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\ \mathrm{d}t \text{ converge}}$

2. La fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ est strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$. Le changement de variable $u = \sqrt{t}$ est licite.
On a $\mathrm{d}u = (\sqrt{t})'\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$. Donc :

$$\frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\ \mathrm{d}t = \frac{2}{1+t}\frac{1}{2\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = \frac{2}{1+u^2}\ \mathrm{d}u$$

Pour les bornes :

t	0	$+\infty$
$u = \sqrt{t}$	0	$+\infty$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \lim_{b\to+\infty} \Big[\, 2\arctan(u) \,\Big]_{u=0}^{u=b} \\ &= \lim_{b\to+\infty} (2\arctan(b) - 2\arctan(0)) = 2\times\frac{\pi}{2} = \boxed{\pi}\end{aligned}$$

Exercice 1.2.

1. La fonction $t \longmapsto \dfrac{t}{1+t^4}$ est continue sur $]-\infty;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. L'intégrale I est impropre en $-\infty$ en en $+\infty$.

- En $+\infty$:
$$\frac{t}{1+t^4} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t}{t^4} = \frac{1}{t^3}$$
De plus $\dfrac{1}{t^3} \geqslant 0$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann en $+\infty$). Par équivalence, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ converge.
- En $-\infty$, de même :
$$\frac{t}{1+t^4} \underset{t\to-\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$$
De plus $\dfrac{1}{t^3} \leqslant 0$ et l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann en $-\infty$). Par équivalence, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ converge.
- Sur $[-1;1]$: l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ est bien définie (intégrale d'une fonction continue sur un segment).

Bilan : l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ converge.

2. L'intégrale converge et l'intégrande est impaire. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{(-t)}{1+(-t)^4} = \frac{-t}{1+t^4}$$

Donc $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \boxed{0}$

Exercice 1.3. ϟ Pour $n = 0$: $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ converge (intégrale de référence).

On considère maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x^2}$ est continue sur $[0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. L'intégrale I_n est impropre en $+\infty$. Pour tout $x \in [0;+\infty[$ on a :

$$0 \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1 \qquad \text{donc} \qquad 0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-nx} \quad (*)$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$ converge (car $n > 0$). Par majoration, l'intégrale I_n converge

Montrons maintenant que : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. On réutilise l'inégalité $(*)$. Par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens et les intégrales convergent) :

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \left[\ \frac{-\mathrm{e}^{-nx}}{n}\ \right]_{x=0}^{x=b} = \frac{1}{n}$$

On a donc obtenu l'encadrement : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Par théorème d'encadrement : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$

Exercice 1.4. ϟ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fait le changement de variable affine $u = nt$. Donc : $\mathrm{d}u = (nt)'\,\mathrm{d}t = n\,\mathrm{d}t$. D'où :

$$t^x \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{u}{n}\right)^x \mathrm{e}^{-u}\frac{1}{n}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n^{x+1}} u^x \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

Pour les bornes, comme $n > 0$:

t	0	$+\infty$
$u = nt$	0	$+\infty$

Donc :

$$\int_0^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}} u^x \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

$$\overset{\text{linéarité}}{=} \frac{1}{n^{x+1}} \int_0^{+\infty} u^x \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \boxed{\frac{1}{n^{x+1}}\,\Gamma(x+1)}$$

Or : $x > -1$ donc a : $x + 1 > 0$. D'après le cours, on sait que l'intégrale $\Gamma(x+1)$ converge. Ceci prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$ converge

Exercice 1.5.

1. Soit $x > 0$. La fonction $t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}$ est continue sur $[0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. L'intégrale est

impropre en $+\infty$. Pour tout $t \in [0;+\infty[$ on a :

$$0 \leqslant \frac{1}{x+t} \leqslant \frac{1}{x} \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x} \quad (\mathrm{e}^{-2t} \text{ est positif})$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x}\,\mathrm{d}t$ converge (exponentielle décroissante). Par majoration, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ $\boxed{\text{converge}}$ On la note $I(x)$.

2. Soient x et y dans $]0;+\infty[$ tels que $x \leqslant y$. Il s'agit de montrer que : $I(y) \leqslant I(x)$. Pour tout $t \in [0;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} x \leqslant y \quad &\text{donc} \quad x+t \leqslant y+t \\ &\text{donc} \quad \frac{1}{y+t} \leqslant \frac{1}{x+t} \quad (\text{tous les termes sont} > 0) \\ &\text{donc} \quad \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{y+t} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t} \end{aligned}$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens, les intégrales convergent) on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{y+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

donc $I(y) \leqslant I(x)$. Bilan : la fonction I est $\boxed{\text{décroissante}}$ sur $]0;+\infty[$.

3. Soit $x > 0$. On reprend l'inégalité

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x}$$

établie à la question 1. Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty} \left[\ \frac{-\mathrm{e}^{-2t}}{2x}\ \right]_{t=0}^{t=b} == \frac{1}{2x}$$

Bilan :

$$\boxed{0 \leqslant I(x) \leqslant \frac{1}{2x}}$$

Enfin, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0$ donc par encadrement : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I(x) = 0}$

4. Soit $x > 0$. Par relation de Chasles on a :

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t + \int_{1/2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

Or, pour tout $t \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ on a : $\dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t} \geqslant 0$ donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_{1/2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \quad \text{et donc} \quad I(x) \geqslant \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \qquad (1)$$

De plus, pour tout $t \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ on a $\mathrm{e}^{-2t} \geqslant \mathrm{e}^{-1}$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t} \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{x+t}$. Donc :

$$\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t \qquad (2)$$

Avec les inégalités (1) et (2) on obtient : $\boxed{I(x) \geqslant \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t}$

Par ailleurs, on peut calculer par primitive :

$$\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ \mathrm{e}^{-1}\ln(x+t)\ \Big]_{t=0}^{t=1/2} = \mathrm{e}^{-1}\ln\left(x+\frac{1}{2}\right) - \mathrm{e}^{-1}\ln(x)$$

On a donc établi l'inégalité : $I(x) \geqslant \mathrm{e}^{-1}\ln\left(x+\dfrac{1}{2}\right) - \mathrm{e}^{-1}\ln(x)$.

De plus : $\lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{\mathrm{e}^{-1}\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)}_{\text{tend vers } \mathrm{e}^{-1}\ln(1/2)} - \underbrace{\mathrm{e}^{-1}\ln(x)}_{\text{tend vers } -\infty} = +\infty$

Par minoration : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} I(x) = +\infty}$

Exercice 1.6.

1. La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{-c\mathrm{e}^t}\mathrm{e}^t$ est continue sur $]-\infty;+\infty[$ (produit de fonctions continues). L'intégrale est impropre en $+\infty$ et $-\infty$. En $+\infty$:

$$\frac{\mathrm{e}^t\ \mathrm{e}^{-c\mathrm{e}^t}\ \mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{-t}} = \left(\mathrm{e}^t\right)^3\ \mathrm{e}^{-c\mathrm{e}^t}$$

On a $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^t = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} X^3\mathrm{e}^{-cX} = 0$ (croissances comparées) donc par composition de limites :

$$\lim_{t\to+\infty} \left(\mathrm{e}^t\right)^3\ \mathrm{e}^{-c\mathrm{e}^t} = 0$$

donc :

- $\mathrm{e}^t\ \mathrm{e}^{-c\mathrm{e}^t}\ \mathrm{e}^t \underset{t\to+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{-t})$
- De plus $\mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$
- et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge (exponentielle décroissante).

Par négligeabilité, l'intégrale $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^t\ \mathrm{e}^{-c\mathrm{e}^t}\ \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t \text{ converge}}$

En $-\infty$ on utilise aussi une comparaison, par équivalent :

$$\mathrm{e}^t\ \underbrace{\mathrm{e}^{-c\mathrm{e}^t}}_{\to 1}\ \mathrm{e}^t \underset{-\infty}{\sim} \mathrm{e}^t\ \mathrm{e}^t = \boxed{\mathrm{e}^{2t}}$$

On en déduit que

l'intégrale $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{t}\ \mathrm{e}^{-c\mathrm{e}^{t}}\ \mathrm{e}^{t}\ \mathrm{d}t \text{ converge}}$

Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{t}\ \mathrm{e}^{-c\mathrm{e}^{t}}\ \mathrm{e}^{t}\ \mathrm{d}t$ $\boxed{\text{converge}}$

2. La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{t}$ est strictement croissante sur $]-\infty;+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$. Le changement de variable $u = \mathrm{e}^{t}$ est licite. On a :

$$\mathrm{d}u = (\mathrm{e}^{t})'\ \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{t}\ \mathrm{d}t$$

Donc :

$$\mathrm{e}^{t}\ \mathrm{e}^{-c\mathrm{e}^{t}}\ \mathrm{e}^{t} = u\mathrm{e}^{-cu}\ \mathrm{d}u$$

Pour les bornes :

t	$-\infty$	$+\infty$
$u = \mathrm{e}^{t}$	0	$+\infty$

D'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{t}\ \mathrm{e}^{-c\mathrm{e}^{t}}\ \mathrm{e}^{t}\ \mathrm{d}t = \boxed{\int_{0}^{+\infty} u\ \mathrm{e}^{-cu}\ \mathrm{d}u}$$

On fait maintenant le changement de variable $v = cu$ et on obtient :

$$\int_{0}^{+\infty} u\ \mathrm{e}^{-cu}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{c^2}\int_{0}^{+\infty} v\mathrm{e}^{-v}\ \mathrm{d}v = \frac{1}{c^2}\ \underbrace{\Gamma(2)}_{=1!=1} = \boxed{\frac{1}{c^2}}$$

Exercice 1.7.

1. La fonction $t \longmapsto \dfrac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}$ est continue sur $]-\infty;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. L'intégrale est impropre en $+\infty$ et $-\infty$. En $+\infty$:

$$\frac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2} \boxed{\underset{t\to+\infty}{\sim} t^2\mathrm{e}^{-t}}$$

Or, $t^2\mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$ et l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ converge (on reconnaît l'intégrale $\Gamma(3)$, avec $3 > 0$). Par équivalence l'intégrale $\boxed{\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\ \mathrm{d}t \text{ converge}}$

En $-\infty$:

$$\frac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2} \underset{t\to-\infty}{\sim} \frac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{(\mathrm{e}^{-t})^2} = t^2\mathrm{e}^{t}$$

et de manière analogue : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t^2\mathrm{e}^{t}\ \mathrm{d}t$ converge (un changement de variable $u = -t$ ramène à $\Gamma(3)$), donc l'intégrale $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\ \mathrm{d}t \text{ converge}}$

Bilan : l'intégrale $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$

2. Commençons par vérifier que la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}$ est paire. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(-t) = \frac{(-t)^2\mathrm{e}^{t}}{(1+\mathrm{e}^{t})^2} = \frac{t^2\mathrm{e}^{t}}{(\mathrm{e}^{t})^2 \times (1+\mathrm{e}^{-t})^2} = \frac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2} = f(t)$$

La fonction f est donc paire. On a alors un premier résultat :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\,\mathrm{d}t = \boxed{2\int_{0}^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\,\mathrm{d}t}$$

Il s'agit donc de prouver que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\,\mathrm{d}t$
ce qui revient à montrer que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} 2t\,\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^2\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\,\mathrm{d}t} \quad (1)$$

On va établir cette égalité en transformant l'intégrale de gauche par parties. On pose $\begin{cases} u(t) = t^2 \\ v(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-t}} \end{cases}$. Les fonctions u et v sontde classe $\mathcal{C}^1$ avec $u'(t) = 2t$ et

$$v'(t) = \frac{(-\mathrm{e}^{-t})(1+\mathrm{e}^{-t}) - \mathrm{e}^{-t}(-\mathrm{e}^{-t})}{\left(1+\mathrm{e}^{-t}\right)^2} = \frac{-\mathrm{e}^{-t}}{\left(1+\mathrm{e}^{-t}\right)^2}$$

Soit $b > 0$. On a :

$$\int_0^b \underbrace{2t}_{u'(t)}\,\underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-t}}}_{v(t)}\,\mathrm{d}t = \Big[\, t^2\,\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\Big]_{t=0}^{t=b} - \int_0^b \underbrace{t^2}_{u(t)}\,\underbrace{\frac{-\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}}_{v(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= b^2\,\frac{\mathrm{e}^{-b}}{1+\mathrm{e}^{-b}} - 0 + \int_0^b t^2\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\left(1+\mathrm{e}^{-t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

En faisant tendre b vers $+\infty$ on a par croissances comparées :

$$\lim_{b\to+\infty} b^2\,\frac{\mathrm{e}^{-b}}{1+\mathrm{e}^{-b}} = \lim_{b\to+\infty} \frac{b^2\mathrm{e}^{-b}}{1+\mathrm{e}^{-b}} = \frac{0}{1} = 0$$

et donc :

$$\int_0^{+\infty} 2t\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^2\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\,\mathrm{d}t$$

Ceci établit l'égalité (1) et achève la démonstration.

Chapitre 2. Séries

Plan du chapitre

I. Rappels fondamentaux 29
II. Etude de la nature d'une série 31
III. Compléments 34
IV. Interro bilan 36
V. Solutions des entraînements 37
VI. Exercices d'approfondissement 38

Vidéo du chapitre ☞

Dans tout le chapitre, on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I. Rappels fondamentaux

I.1. Série convergente, somme d'une série

Le nombre $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ est défini, sous réserve d'existence de cette limite, par :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)}$$

Si cette limite existe et est finie on dit que la série $\sum u_k$ converge

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est la **$n-$ième somme partielle** de la série. Dire que la série $\sum u_k$ converge signifie que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

I.2. Séries convergentes de référence

Série géométrique $\sum x^k$ avec $-1 < x < 1$.

$$\boxed{\sum_{k=\ldots}^{+\infty} x^k = \frac{1^{\text{er}}\text{ terme}}{1-x}} \qquad \text{exemple} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$$

Série géométrique dérivée $\sum kx^{k-1}$ avec $-1 < x < 1$.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}} \qquad \text{exemple} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^{k-1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}$$

Série géométrique dérivée deux fois $\sum k(k-1)x^{k-2}$ avec $-1 < x < 1$.

$$\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-1} = \frac{2}{(1-x)^3}} \qquad \text{exemple} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{4^{k-2}} = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^3}$$

Série exponentielle $\sum \frac{x^k}{k!}$, converge sans condition sur x.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x \qquad \text{exemple} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-1}$$

Série de Riemann $\sum \frac{1}{k^\alpha}$. Converge si et seulement si $\alpha > 1$. Exemple : $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, $\sum \frac{1}{k}$ diverge.

Entraînement 2.1. Donner la valeur des sommes suivantes (si les séries convergent) :

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{3^{k-1}}$ (2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ (3) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{6^k}$

I.3. Linéarité de la somme sur les séries convergentes

Proposition 2.2. Si la série $\sum u_k$ converge, alors pour tout réel λ la série $\sum \lambda u_k$ converge et de plus :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k}$$

Exemple 2.3. Calculer les sommes suivantes (si les séries convergent).

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{k+1}}{k!}$ (2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{2k+1}}$ (3) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^k}$

Corrigé

Proposition 2.4. Si les séries $\sum u_k$ et $\sum v_k$ convergent, alors la série $\sum (u_k + v_k)$ converge et de plus :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right)}$$

Si l'une des deux séries converge et l'autre diverge, alors la série $\sum (u_k + v_k)$ diverge.

II. Etude de la nature d'une série

II.1. Divergence grossière

Proposition 2.5. Si la série $\sum u_k$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. On utilise surtout la contraposée de ce résultat :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum u_k \text{ diverge}}$$

Entraînement 2.6. Justifier que les séries suivantes divergent.

$$(1) \quad \sum \mathrm{e}^{1/k} \qquad (2) \quad \sum \ln(k) \qquad (3) \quad \sum \frac{3k}{\sqrt{k^2+1}}$$

II.2. Cas d'une série à termes positifs

Proposition 2.7. On considère une série $\sum u_k$ à termes positifs et (S_n) la suite des sommes partielles associée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} \geqslant 0 \qquad \text{donc} \qquad S_{n+1} \geqslant S_n$$

Pour une $\boxed{\text{série est à termes positifs}}$, la suite des $\boxed{\text{sommes partielles est croissante}}$

Méthode 11. Convergence d'une série : convergence monotone

On suppose que la série $\sum u_k$ est à termes positifs et on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant 2 \quad (*)$$

On va montrer que la série $\sum u_k$ converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. Comme la série est à termes positifs, la suite (S_n) est $\boxed{\text{croissante}}$ De plus, elle est $\boxed{\text{majorée}}$ (par 2, d'après (*)). D'après le théorème de convergence monotone la suite des sommes partielles (S_n) converge. Autrement dit, la série $\sum u_k$ converge.

Entraînement 2.8. On reprend l'exemple précédent mais on remplace l'hypothèse $(*)$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant 5 - \frac{u_n^2}{n}$$

Montrer que la série $\sum u_k$ converge.

Proposition 2.9. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N} : 0 \leqslant u_k \leqslant v_k$.

- Si la série $\sum v_k$ converge, alors la série $\sum u_k$ converge. De plus, on a la croissance de la somme pour les séries convergentes :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

- Si la série $\sum u_k$ diverge, la série, alors la série $\sum v_k$ diverge

Exemple 2.10. Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{k^2+1}$ converge. Corrigé

II.3. Convergence absolue

Proposition 2.11. Si la série $\sum |u_k|$ converge, alors la série $\sum u_k$ converge. On dit qu'elle converge absolument De plus, on a l'inégalité triangulaire sur les séries absolument convergentes :

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

Méthode 12. Convergence absolue d'une série par majoration

On veut montrer que la série $\sum \dfrac{\cos(k)}{k^2}$ converge. Pour tout $k \geqslant 1$:

$$0 \leqslant \left|\frac{\cos(k)}{k^2}\right| \leqslant \frac{1}{k^2}$$

Or, la série $\sum \dfrac{1}{k^2}$ converge (Riemann, exposant $2 > 1$). Par majoration, la série $\sum \left|\dfrac{\cos(k)}{k^2}\right|$ converge. Donc la série $\sum \dfrac{\cos(k)}{k^2}$ converge.

Entraînement 2.12. Montrer que les séries suivantes convergent :

$$(1)\ \sum \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k}} \qquad (2)\ \sum \frac{\sin(2k+1)}{k^3}$$

II.4. Nature d'une série par équivalent

Proposition 2.13. Si $u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} v_k$, avec v_k de signe constant, alors les séries $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont de même nature : si l'une converge (respectivement : diverge), alors l'autre aussi.

Méthode 13. Convergence d'une série par équivalent

On va montrer que la série $\sum \frac{-1}{k^2+k+6}$ converge.

- $\frac{-1}{k^2+k+6} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{k^2}$
- $\frac{-1}{k^2} \leqslant 0$ (signe constant)
- $\sum \frac{-1}{k^2}$ converge (Riemann, exposant 2)

Par équivalence, la série $\sum \frac{-1}{k^2+k+6}$ converge.

Méthode 14. Divergence d'une série par équivalent

On va montrer que la série $\sum \frac{1}{3k+\ln(k)}$ converge.

- $\frac{1}{3k+\ln(k)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3k}$
- $\frac{1}{3k} \geqslant 0$ (signe constant)
- $\sum \frac{1}{3k}$ diverge (Riemann, exposant 1)

Par équivalence, la série $\sum \frac{1}{3k+\ln(k)}$ diverge.

Exemple 2.14. Déterminer la nature des séries suivantes.

(1) $\sum \frac{-2}{\sqrt{k+\ln(k)+4}}$ (2) $\sum \sin\left(\frac{1}{k}\right)$ (3) $\sum \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$

Corrigé

II.5. Convergence d'une série par négligeabilité

Proposition 2.15. Si $u_k \underset{k\to+\infty}{=} o(v_k)$ avec v_k de signe constant, et si la série $\sum v_k$ converge, alors la série $\sum u_k$ converge.

Méthode 15. Convergence d'une série par négligeabilité

On veut montrer que la série $\sum \frac{\ln(k)}{k^3}$ converge. On a :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{\ln(k)}{k^3}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\ln(k)}{k^3} \times \frac{k^2}{1} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\ln(k)}{k} = 0 \quad \text{(c. comparées)}$$

Donc $\frac{\ln(k)}{k^3} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$. De plus :

- $\frac{1}{k^2} \geqslant 0$ (signe constant)
- $\sum \frac{1}{k^2}$ converge (Riemann, exposant $2 > 1$)

Par négligeabilité, la série $\sum \frac{\ln(k)}{k^3}$ converge.

Exemple 2.16. Montrer que les séries suivantes convergent. Corrigé

(1) $\sum \frac{k^5}{2^k}$ (2) $\sum \frac{\ln(k)}{k^2}$

III. Compléments

III.1. Lien entre la série $\sum(u_{k+1} - u_k)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Méthode 16. Convergence de (u_n) par la série $\sum(u_{k+1} - u_k)$

On suppose que : $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. On va montrer que la suite (u_n) converge.

- $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, donc par équivalence, la série $\sum(u_{k+1} - u_k)$ converge.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$. On a par calcul télescopique :

  $$S_n = u_n - u_0 \qquad \text{donc} \qquad u_n = u_0 + S_n$$

  De plus, la série $\sum(u_{k+1} - u_k)$ converge. Donc la suite (S_n) de ses sommes partielles converge.

Bilan : la suite (u_n) converge (constante + suite convergente)

III.2. Séparation en sommes des termes pairs/impairs

Proposition 2.17. Si la série $\sum u_k$ converge absolument, alors :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=1}^{+\infty} u_{2k} + \sum_{k=1}^{+\infty} u_{2k-1}}$$

Exemple 2.18.

1. Justifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

2. On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

3. En déduire aussi la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$. Corrigé

III.3. Cas d'une série à signe alterné

Dans cette section on va montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^k}{k}$ converge. Le premier réflexe est de chercher la convergence absolue. Ici :

$$\left|\frac{(-1)^k}{k}\right| = \frac{1}{k}$$

La série $\displaystyle\sum \frac{1}{k}$ diverge : c'est raté pour la convergence absolue.
On va montrer que la série converge en étudiant la suite de ses sommes partielles.
On commence par rappeler deux résultats sur les convergences de suites.

Rappel 2.19. Deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes lorsque :

- l'une est croissante et l'autre est décroissante, et
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$

Dans ce cas, on sait que les deux suites convergent vers la même limite

Rappel 2.20. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. On suppose que les suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers cette limite.

Méthode 17. Convergence d'une série à signe alterné

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

On commence par montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n-1}) sont adjacentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} < 0 \end{aligned}$$

Donc la suite (S_{2n}) est $\boxed{\text{décroissante}}$ On montre de manière analogue que :

$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = -\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n} > 0$$

donc la suite (S_{2n-1}) est $\boxed{\text{croissante}}$ Enfin :

$$\lim_{n\to+\infty} (S_{2n} - S_{2n-1}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = \boxed{0}$$

Bilan : les suites suites (S_{2n}) et (S_{2n-1}) sont adjacentes. Donc elles $\boxed{\text{convergent vers une même limite}}$

Ceci prouve que la suite (S_n) converge, et donc que la série $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ converge.

Entraînement 2.21. Reprendre la méthode précédente avec la série $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

IV. Interro bilan

1. Calculer les sommes suivantes en reconnaissant des séries de référence.

$$A = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^k} + \frac{2^k}{k!} \right) \qquad B = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

2. Les séries suivantes convergent-elles ? On ne demande pas de calculer leur somme.

a) $\sum \dfrac{k^2-k+\ln(k)}{k^3+2}$ **c)** $\sum \dfrac{\ln(k)}{k^4}$ **e)** $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$

b) $\sum \dfrac{1}{2^k-k}$ **d)** $\sum \dfrac{\cos(k)}{k^2}$ **f)** $\sum \sin\left(\dfrac{1}{2^k}\right)$

3. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant 3 - nu_n$.

Justifier que la série $\sum u_k$ converge.

4. Soit (u_n) une suite. On suppose que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-2}{n\sqrt{n}}$.

a) Montrer que la série $\sum(u_{k+1} - u_k)$ converge.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Corrigé et barème

V. Solutions des entraînements

Entraînement 2.1.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{3^{k-1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9}{4} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{6^k} = \frac{\frac{1}{6^2}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1}{30}$$

Entraînement 2.6. Les trois séries divergent grossièrement :

$$\lim_{k\to+\infty} \mathrm{e}^{1/k} = 1 \neq 0, \quad \lim_{k\to+\infty} \ln(k) = +\infty \neq 0, \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{3k}{\sqrt{k^2+1}} = 3 \neq 0$$

Entraînement 2.8. comme dans la méthode avec $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant 5$ car $5 - \dfrac{u_n^2}{n} \leqslant 5$.

Entraînement 2.12.

(1) $\left|\dfrac{(-1)^k}{k\sqrt{k}}\right| = \dfrac{1}{k^{3/2}}$ Donc la série converge absolument.

(2) Comme dans la méthode en utilisant : $\left|\dfrac{\sin(2k+1)}{k^3}\right| \leqslant \dfrac{1}{k^3}$.

Entraînement 2.21. Comme dans la méthode, avec $S_{2n+2} - S_{2n} = \dfrac{1}{\sqrt{2n+2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} < 0$ et $S_{2n+1} - S_{2n-1} = -\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2n}} > 0$.

VI. Exercices d'approfondissement

VI.1. Enoncés

Exercice 2.1. ϟ On s'intéresse à la série $\sum \dfrac{1}{k(k+1)}$.

1. Justifier que cette série converge.

2. Trouver des réels a et b tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.

3. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 2.2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = u_n\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n > 0$.

2. Montrer que la série $\sum \big(\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)\big)$ converge.

3. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell > 0$.

Exercice 2.3. ϟ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leqslant a_k \leqslant 3\,\dfrac{2^k}{k\sqrt{k}}$.

Montrer que pour tout $x \in \left[\dfrac{-1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$, la série $\sum a_k x^k$ converge.

Exercice 2.4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Rappeler la nature de la série $\sum \dfrac{1}{k}$. Que peut-on en déduire pour la suite (S_n) ?

2. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant S_n \leqslant \ln(n) + 1$$

4. En déduire un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2.5.

1. Rappeler la nature de la série $\sum \dfrac{1}{k^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

2. **a)** Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$: $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire que : $\dfrac{1}{(n+1)} \leqslant R_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

c) En déduire un équivalent simple de R_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2.6.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in [0;1]$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-t)^k = \frac{1}{1+t} + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{1+t}$.

2. En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0$.

4. En déduire que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^k}{k+1}$ converge et que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$

5. Montrer enfin que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$

Exercice 2.7. On note $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que pour tout $x \in [0;1]$:

$$\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \mathrm{e}^x\ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

2. En déduire que :

$$\left|I - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\int_0^1 \frac{x^k}{1+x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$$

3. En déduire que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{k!}\int_0^1 \frac{x^k}{1+x}\,\mathrm{d}x$ converge et que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\int_0^1 \frac{x^k}{1+x}\,\mathrm{d}x = I$$

VI.2. Corrigés

Exercice 2.1. ϟ

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$0 \leqslant \frac{1}{k(k+1)} \leqslant \frac{1}{k^2}$$

De plus, la série $\displaystyle\sum \frac{1}{k^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$). Par majoration, la série $\displaystyle\sum \frac{1}{k(k+1)}$ $\boxed{\text{converge}}$