

Exos **résolus**
PRÉPAS

PCSI

Prépas scientifiques - 1^{re} année

COLLECTION DIRIGÉE PAR FRÉDÉRIQUE DE LA BAUME

Physique

NOUVEAU
PROGRAMME

Tout le **COURS**

Illustré, avec des **points méthode**
et des **rappels mathématiques**

La préparation des **colles**

Des fiches de **questions de cours**
et les conseils

Des **exercices**

Ciblés, incontournables
ou extraits de **sujets de concours**

Des **corrigés**

Complets, clairs,
assortis de **nombreux conseils**

hachette
ÉDUCATION

Physique

Frédérique de LA BAUME

Cours privés C.P.G.E.
toutes filières
Toulouse

Caroline GOUTELARD

MPSI
Lycée Pierre de Fermat
Toulouse

Hélène MOUILLERON

PC
Lycée Saliège
Toulouse

Damien TRISTANT

Laboratoire de Physique-Chimie
des Nano-objets INSA et CEMES
Toulouse

Avec la collaboration de :

Gilles de BOÜARD – PSI - Lycée Blaise Pascal - Orsay

André DOMPS – PC* – Lycée Henri Poincaré – Nancy

Faïlor ELFASSI – Ingénieur ISAE-Supaéro – Toulouse

Bruno LEBON – MPSI – Lycée Saint Charles – Saint-Pierre

Jean-Manuel LEMASQUERIER – BCPST2 – Lycée Roland Garros – Le Tampon

Lionel VIGNON – PCSI – Lycée Pierre de Fermat – Toulouse

que les auteurs remercient.

Des questions ? Des suggestions ? Contactez l'équipe d'auteurs à l'adresse suivante :
exosresolus.prepas@gmail.com

Maquette de couverture : Françoise Bouvard
Maquette intérieure : GRAPH'in-folio
Composition/mise en pages/schémas : Belle Page

© Hachette Livre, 2015, 58, rue Jean-Bleuzen, 92 178 Vanves CEDEX.
www.hachette-education.com

Photo de couverture : © Shutterstock images

ISBN : 978-2-01-290662-4

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L.122-4 et L.122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et, d'autre part, que « les analyses et les courtes citations » dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite ». Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Avant-propos

À nos lecteurs,

En écrivant cet ouvrage, nous avons voulu apporter aux étudiants un outil de travail efficace et nous espérons qu'au fil des pages, ce livre les aidera à développer leur goût pour l'étude de la physique.

Conforme au programme de CPGE, il en aborde tous les contenus et rappelle souvent au lecteur les points sur lesquels le programme met l'accent ou les compétences explicitement exigibles qui doivent être parfaitement maîtrisées. Nous n'avons fait l'impasse sur aucune notion prérequis, n'hésitant pas à rappeler des notions théoriquement abordées au lycée. Mais parce qu'un étudiant est aussi un futur ingénieur, un futur chercheur, voire un futur enseignant, il ne saurait apprendre sans comprendre. Parce qu'à ce niveau d'étude, la formation se doit de répondre à toutes les curiosités, il nous a semblé indispensable d'élargir parfois notre propos, toujours dans le souci de faciliter l'apprentissage des contenus.

Nous avons été confortés dans notre démarche de deux façons. D'une part, les recommandations des plus hautes autorités scientifiques nous y incitent, comme on peut le lire dans ce communiqué de l'Académie des sciences du 27 mai 2015 : « L'Académie des sciences est convaincue que les professeurs auront à cœur d'interpréter ces programmes de la manière la plus libre possible et qu'ils sauront transmettre de véritables contenus ambitieux, en les adaptant à chaque classe. »

D'autre part les sujets de concours des nouveaux programmes ont souvent introduit des notions que les candidats ont dû découvrir au moment de l'épreuve. Il ne fait aucun doute qu'il sera toujours plus facile et moins stressant de se pencher sur des notions déjà abordées, même superficiellement, que sur des concepts totalement inconnus.

Nous tenons nos étudiants en haute estime, la grande majorité d'entre eux est désireuse de progresser et disposée à fournir le travail nécessaire. Aussi, nous semble-t-il de notre devoir de leur apporter les outils nécessaires. À travers un cours concis, mais rédigé complètement, des exercices ciblés sans profusion excessive, des points méthodes pragmatiques et concrets et des corrigés parsemés de conseils, nous n'avons rien négligé du plus simple au plus complexe. Nous espérons ainsi que les élèves, quels que soient leur profil et leurs capacités, trouveront dans ce livre de quoi travailler avec efficacité. Par ailleurs, bien qu'axés sur le programme de CPGE, les contenus développés et les méthodes mises en œuvre sont ceux qui sous-tendent la plupart des cours de physique des deux premières années d'enseignement supérieur scientifique, aussi sommes-nous convaincus que des étudiants d'autres horizons peuvent largement en tirer profit.

Chez tous nous espérons éveiller le plaisir de comprendre, à tous nous souhaitons une brillante réussite.

Nous ne saurions clore cet avant-propos sans un mot à nos collègues qui encouragent leurs étudiants à se constituer une bibliothèque scientifique de travail. Nous espérons que cet ouvrage fera partie de leurs recommandations et, d'avance, nous les remercions de nous faire part de tous les commentaires qui pourraient nous aider à l'améliorer.

Les auteurs

Des questions ? Des suggestions ? Contactez l'équipe d'auteurs à l'adresse suivante :
exosresolus.prepas@gmail.com

Sommaire

1. Réussir en physique 7

■ Méthodes d'apprentissage ■ Méthodes de résolution ■ Utilisation de l'ouvrage ■ Conseils.

PARTIE 1 – SIGNAUX

2. L'oscillateur harmonique 13

■ Système masse-ressort ■ Équations différentielles ■ Équation aux dimensions ■ Énergies.

Exercices 22

Corrigés 24

3. Propagation d'ondes 27

■ Signal ■ Période, fréquence ■ Analyse spectrale ■ Onde progressive ■ Longueur d'onde ■ Polarisation de la lumière.

Exercices 37

Corrigés 38

4. Superposition d'ondes 43

■ Représentation de Fresnel ■ Interférences ■ Battements ■ Ondes stationnaires et modes propres d'une corde ■ Diffraction.

Exercices 54

Corrigés 56

5. Lois de l'optique géométrique 61

■ Sources ■ Indice, dispersion ■ Réflexion ■ Réfraction ■ Objet, image ■ Stigmatisme, aplanétisme ■ Conditions de Gauss.

Exercices 70

Corrigés 72

6. Lentilles et instruments 77

■ Objet et image réels ou virtuels ■ Foyers ■ Grandissement, grossissement ■ Miroir plan ■ Lentilles, lentilles minces
■ Constructions ■ Lois de conjugaison ■ L'œil ■ Association de lentilles.

Exercices 87

Corrigés 89

7. Introduction au monde quantique 93

■ Dualité onde-corpuscule ■ Effet photo-électrique ■ Relation de de Broglie ■ Fonction d'onde, probabilité de présence ■ Inégalité de Heisenberg ■ Oscillateur harmonique quantique.

Exercices 102

Corrigés 104

8. Circuits dans l'ARQS 109

■ Charge et intensité ■ Potentiel et tension ■ Caractéristique de dipôle ■ Loi des nœuds ■ Loi des mailles ■ Résistor, condensateur, bobine ■ Générateurs de Thévenin, de Norton ■ Associations série ou parallèle de dipôles.

Exercices 123

Corrigés 124

9. Régimes transitoires 129

■ Oscillateurs ■ Excitation, réponse, régime ■ Circuits du premier ordre RC et RL ■ Circuit du second ordre RLC
■ Oscillateur mécanique amorti ■ Analogie électro-mécanique ■ Portrait de phase.

Exercices 146

Corrigés 149

10. Oscillations forcées 159

■ Régime sinusoïdal et résolution complexe ■ Résonances ■ Bande passante ■ Impédance ■ Méthode de Fresnel.

Exercices 176

Corrigés 178

11. Filtrage linéaire	185
■ Moyenne, valeur efficace ■ Filtre, fonction de transfert, gain, gain en décibel ■ Diagrammes de Bode ■ Filtres du premier ordre ■ Filtres du second ordre ■ Moyenneur, dérivateur, intégrateur ■ Filtres en cascade ■ Gabarit.	
Exercices	201
Corrigés	205

PARTIE 2 – MÉCANIQUE

12. Cinématique	215
■ Référentiels ■ Systèmes de coordonnées, déplacement élémentaire ■ Vitesse, accélération ■ Mouvement rectiligne ■ Mouvement parabolique ■ Mouvement circulaire ■ Translation et rotation d'un solide.	
Exercices	227
Corrigés	229
13. Dynamique	235
■ Quantité de mouvement ■ Référentiel galiléen ■ Principe fondamental de la dynamique ■ Théorème de la résultante cinétique ■ Forces de contact, forces à distance ■ Réactions, lois de Coulomb.	
Exercices	244
Corrigés	246
14. Énergie en mécanique	261
■ Travail, puissance ■ Énergie cinétique ■ Force conservative, énergie potentielle ■ Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique ■ Théorème de l'énergie mécanique ■ Équilibre et stabilité.	
Exercices	270
Corrigés	272
15. Particules chargées dans un champ	279
■ Champ uniforme, stationnaire ■ Accélération d'une charge par un champ électrique ■ Déviation d'une charge par un champ magnétique.	
Exercices	285
Corrigés	290
16. Théorème du moment cinétique	297
■ Moment d'une force ■ Moment cinétique ■ Théorème du moment cinétique vectoriel et scalaire.	
Exercices	302
Corrigés	303
17. Mouvements à forces centrales	309
■ Centre de force ■ Invariants du mouvement ■ Loi des aires ■ Forces newtoniennes ■ Lois de Kepler ■ Satellites.	
Exercices	319
Corrigés	320
18. Mécanique des systèmes	327
■ Quantité de mouvement ■ Centre d'inertie ■ Moment cinétique ■ Moment d'inertie ■ Action mécanique, couple, liaison pivot ■ PFD ■ Conservation de la quantité de mouvement, du moment cinétique ■ Théorèmes énergétiques.	
Exercices	336
Corrigés	337

PARTIE 3 – THERMODYNAMIQUE

19. Description des systèmes thermodynamiques	345
■ Grandeurs et fonctions d'état ■ Température, pression, volume ■ Équilibre thermodynamique ■ Énergie interne, capacité thermique à volume constant ■ Gaz parfait, équation d'état ■ Température et pression cinétiques ■ Phase condensée.	
Exercices	360
Corrigés	362

20. Échanges énergétiques au cours d'une transformation	365
■ Transformation (réversible, isobare, isochore, isotherme, adiabatique) ■ Diagrammes de Watt et de Clapeyron (P,V) ■ Transfert mécanique (travail) ■ Transfert thermique (chaleur) ■ Grandeurs d'échange et fonctions d'état ■ Thermostat.	
Exercices	375
Corrigés	376
21. Premier principe de la thermodynamique	379
■ Énergie interne microscopique et énergie macroscopique ■ Conservation de l'énergie ■ Enthalpie, capacité thermique à pression constante ■ Relation de Mayer, coefficient adiabatique ■ Détentes de Joule, lois de Joule.	
Exercices	389
Corrigés	391
22. Second principe de la thermodynamique	399
■ Entropie ■ Identités thermodynamiques ■ Entropie créée, échangée, bilan entropique ■ Lois de Laplace ■ Diagrammes entropiques (T,S) ■ Micro-état et macro-état, entropie statistique, définition de Boltzmann ■ Entropie et désordre.	
Exercices	412
Corrigés	414
23. Machines thermiques	421
■ Moteur, récepteur, schéma de principe ■ Diagramme de Raveau ■ Inégalité de Clausius ■ Efficacité et rendement ■ Cycles et rendements de Carnot ■ Premier principe industriel (machine à écoulement) ■ Diagramme de Mollier.	
Exercices	439
Corrigés	441
24. Changements d'état du corps pur	445
■ Transitions de phase ■ Diagramme (P,T), point triple, point critique ■ Diagramme (P,v), courbes de saturation ■ Isothermes d'Andrews ■ Enthalpie et entropie massiques ■ Titre molaire, massique ■ Théorèmes des moments.	
Exercices	456
Corrigés	459
25. Statique des fluides	467
■ Forces surfaciques et volumiques ■ Expression des forces de pression ■ Principe fondamental de l'hydrostatique ■ Pression dans un liquide ■ Pression dans un gaz, cas de l'atmosphère isotherme ■ Interprétation statistique de Boltzmann ■ Poussée d'Archimède.	
Exercices	480
Corrigés	482

PARTIE 4 – ELECTROMAGNÉTISME

26. Champ magnétique	485
■ Spectres et lignes de champ ■ Flux d'un vecteur ■ Symétrie et antisymétrie ■ Aimants, pôles magnétiques ■ Champs créés par un courant (fil, spire, bobine, solénoïde) ■ Dipôle magnétique, moment magnétique ■ Force de Laplace, action sur une tige, sur un cadre ■ Dipôle magnétique dans un champ.	
Exercices	499
Corrigés	501
27. Induction électromagnétique	509
■ Loi de Lenz, loi de Faraday ■ Induction de Neumann, de Lorentz ■ Auto-induction, induction mutuelle ■ Transformateur, alternateur ■ Rails de Laplace ■ Conversion électro-mécanique ■ Haut-parleur ■ Machine à courant continu.	
Exercices	524
Corrigés	527

ANNEXES

Base de données	537
■ Système international d'unités ■ Constantes physiques ■ Grandeurs astronomiques, atomiques, usuelles.	
Index (mots-clés et points méthode)	541

Réussir en physique

Cet ouvrage a été pensé dans le but d'aider l'élève en CPGE, mais aussi l'étudiant en licence ou en école d'ingénieur postbac, à réussir en physique. En voici la philosophie.

I Le cours

1. Vivre le cours

→ En général

Qu'il soit présenté au tableau ou au vidéo projecteur, assorti ou non de documents, le premier cours est celui du professeur. Il faut le suivre attentivement et prendre un maximum de notes. Nombre d'étudiants sont totalement passifs en classe et ce, d'autant plus qu'ils disposent d'un photocopié « où il y a tout ».

Propriétés

La **rentabilisation** du temps passé en classe exige une attitude active :

- prendre des notes, même s'il y a un photocopié $\Rightarrow$ gain de temps dans la mémorisation,
- faire les calculs en même temps que le professeur $\Rightarrow$ gain de temps dans l'apprentissage,
- poser des questions, noter les réponses $\Rightarrow$ gain de temps dans la compréhension.

→ Utiliser cet ouvrage

Comme tous les professeurs, nous avons fait des choix dans la façon de présenter, de regrouper, de séparer les notions abordées. Lorsqu'une notion utile figure ailleurs ou qu'un exercice constitue une illustration intéressante, un renvoi précis y fait référence.

POINT MÉTHODE

- Exploiter son cours écrit en l'annotant au fur et à mesure de sa relecture, en indiquant les points qu'il semble utile de retravailler, ou qui ont paru trop rapides, puis les rechercher dans cet ouvrage grâce :
 - au sommaire p. 4 à 6 qui recense les notions abordées, ce qui permet de les trouver rapidement,
 - à l'index p. 541 à 544 qui liste tous les termes simples ou complexes pour approfondir sa recherche.

2. S'approprier le cours

→ En général

Un cours s'apprend, c'est une évidence, pourtant la plupart des étudiants de ce niveau, en général plutôt bons élèves (sans trop d'efforts) au lycée, ne savent pas apprendre un cours. Le lire et le relire est totalement insuffisant comme l'ont montré de nombreuses études scientifiques.

Propriétés

Une **exploitation rentable** de son cours exige de :

- le réécrire : schémas complétés, plan mis en évidence, définitions et théorèmes encadrés...
- le refaire : démonstrations, schémas de principes, exercices d'application directe...
- le résumer : repérer ce qui est essentiel, faire des fiches pour ses futures révisions...

→ Utiliser cet ouvrage

Cet ouvrage présente un cours concis, complet et rédigé pour apporter tous les éclaircissements sur ce qui « coince » (même si en classe tout semblait clair). Nous l'avons conçu comme un moyen dynamique de travailler grâce à de nombreux repères visuels.

Définitions

- Les **encadrés bleus** indiquent l'essentiel des concepts : des définitions pour maîtriser les objets d'étude et les outils, des énoncés (théorèmes ou principes) pour identifier les fondements du raisonnement, des propriétés pour comprendre le comportement des systèmes étudiés.
 - Les **termes en gras** sont essentiels : il faut connaître impérativement leur définition rigoureuse.
 - Des **tableaux récapitulatifs** résument ou réunissent les connaissances à associer pour synthétiser et trier les concepts, faire le parallèle entre les systèmes, classer et structurer les phénomènes.
 - Des **points méthodes** insistent sur les aspects délicats ou explicitent les outils à maîtriser.
- Les items sous les encadrés aident à les comprendre, précisent les situations particulières, les conditions d'application, donnent des exemples, des élargissements. Il ne faut pas en négliger la lecture.

POINT MÉTHODE

- Faire une **liste des termes en gras** du chapitre et s'entraîner à les définir. Les mots (techniques ou courants) sont les briques du raisonnement. **Rédiger** une définition signifie **s'exprimer dans un français aussi rigoureux que le sont les sciences** (à bannir définitivement : « c'est par exemple quand »).
- Lister **encadrés et points méthodes** et construire une fiche de résumé de cours personnalisée.

3. Préparer la colle

→ En général

La colle vise à inciter l'élève à apprendre régulièrement le cours et venir en colle sans le connaître est un gâchis de temps et de moyens. Il est d'ailleurs dommage que la plaisante orthographe (khôlle) de cet avantage accordé au taupin ait évolué en un fade et négatif vocable (colle).

Propriété

La **colle** est une chance énorme et un outil de progression dont il faut profiter. Elle doit être l'occasion de vérifier rapidement que l'on connaît l'essentiel du cours, elle permet de bénéficier d'un professeur qui corrige ou précise quelques détails et de s'entraîner sur des exercices et à la pratique de l'oral.

→ Utiliser cet ouvrage

Pour en optimiser la préparation, des encadrés verts figurent en fin de chaque chapitre.

VERS LA COLLE

Questions de cours

- Certains concours pratiquent la question de cours à l'oral. Les questions proposées sont concises, adaptées à l'oral. Une trame de points à aborder engage le lecteur à poser les problèmes, organiser ses idées, enchaîner les énoncés et les résultats avec logique, en suivant ce fil conducteur. Couvrant tout le programme, ils constituent aussi un outil efficace de révision (devoir ou concours).

- Une fois le cours appris (ou si l'on croit qu'il l'est...), il faut rédiger ou présenter les réponses aux questions proposées en traquant sans pitié les zones d'ombre ou les raisonnements fumeux.

Erreurs à éviter

- Certaines erreurs sont récurrentes, nous les avons recensées pour les éviter à nos lecteurs.

Quelques « trucs » utiles

- La colle est aussi souvent l'occasion de découvrir quelques petits « trucs » de résolution ou de méthode, que le professeur n'a pas toujours pu aborder en cours (ou qu'on n'a pas jugé utile de retenir...). Faciles et pragmatiques, ces astuces sécurisent pour l'approche de certains points délicats.

J'entends et j'oublie, je vois et je me souviens, je fais et je comprends. CONFUCIUS (551-479 AV. JC)

II Les exercices

1. Les différents types d'exercices

→ En général

Il faut faire des exercices, c'est évident, savoir lesquels l'est moins ! Il existe plusieurs types d'exercices qui ont tous leur utilité, à condition de savoir les identifier et de les travailler au moment opportun.

→ Utiliser cet ouvrage

Le nombre d'exercices de cet ouvrage est volontairement limité, car, classiques, originaux ou tirés des sujets de concours, ils ont pour but de soutenir le lecteur, pas de le décourager par leur multitude. Une résolution utile consistera à les rédiger « pour de vrai », de façon à s'entraîner aux conditions réelles.

Définitions

- Un **exercice d'application directe du cours** fait partie intégrante du cours et de son apprentissage (il est souvent présenté en classe par le professeur). Certains sont explicitement au programme.
- Un **exercice académique** est un incontournable, son but est de mettre en œuvre des méthodes classiques, générales et systématiques de résolution, qui s'utiliseront dans de nombreuses situations. L'énoncé est assez bref, s'appuie plutôt sur des systèmes idéaux avec peu d'applications numériques.
- Un **exercice d'entraînement** est un exercice assez répétitif dans les outils, mais qui se penche sur des situations diverses. Tous les professeurs de CPGE en distribuent de longues fiches à leurs élèves.
- Un **exercice de synthèse** est souvent plus difficile, il présente des systèmes complexes, nécessite de mettre œuvre plusieurs méthodes, voire plusieurs parties du cours.

2. Faire VRAIMENT un exercice et en tirer parti

→ En général

Nombreux sont les élèves qui enchaînent les exercices au brouillon, avec le corrigé sous les yeux, en bâclant la rédaction et la présentation. Inutile de se fatiguer, ça ne sert absolument à rien, sauf à donner l'illusion trompeuse de travailler et à perdre beaucoup de temps. Il faut en faire moins, mais il faut les faire bien : entièrement, avec les blocages sur les difficultés, les erreurs, les « tourner en rond » et autres crises d'énervement. La finalité est le concours (ou l'examen) : il n'y aura ni corrigé, ni cahier, ni professeur, ni internet ce jour-là. Définitivement pas ! Le corrigé est pour plus tard. Il faut essayer, essayer encore, et en cas de résistance, résister farouchement à la tentation du corrigé (même juste un coup d'œil), mais plutôt retravailler le point de cours associé, un exercice plus simple, puis reprendre encore l'exercice.

→ Utiliser cet ouvrage

Énoncés et corrigés sont clairement identifiés par des fonds de couleur, des renvois de pages pour aller vite à ce qu'on cherche. Souvent le cours précise un numéro d'exercice en rapport avec le point traité. Quand l'exercice a été vraiment travaillé, la lecture du corrigé devient pertinente. Il ne faut pas le survoler en ne vérifiant que les valeurs numériques. Nous avons émaillé ces corrigés de commentaires « bien comprendre » qu'il faut prendre le temps de lire, même si on pense avoir compris, car un détail important a pu être négligé, un piège évité uniquement par chance. Des méthodes de résolution y sont explicitement mises en évidence, que le lecteur pourra reproduire dans bien des exercices.

Bien comprendre

Il faut savoir identifier les difficultés classiques et apprendre à les contourner, faire des liens entre les sujets. C'est ici qu'une difficulté récurrente, classique, insidieuse, qu'il faut dompter, est expliquée.

POINT MÉTHODE

■ Il ne faut pas négliger les exercices simples, tenter un exercice compliqué sans maîtriser le facile est une perte de temps qui peut décourager. Par ailleurs, si les exercices d'application directe du cours posent difficulté, c'est que le cours n'est pas acquis. Les énoncés y sont volontairement concis, on attend d'un étudiant qu'il sache présenter sans aide ce genre de problème et sa solution.

■ **IMPORTANT :** *Aucune donnée qui figure dans la base de données (constantes fondamentales et grandeurs usuelles) p. 537 à 540 n'est rappelée dans les exercices. Il est essentiel d'en connaître un maximum, cela fait gagner du temps et donne des ordres de grandeurs pour répondre à des questions ou analyser ses résultats. Savoir identifier les grandeurs nécessaires est efficace pour dominer la résolution d'un exercice. Les rechercher, voire les connaître par cœur est particulièrement rentable.*

■ Le nombre de **chiffres significatifs** dans les résultats n'est pas nécessairement celui de la donnée la moins précise, comme martelé au lycée. En effet, si la notion de chiffres significatifs est essentielle dans une mesure réelle, en exercice on n'y attache pas une importance excessive. Il n'est pas pertinent si une donnée est $P = 1$ bar de mettre tous les résultats avec un seul chiffre significatif. Inversement, on ne donnera pas les 12 décimales de la calculatrice ! On fera preuve de discernement et d'intelligence, généralement, exprimer un résultat avec 2 ou 3 chiffres sera le plus approprié.

La connaissance s'acquiert par l'expérience, tout le reste n'est que de l'information. ALBERT EINSTEIN

III Méthodes générales utiles en physique

1. Poser le problème

Trop d'élèves, bien que volontaires et travailleurs, n'ont aucune méthode pour résoudre un problème. Ils pensent que, sous prétexte de concours ou d'énoncé long, il faut aller le plus vite possible dans les calculs pour gagner du temps et faire un maximum du sujet. Même s'il ne s'agit pas de lambiner, cette stratégie est vouée à l'échec. Poser le problème, c'est s'assurer que l'énoncé a été bien lu, sans omission, c'est s'imprégner du sujet (indispensable en concours), c'est dessiner un chemin vers la solution, c'est prévoir les étapes incontournables, bref, c'est maîtriser son destin. Il est donc temps de s'approprier une (vraie) méthode de résolution.

Une petite image pour le comprendre : un alpiniste qui souhaite escalader un sommet prépare son expédition, étudie la météo, repère un trajet optimal, choisit son matériel avec soin avant de se lancer. Si un prétendant à l'escalade néglige ces précautions et fonce sur la montagne, il risque la catastrophe et n'arrivera jamais au

sommet. Il en va de même pour un exercice, l'entamer par la première formule qui tombe sous la main est une erreur aussi grave que fréquente. Dans le tableau qui suit, la démarche, qu'on pourrait appeler de l'alpiniste chevronné, apparaît clairement. Tout autre domaine de la physique pourrait y être ajouté.

THÈME	ÉLECTRICITÉ	MÉCANIQUE	THERMODYNAMIQUE
Poser le problème Schéma Grandeurs utiles Valeurs numériques Notations choisies	Schéma de circuit Tensions et intensités définies sur le schéma avec notations et orientations Paramètres du circuit	Schéma du problème, axes du référentiel, base de projection, forces, données (dimensions, angles...)	Schéma du dispositif, nature des parois des enceintes, pressions, températures, volumes, ... Schéma synoptique des états successifs du système et des transformations
Cadre ou hypothèses de travail Outils	ARQS Résistances négligeables Conditions initiales Relations entre les grandeurs	Nature du référentiel, définition du système, frottements négligés, conditions initiales Vecteurs cinématiques	Réversibilité des transformations, Choix du système (fermé en général)
Appliquer une loi physique	Loi des nœuds Loi des mailles	PFD (TRC ou TMC) Théorème énergétique	1 ^{er} Principe 2 nd Principe
Calculs	Les enchaîner avec rigueur, liens logiques, sans précipitation, mais sans multiplier les étapes		
Résultats	Équations différentielles des grandeurs électriques, régimes, gains, déphasages, périodes...	Équations différentielles, équations horaires, énergies, nature des mouvements...	Travail ou chaleur échangés, rendement d'une machine, bilan énergétique ou entropique
Analyse et conclusion	L'équation ou le comportement du système est-il conforme à mes prévisions ? Puis-je le ramener à un autre système connu ? Les signes sont-ils cohérents ? Les valeurs numériques sont-elles pertinentes ? Comment tel paramètre agit-il sur le système ? Que se passe-t-il s'il varie, si je le néglige ? Puis-je comparer ce système à un autre connu ? À un exemple concret du quotidien ?		

2. Les mathématiques, langage de la physique

La physique utilise les mathématiques pour formuler ses questions, traduire sa pensée, résoudre les problèmes, structurer la description des systèmes, synthétiser les idées fondamentales ... **On ne peut pas progresser en physique sans le support des mathématiques et du calcul.** Les plus grands physiciens l'ont répété. Le physicien peut être amené à utiliser des concepts mathématiques très sophistiqués, voire à initier le développement de théories mathématiques inédites pour les besoins de sa cause. Bien plus modestement, au niveau des premières années d'études supérieures, les mathématiques utiles au physicien sont clairement identifiées. Les outils mathématiques utiles au propos sont brièvement rappelés en début de chaque chapitre. Ils se déclinent en quelques domaines bien identifiés.

OUTILS MATHÉMATIQUES

- **Calcul différentiel** : dérivation, différentiation, opérateurs (gradient...), fonctions usuelles, fonctions de plusieurs variables, développements limités.
- **Calcul intégral** : primitives, intégration, équations différentielles, intégrales simples et multiples.
- **Calcul vectoriel** : produit scalaire, produit vectoriel, projection de vecteurs, bases de coordonnées.
- **Trigonométrie** : fonctions, formules utiles, cercle trigonométrique.
- **Nombres complexes** : propriétés des nombres complexes, exponentielle complexe, plan complexe.

Le physicien fait confiance au mathématicien pour lui fournir des outils appropriés. Pour autant, leur signification ne doit pas être méconnue (par exemple : la dérivation comme moyen de comprendre les variations d'une grandeur, l'intégration comme moyen d'effectuer une somme continue). Il faut aussi comprendre que le physicien manipule des grandeurs physiques qui prennent sens dans la réalité et qu'un assouplissement de l'exigence mathématique lui est indispensable : par exemple, la pression P dans l'atmosphère peut s'étudier selon l'altitude z ou selon la température T . Parce qu'il s'agit de la même grandeur physique, le physicien écrit $P(z) = P(T)$, ce que le mathématicien récuse.

3. Se réconcilier avec le calcul

Le calcul, autrefois meilleur ami du taupin, est devenu sa bête noire, son pire ennemi, alors qu'il est notre plus grand allié, notre secours permanent vers la solution. Il n'est que technique, donc maîtrisable. Autrement plus difficile et subtile est l'analyse physique d'un problème. Les programmes tendent à dispenser les élèves du calcul, voire à leur en interdire l'accès. C'est aussi improductif que d'interdire à un basketteur professionnel de sauter ou à un musicien de lire une partition... Par ailleurs, la physique est une science qui explique la nature et les calculs doivent être rédigés, enchaînés par des liens logiques et justifiés. Nous croyons à la vertu de l'exemple, aussi proposons-nous des corrigés rédigés, avec des calculs bien lisibles et ordonnés, afin que le lecteur puisse s'en inspirer pour présenter ses copies.

4. Les bons réflexes

- ➔ **Rédaction** : La physique s'explique dans un français d'autant plus clair qu'elle est bien comprise. Les rapports des jurys de concours insistent régulièrement sur l'importance de rédiger soigneusement.
- ➔ **Schématisation** : La traduction d'un énoncé par un schéma reste le meilleur moyen de le comprendre et le point de départ le plus efficace de la résolution.
- ➔ **Notations** : Elles doivent être parlantes, et, dans le cours, nous les avons systématisées (parfois en les alourdissant) pour qu'aucune ambiguïté ne subsiste, en particulier dans l'apprentissage des formules. Dans les exercices, cependant, les notations sont variées, car on doit s'adapter à tout choix d'un énoncé.
- ➔ **Homogénéité et équations aux dimensions** : À employer sans modération ! C'est un moyen puissant de trouver des réponses, de repérer des erreurs et de les corriger.
- ➔ **Calculs d'ordres de grandeur** : Ils donnent rapidement un résultat numérique sans perdre de vue son objectif. Ils permettent de vérifier rapidement un calcul et de détecter de nombreuses erreurs.
- ➔ **Structure et rigueur** : Le raisonnement se construit grâce aux lois de la physique, dans le respect de la logique mathématique et le cadre de la rigueur scientifique.
- ➔ **Pertinence et culture générale** : Tout résultat demande à être analysé et sa pertinence, dans le cadre du problème ou au-delà, ne doit faire aucun doute. Une bonne culture scientifique est alors indispensable.

On fait la science avec des faits, comme on fait une maison avec des pierres.

Mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison.

HENRI POINCARÉ (1860-1912)

En conclusion

Percevoir les secrets des lois de la nature est le but de la physique. Il n'est de grand physicien qui ne s'émerveille de la richesse intérieure qu'apporte cette recherche. C'est pourquoi, si nous n'avions qu'un seul conseil à donner au lecteur, ce serait d'être curieux de l'Univers qui l'entoure...!

L'ultime but de la science est de fournir une théorie unique qui décrive l'Univers dans son ensemble. **STEPHEN HAWKING (1942-)**

L'oscillateur harmonique

Les systèmes oscillants sont fréquemment rencontrés dans tous les domaines de la physique (mécanique, électricité, physique atomique, thermodynamique...). Très souvent, l'étude du comportement d'un système au voisinage d'une position d'équilibre stable conduit à une évolution de type « oscillateur harmonique » que l'on étudie dans ce chapitre à partir de l'oscillateur mécanique à une dimension, modélisé par le mouvement horizontal sans frottement d'une masse accrochée à un ressort idéal, dont les propriétés pourront facilement être étendues aux autres domaines. Par ailleurs dans ce premier chapitre, outre l'étude d'un système classique, plusieurs outils fréquemment utilisés en physique sont abordés et expliqués simplement (équation différentielle, équation aux dimensions...).

OUTILS MATHÉMATIQUES

■ **Notation d'une dérivée** : La notation f' utilisée en mathématiques pour exprimer la dérivée de la fonction f est proscrite la plupart du temps en physique, en particulier en raison du grand nombre de variables différentes utilisées. On emploie donc une notation qui ne laisse aucune ambiguïté à ce sujet :

$$\frac{df}{dx} \text{ signifie dérivée de } f(x) \text{ par rapport à } x ; \quad \frac{dx}{dt} \text{ signifie dérivée de } x(t) \text{ par rapport à } t$$

La variable t étant très fréquente, on note avec des « points » les dérivées correspondantes :

$$\frac{du}{dt} = \dot{u} \quad \text{et} \quad \frac{d\dot{u}}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2} = \ddot{u} \quad \text{la variable } t \text{ est nécessairement le temps}$$

■ **Dérivées des fonctions trigonométriques** :

$$\frac{d \cos \theta}{d\theta} = -\sin \theta \quad \text{et} \quad \frac{d \sin \theta}{d\theta} = \cos \theta$$

■ **Dérivée d'une fonction de fonction** : l'expression $(u(v(x)))' = v'(x) \times u'(v(x))$ sera plutôt écrite :

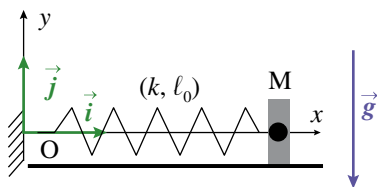
$$\frac{d[u(v(x))]}{dx} = \frac{d[u(v)]}{dv} \frac{dv(x)}{dx} \quad \text{en particulier :} \quad \frac{d[\cos[\theta(t)]]}{dt} = \frac{d(\cos \theta)}{d\theta} \frac{d\theta(t)}{dt} = -\dot{\theta} \sin[\theta(t)]$$

$$\text{d'où :} \quad \frac{d[\cos(\omega t)]}{dt} = -\omega \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad \frac{d[\sin(\omega t)]}{dt} = \omega \cos(\omega t) \quad (\omega = \text{constante})$$

I Étude dynamique

1. Description du dispositif masse + ressort

Dans tout ce chapitre, on étudie le mouvement d'un solide de petite dimension, de masse m , dont la position est repérée par le point M, en mouvement dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ galiléen. Pour simplifier, on note : $\vec{v} = \vec{v}_M^{(\mathcal{R})}$ et $\vec{a} = \vec{a}_M^{(\mathcal{R})}$ la vitesse et l'accélération de M dans $\mathcal{R}$.

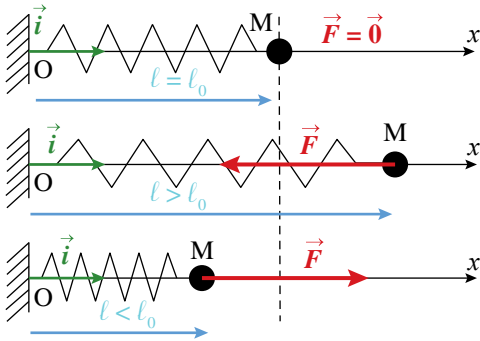


Cette masse M peut glisser sans frottement sur un plan horizontal. Elle est attachée à l'extrémité d'un ressort idéal, c'est-à-dire parfaitement élastique et sans masse, dont l'autre extrémité est fixée en un point O. Le ressort est caractérisé par sa longueur à vide notée ℓ_0 et par sa constante de raideur k (unité : $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$) et se déforme selon l'axe (Ox). L'accélération de la pesanteur $\vec{g}$ est uniforme, selon $-\vec{j}^1$.

1. On a noté la base selon la notation familière au lycée, des notations plus systématiques seront introduites au chapitre 12.

→ Force de rappel élastique exercée par un ressort

Pour un point matériel M accroché à un ressort idéal de longueur à vide ℓ_0 (au repos) et de constante de raideur k ($k > 0$), on comprend intuitivement et on vérifie expérimentalement que :



si $\ell = \ell_0$ la force de rappel est nulle.

si $\ell > \ell_0$ la force de rappel est selon $-\vec{i}$ et proportionnelle à l'allongement : $\Delta\ell = \ell - \ell_0$

si $\ell < \ell_0$ la force de rappel est selon $+\vec{i}$ et proportionnelle à l'allongement : $\Delta\ell = \ell - \ell_0$

Définition

Dans tous les cas, la **force de rappel** ou **force élastique** exercée par le ressort sur M est proportionnelle à l'allongement $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ du ressort (grandeur algébrique : positive ou négative) selon la loi :

$$\vec{F} = -k (\ell - \ell_0) \vec{i}$$

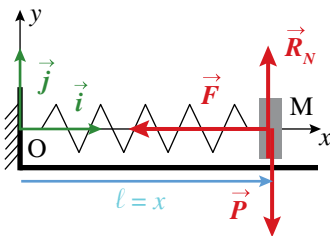
ℓ_0 est la longueur à vide du ressort, k est la **constante de raideur** du ressort qui s'exprime en N.m^{-1} .

POINT MÉTHODE

■ La notion d'**allongement** doit toujours être comprise au sens algébrique du terme (sa valeur peut être positive ou négative) et représente la différence entre la longueur du ressort dans un état quelconque et sa longueur à vide. Pour un ressort horizontal, la **longueur à vide** coïncide avec la longueur à l'équilibre, mais ce ne sera pas le cas pour un ressort vertical par exemple.

■ Afin de s'éviter des erreurs de signes, on schématisera toujours le système avec un allongement positif, et on écrira algébriquement la force de rappel, puis on conservera cette **expression algébrique** lors de la projection de la 2^e loi de Newton.

2. Mise en équation du mouvement



Forces appliquées à M dans $\mathcal{R}$ galiléen :

Force de rappel du ressort : $\vec{F} = -k (\ell - \ell_0) \vec{i} = -k (x - \ell_0) \vec{i}$

Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{j}$

Réaction du support : $\vec{R}_N = R_N \vec{j}$

Frottements négligés.

On applique la deuxième loi de Newton au système M dans $\mathcal{R}$ galiléen que l'on projette ensuite dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$m\vec{a}_M^{(R)} = \vec{F}_{ext} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{R}_N \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{x} = -k(x - \ell_0) \\ m\ddot{y} = 0 = R_N - mg \end{cases} \quad (1)$$

(2)

L'équation (1) obtenue est une équation différentielle, car elle relie une fonction (ici $x(t)$) à ses dérivées (ici $\ddot{x}(t)$). C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et second membre non nul.

Remarque : L'équation (2) montre que la réaction normale compense le poids (cas particulier d'un mouvement horizontal, dans un référentiel galiléen, sans autre force verticale).

POINT MÉTHODE

■ Une **équation différentielle** (ED) est une équation dont l'inconnue est une fonction. Les termes de l'équation différentielle font apparaître les dérivées de cette fonction, ainsi que la variable dont dépend la fonction. Résoudre l'équation, c'est déterminer l'expression de cette fonction. Il faut avoir à l'esprit que la résolution revient plus ou moins implicitement à intégrer les expressions des dérivées. Or la primitive d'une fonction est toujours définie à une constante près. Ainsi la solution générale d'une équation différentielle est une famille de fonctions.

■ Une équation différentielle à second membre nul est linéaire si toute combinaison **linéaire** $\alpha u + \beta v$ (α, β réels) de solutions u, v , est aussi solution. Par extension on dira qu'une équation à second membre non nul est linéaire si l'équation à second membre nul l'est.

■ La **résolution** des équations différentielles fait l'objet de cours de mathématiques approfondis, dont le physicien utilise les résultats². La nature des solutions dépend évidemment de la nature de l'équation, donc il est essentiel face à une équation différentielle de déterminer à quelle catégorie elle appartient.

■ On commencera par l'écrire sous une **forme standard**, en plaçant à gauche de l'égalité, tous les facteurs contenant la fonction ou ses dérivées, et à droite tous les autres facteurs. On ordonnera ensuite les dérivées en commençant par l'ordre le plus élevé et, généralement, on factorisera de façon que le coefficient du premier terme soit égal à 1. On donnera alors les indications suivantes : équation différentielle du n-ième ordre, linéaire ou non, à coefficients constants ou non, avec second membre non nul ou non.

Exemple : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \ell_0$ ED du second ordre linéaire à coefficients constants et second membre non nul

$\frac{dv}{dt} + \alpha v^2 = 0$ ED du premier ordre non linéaire à coefficients constants et second membre nul

$\frac{dp}{dz} = -\mu g$ ED du premier ordre linéaire à coefficients constants et second membre non nul

■ Enfin, on sera vigilant sur la **variable** dont dépend la fonction ici dans l'ordre $x(t), v(t), p(z)$

Afin d'introduire un paramètre pertinent, on détermine la dimension du facteur k/m :

$$\left[\frac{k}{m} \right] = \frac{[k]}{M} = \frac{(M.L.T^{-2}).L^{-1}}{M} = T^{-2}$$

On introduit donc le paramètre ω_0 , une pulsation, qui vaut : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et l'équation (1) se réécrit :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \ell_0$$

On remarque par ailleurs que ℓ_0 s'identifie ici à la position d'équilibre x_{eq} du système.

2. En particulier, l'unicité des solutions est généralement considérée comme établie.

Définitions

■ On appelle **oscillateur harmonique non amorti** (ou oscillateur harmonique pur ou oscillateur harmonique libre idéal), noté OH, tout système à un degré de liberté dont l'évolution au cours du temps, en l'absence d'excitation extérieure, est régie par une équation différentielle du type :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq} \quad (E)$$

■ Le paramètre ω_0 dans (E) est la **pulsation propre** de l'oscillateur harmonique et x_{eq} la position d'équilibre du système. La pulsation s'exprime en rad.s^{-1} .

■ Dans le cas du dispositif masse-ressort étudié ici, la pulsation propre vaut : $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

■ D'une façon générale en physique, le terme « harmonique » qualifie un système décrit par une grandeur dont les variations temporelles sont sinusoïdales.

POINT MÉTHODE

■ L'**équation aux dimensions** est un outil extrêmement commode, qui permet non seulement de déterminer l'unité d'une grandeur, mais aussi de vérifier l'homogénéité³ d'une expression, de détecter des erreurs de calcul littéral et d'introduire des paramètres caractéristiques (constante de temps par exemple) d'un système.

■ On obtient la **dimension d'une grandeur** quelconque à l'aide de toute formule physique correcte, car la physique s'appuie sur des lois toutes cohérentes et homogènes. Ainsi ci-dessus, on a déterminé la dimension de la constante k , à l'aide de celle d'une force. On peut utiliser la deuxième loi de Newton pour obtenir la dimension de la force : $[F] = [ma] = MLT^{-2}$

■ S'il a été toléré au lycée une écriture sur les unités, on s'attachera maintenant à travailler en dimension, notion qui est valable quel que soit le système d'unités. La dimension d'une grandeur s'écrit entre crochets et les dimensions présentes dans les unités de base du système international s'écrivent sans crochet. En mécanique on se ramènera généralement à trois d'entre elles : L = Longueur ; M = Masse ; T = Temps.

II Description du mouvement

1. Solution de l'équation différentielle

L'équation du mouvement $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$ a pour solution générale $x(t) = x_H(t) + x_{SP}(t)$ où $x_H(t)$ et $x_{SP}(t)$ sont respectivement :

$x_H(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ la solution générale de l'équation homogène : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$x_{SP}(t) = x_{eq} = \text{constante}$ une solution particulière de l'équation complète : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$

Résultats

■ Le mouvement quelconque de la masse fixée au ressort est un mouvement oscillant régi par des fonctions sinusoïdales du temps :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + x_{eq} \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont deux constantes d'intégration réelles.}$$

■ Le système oscille autour de sa position d'équilibre :

$$X(t) = x(t) - x_{eq} = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

3. La vérification de l'homogénéité permet de corriger un nombre considérable d'erreurs de calcul. Les erreurs d'homogénéité sont pourtant tellement fréquentes dans les copies, que certains professeurs possèdent même un tampon « inhomogène » pour les indiquer !

■ On vérifie aisément que l'expression ci-dessus est bien une solution de l'équation différentielle (E). En effet :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + x_{eq} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = 0 - \omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t) \\ \ddot{x}(t) = 0 - \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t) - \omega_0^2 B \sin(\omega_0 t) \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$$

Définitions

■ Le mouvement de l'oscillateur harmonique peut s'écrire :

$$x(t) = x_{eq} + X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{ou} \quad x(t) = x_{eq} + X_m \sin(\omega_0 t + \psi)$$

■ X_m est l'**amplitude** de l'oscillation, φ ou ψ la **phase à l'origine**.

■ Les deux expressions ci-dessus, ainsi que la forme précédente, décrivent le même comportement. Selon la situation, les conditions initiales, la nature du système physique ou le but de son étude, on utilisera l'une ou l'autre forme. D'une façon générale, la première forme (somme d'un sinus et d'un cosinus) est plus commode pour déterminer les constantes d'intégration. Par contre la forme avec un seul cosinus est plus « physique », car adaptée pour connaître les caractéristiques du comportement du système (en particulier l'amplitude de l'oscillation, voir exercice n° 1 p. 22).

■ On peut toujours choisir $X_m \geq 0$ (voir exercice n° 1 p. 22).

POINT MÉTHODE

■ La **solution d'une équation différentielle** à second membre non nul est la somme de la solution générale de la même équation sans second membre (équation dite homogène), appelée **solution homogène** et d'une **solution particulière** de l'équation complète que l'on recherche sous la forme du second membre (par exemple sinusoïdal si ce second membre est sinusoïdal), donc ci-dessus sous forme d'une constante puisque le second membre est constant. Le cours de mathématiques en apportera la démonstration.

■ La solution générale introduit nécessairement autant de **constantes d'intégration** que d'ordre dans l'équation, donc deux (A et B ou X_m et φ ou X_m et ψ) dans le cas de l'oscillateur harmonique. Une résolution complète, dans le cadre d'un problème déterminé, passe par la détermination de ces constantes à l'aide de valeurs particulières qui seront généralement en physique les **conditions initiales** si la variable est le temps (ou les **conditions aux limites** si la variable est spatiale).

2. Prise en compte des conditions initiales

La solution de l'équation différentielle (E), du second ordre, comprend deux constantes d'intégration. Il est donc nécessaire de connaître deux conditions initiales du mouvement (C.I.), par exemple la position et la vitesse de M à la date $t = 0$, pour déterminer entièrement l'expression de $x(t)$. Si on choisit les conditions initiales suivantes : à $t = 0$ M est écarté de la position d'équilibre à l'abscisse $x_{eq} + x_1$ et lâché sans vitesse initiale, alors :

$$x(0) = x_{eq} + x_1 \quad \text{avec} \quad x_1 > 0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$\text{Soit :} \quad x(0) = x_{eq} + A \cos(\omega_0 \cdot 0) + B \sin(\omega_0 \cdot 0) = x_{eq} + A = x_{eq} + x_1 \quad \Rightarrow \quad A = x_1$$

$$\text{et} \quad \dot{x}(0) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 \cdot 0) + \omega_0 B \cos(\omega_0 \cdot 0) = \omega_0 B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$\text{d'où la solution :} \quad x(t) = x_{eq} + x_1 \cos(\omega_0 t)$$

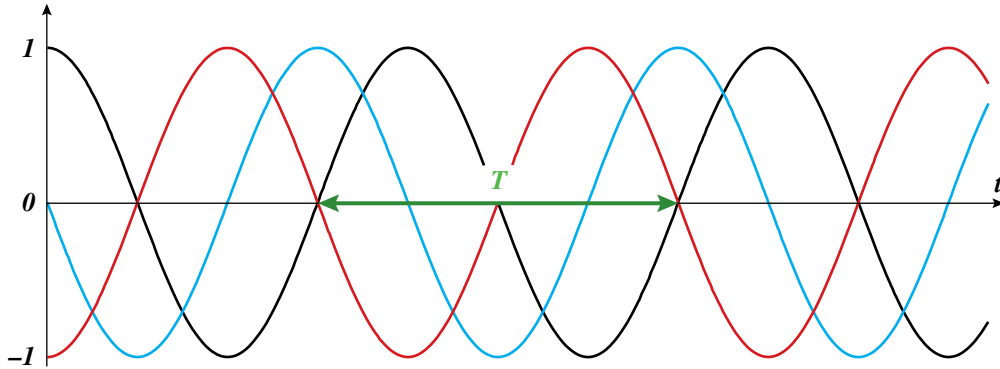
3. Description du mouvement sinusoïdal rectiligne

Si l'on conserve les conditions initiales de l'exemple du II-2. alors :

Écart à l'équilibre : $X(t) = x_1 \cos(\omega_0 t)$

Vitesse : $v(t) = \dot{x}(t) = \dot{X}(t) = -\omega_0 x_1 \sin(\omega_0 t)$

Accélération : $a(t) = \ddot{x}(t) = \ddot{X}(t) = -\omega_0^2 x_1 \cos(\omega_0 t)$



Dans le graphe ci-dessus les grandeurs ont été normalisées, c'est-à-dire transformées en grandeurs sans dimensions en les divisant par leur amplitude⁴. Ainsi elles peuvent figurer sur le même graphe, avec la même échelle. On constate alors aisément que lorsque l'écart à l'équilibre est extrême, l'accélération l'est aussi, mais la vitesse est nulle. Lorsque l'accélération est nulle, le point passe par sa position d'équilibre tandis que la vitesse est extrême. **Position et accélération sont en opposition de phase**, tandis que **position et vitesse sont en quadrature de phase**.

Résultats

- La solution générale de l'équation différentielle (E) : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$ d'un OH est :

$$x(t) = x_{eq} + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = x_{eq} + X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = x_{eq} + X_m \sin(\omega_0 t + \psi)$$

où A et B (ou X_m et φ ou X_m et ψ) sont des constantes réelles ($X_m \geq 0$) obtenues grâce aux C.I.

- Pour l'écart à l'équilibre $X(t) = x(t) - x_{eq}$ régi par (E') : $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$ la solution est :

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = X_m \sin(\omega_0 t + \psi).$$

Nom	Expression	Dimension	USI
Pulsation	ω_0	T^{-1}	rad.s⁻¹
Période	$T_0 = 2\pi / \omega_0$	T	s
Fréquence	$f_0 = 1 / T_0 = \omega_0 / 2\pi$	T^{-1}	Hz
Amplitude	$X_m > 0$	L	m
Phase instantanée	$\omega_0 t + \varphi$	$\emptyset$	rad
Phase à l'origine	φ	$\emptyset$	rad

La plupart des systèmes ou des phénomènes physiques ne sont pas harmoniques, c'est-à-dire que leurs variations ne sont pas sinusoïdales. Cependant on peut montrer qu'une fonction périodique peut s'écrire

4. On représente donc respectivement X/x_1 , $v/\omega_0 x_1$ et $a/\omega_0^2 x_1$.

comme une somme de fonctions sinusoïdales⁵. L'équation harmonique constituera donc la base de nombreux phénomènes. Ce concept a d'ailleurs déjà été abordé au lycée lors de l'analyse sonore et sera développé dans les chapitres qui suivent, où les signaux sinusoïdaux seront utilisés dans l'étude des ondes, et ensuite en électrocinétique. Une bonne connaissance de l'oscillateur harmonique est donc indispensable pour aborder l'étude de signaux plus complexes.

III Aspect énergétique

Les grandeurs énergétiques utilisées ici seront étudiées en détail dans le chapitre 14. On revient à un oscillateur dans le cas général avec :

$$x(t) = \ell(t) = x_{eq} + X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad ; \quad \dot{x}(t) = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad ; \quad x_{eq} = \ell_0$$

1. Énergie cinétique

L'énergie cinétique du point matériel M, de masse m , de vitesse $\vec{v} = \vec{v}_M^{(\mathcal{R})}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen est définie par :

$$E_C = \frac{1}{2} m (\vec{v}_M^{(\mathcal{R})})^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

C'est l'énergie associée au mouvement de M. Pour l'oscillateur harmonique on a :

$$E_{C,OH}(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

2. Énergie potentielle

Certaines forces, dites conservatives, sont associées à une énergie potentielle. Dans le cas de la force de rappel élastique du ressort idéal, cette énergie potentielle s'écrit :

$$E_P = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2$$

On peut vérifier alors que : $\vec{F} = -\frac{dE_P}{dx} \vec{i}$ pour le système masse + ressort.

C'est l'énergie stockée dans le ressort du fait de sa déformation. Pour l'oscillateur harmonique, on a :

$$E_P(t) = \frac{1}{2} k (x(t) - x_{eq})^2 = \frac{1}{2} k X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

En utilisant : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $X(t) = x(t) - x_{eq}$ on obtient :

$$E_{P,OH}(t) = \frac{1}{2} k X^2(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

3. Énergie mécanique

L'énergie mécanique E_m du point matériel M, de masse m , de vitesse $\vec{v} = \vec{v}_M^{(\mathcal{R})}$ et d'énergie potentielle E_P dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen est définie par :

$$E_m = E_C + E_P$$

5. La somme est alors discrète avec des fréquences multiples de la fréquence de la fonction étudiée, c'est l'analyse spectrale (ou analyse de Fourier). On généralise le concept à des fonctions non périodiques à l'aide d'une somme continue sous forme d'intégrale nommée transformée de Fourier.

C'est l'énergie totale du système. Pour l'oscillateur harmonique, on a :

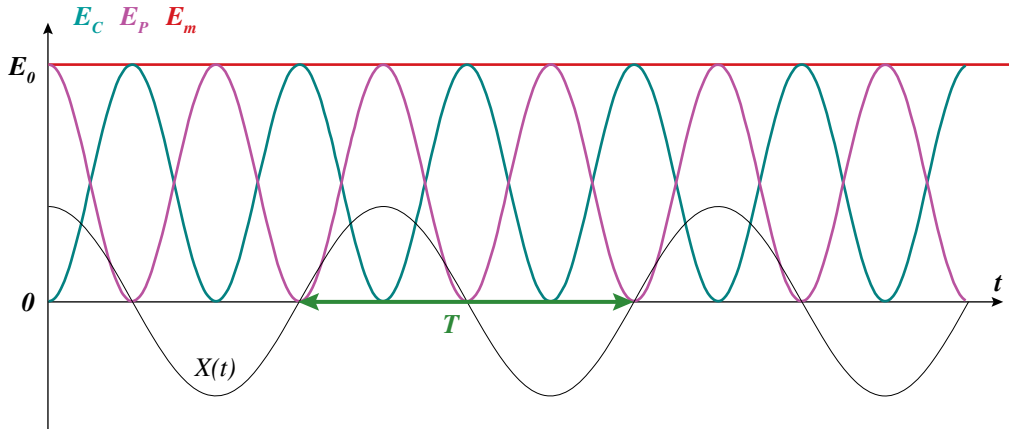
$$E_{m,OH}(t) = E_{C,OH}(t) + E_{P,OH}(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_{m,OH}(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_m^2 = \frac{1}{2}kX_m^2 = E_0$$

Résultats

- L'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique **se conserve au cours du temps**.
- La période des énergies cinétique et potentielle de l'oscillateur harmonique est la moitié de celle de ses oscillations.

Le graphe ci-dessous représente l'évolution temporelle des différentes formes d'énergies du système (avec les conditions initiales de l'exemple du II-2 : $x(t) = x_{\text{eq}} + x_1 \cos(\omega_0 t)$). Il apparaît clairement que la période des énergies cinétique et potentielle est la moitié de celle de $X(t)$ (voir exercice n° 3 p. 23).



N. B. : Dans le graphe ci-dessus, la courbe $X(t)$ a été placée pour servir de repère et donc elle est sans échelle particulière.

On verra dans le chapitre 14 de mécanique que la conservation de l'énergie mécanique est caractéristique des mouvements qui ne prennent en compte aucun phénomène dissipatif (frottements, etc.) dans leur modélisation.

4. Retour à l'équation du mouvement

On peut retrouver l'équation différentielle (E) du mouvement d'un OH à partir de la conservation de l'énergie mécanique au cours du temps. Comme elle est constante, sa dérivée par rapport au temps est nulle, d'où :

$$\begin{aligned} \frac{dE_{m,OH}}{dt} = 0 &= \frac{d(E_C(t) + E_P(t))}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}k(x(t) - x_{\text{eq}})^2 \right) \\ 0 &= m\dot{x}(t)\ddot{x}(t) + k(x(t) - x_{\text{eq}})\dot{x}(t) \end{aligned}$$

Ce qui équivaut, pour $\dot{x}(t)$ non identiquement nul, à : $\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{k}{m}x_{\text{eq}}$ ou $\ddot{\mathbf{x}}(t) + \omega_0^2 \mathbf{x}(t) = \omega_0^2 \mathbf{x}_{\text{eq}}$

POINT MÉTHODE

■ On obtient souvent des **équations différentielles** comme celle qui précède, avec une fonction en facteur, comme ici $\dot{x}$ la dérivée de x . Il faut bien comprendre qu'il s'agit ici de fonction et non de simples nombres comme dans une équation algébrique.

On peut écrire que l'équation $\dot{x}[m\ddot{x} + k(x - x_{\text{eq}})] = 0$ a deux formes de solutions :

$\dot{x}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ la vitesse du système est constamment nulle, il est donc immobile.

ou $m\ddot{x} + k(x - x_{\text{eq}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ le système a le mouvement oscillant (étudié dans le chapitre).

La première solution est dite triviale et ne présente généralement pas d'intérêt. De ce fait on écrit directement la seconde, en « simplifiant » par le terme $\dot{x}(t)$, même si cette fonction peut s'annuler pour certaines valeurs de t .

VERS LA COLLE

Questions de cours

- Dispositif masse – ressort horizontal : propriétés de la force de rappel, mise en équation du mouvement.
- Oscillateur harmonique : définition, expressions de la solution de l'équation différentielle, signification physique des différents termes, rôle des conditions initiales.
- Énergie de l'oscillateur harmonique : différentes formes d'énergie, expressions, conservation de l'énergie mécanique, équation différentielle à partir de l'énergie.

Erreurs à éviter

- La dérivée de $\sin(\theta)$ par rapport à t n'est pas $\cos(\theta)$ mais $\dot{\theta} \cos(\theta)$.
- La détermination des constantes d'intégration se fait une fois l'équation complètement résolue et pas sur la solution homogène seulement.

Quelques « trucs » utiles

- Un système oscillant oscille toujours par rapport à sa position d'équilibre, il sera donc plus commode de paramétrer le mouvement avec une variable dont l'origine est à la position d'équilibre (noté $X(t)$ dans le cours) plutôt que par rapport au support ($x(t)$).
- La forme $X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ est beaucoup plus commode pour exploiter les conditions initiales. Cependant l'utilisation de n'importe quelle forme doit conduire au final à la même expression (voir exercice n° 1 p. 22).

1 Mouvement d'un oscillateur harmonique (cours) ★

→ corrigé p. 24

On rappelle l'équation différentielle (E) vérifiée par un oscillateur harmonique : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$ avec ω_0 et x_{eq} constantes strictement positives.

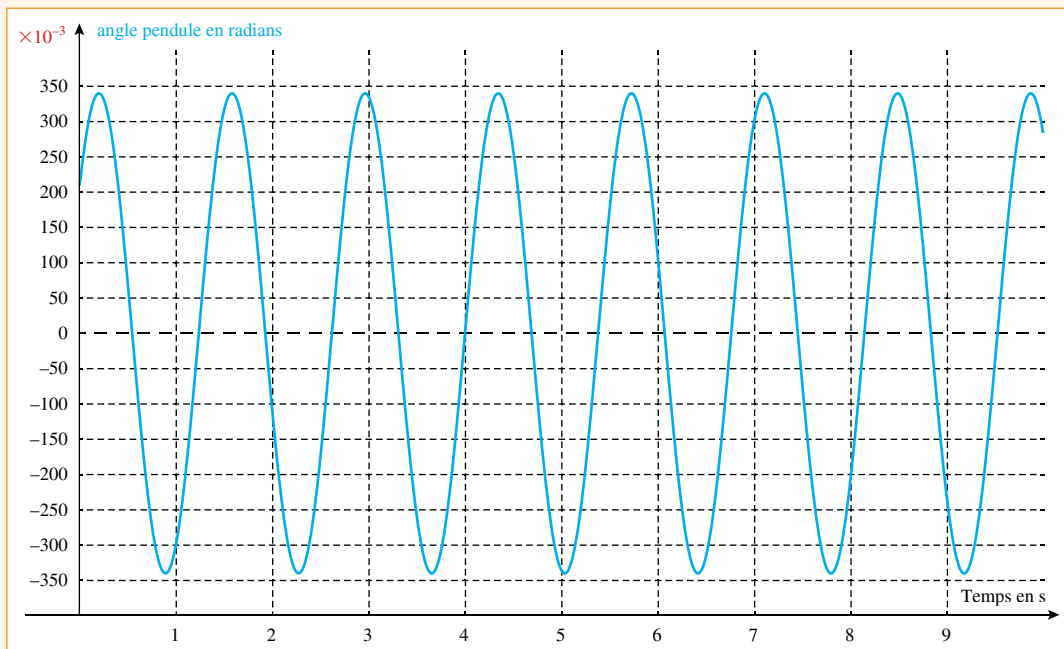
- ① Montrer que la fonction x est solution pour toute date t avec : $x(t) = x_{eq} + X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Justifier qu'on peut toujours choisir $X_m > 0$ (hors cas d'équilibre).
- ② Si l'on veut utiliser un sinus à la place du cosinus, $x(t) = x_{eq} + X_m \sin(\omega_0 t + \psi)$, comment doit-on modifier la phase à l'origine ?
- ③ Montrer que la solution proposée en ① est équivalente à : $x(t) = x_{eq} + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$, et donner la relation entre (A, B) et (X_m, φ) .
- ④ Avec $0 < X_m < x_{eq}$, tracer la courbe représentative de $x(t)$ pour les valeurs de φ suivantes : $\varphi = 0 ; \pi/2 ; \pi ; 3\pi/2$.

2 Étude expérimentale du pendule simple ★

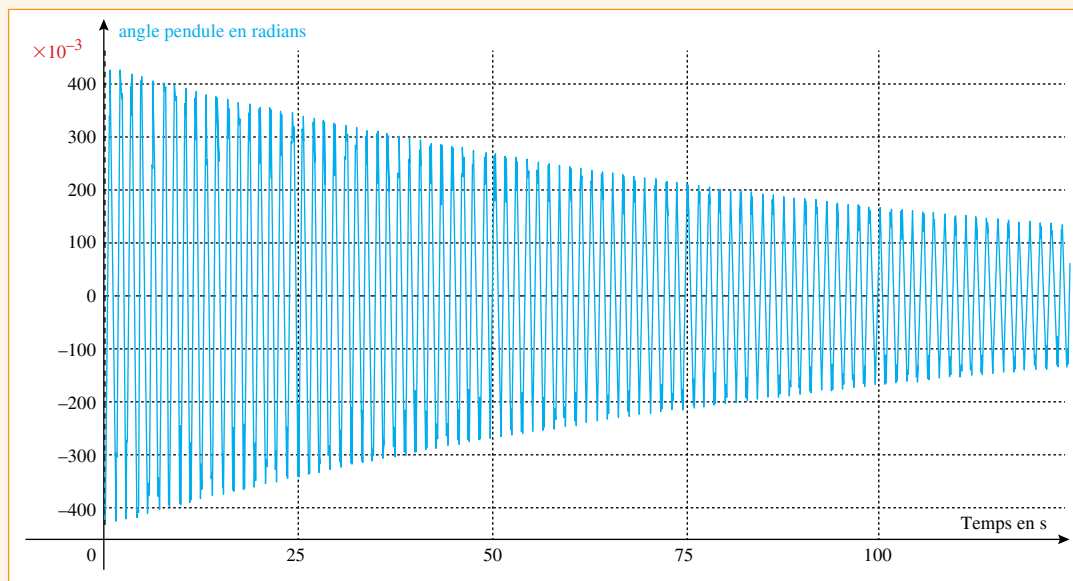
→ corrigé p. 24

Soit un pendule simple de longueur $L = 47$ cm, de masse $m = 300$ g, soumis à la pesanteur d'accélération $\vec{g}$ uniforme (de norme $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$).

- ① L'enregistrement ci-dessous, réalisé en travaux pratiques, représente l'évolution temporelle de l'angle (θ exprimé en radians) entre le pendule et la verticale au cours du temps (t en s). Cette courbe traduit-elle un comportement d'oscillateur harmonique ? Justifier.



- ② Par lecture graphique, déterminer : l'amplitude θ_m , la période T_0 , la fréquence f_0 , la pulsation ω_0 , la phase à l'origine φ du mouvement du pendule simple. Comparer avec la théorie : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$
- ③ Si l'on reproduit l'expérience avec une durée d'acquisition plus longue (125 s au lieu de 10 s), la courbe expérimentale obtenue a l'allure suivante :



Observe-t-on encore un comportement d'oscillateur harmonique pur ? Quelle est la différence avec le premier enregistrement ? Quel phénomène physique, négligé sur une durée courte, faudrait-il prendre en compte pour exploiter correctement l'acquisition effectuée sur une durée longue ?

3 Étude énergétique du pendule simple ★★

→ corrigé p. 25

Soit un pendule simple de longueur ℓ , de masse m , soumis à la pesanteur d'accélération $\vec{g}$ uniforme.

- ① Par analyse dimensionnelle, montrer que la pulsation d'oscillation ω_0 du pendule simple est inversement proportionnelle à la racine carrée de sa longueur et indépendante de sa masse. De quelle autre grandeur dépend-elle ? Quelle est son expression exacte ?
- ② Pour de petites oscillations, l'angle θ que fait le pendule avec la verticale vérifie l'équation différentielle (E) : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$. On impose à $t = 0$ un angle initial nul et une vitesse angulaire : $\dot{\theta}(t=0) = \omega_0 \theta_m > 0$. Déterminer l'expression de la solution $\theta(t)$ de (E) pour $t \geq 0$.
- ③ Exprimer l'énergie cinétique du pendule au cours du temps sachant que : $E_c = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2$. Quelle est la période de $E_c(t)$ (indication : utiliser une formule trigonométrique avec l'angle double) ?
- ④ Exprimer l'énergie potentielle du pendule au cours du temps sachant que : $E_p = \frac{1}{2} m g \ell \theta^2$. Quelle est la période de $E_p(t)$?
- ⑤ En déduire l'énergie mécanique du pendule simple. Se conserve-t-elle au cours du temps ?

4 Électron dans un puits de potentiel ★★

→ corrigé p. 26

Un électron de masse m et de charge $q = -e$ est piégé à l'intérieur d'un dispositif électromagnétique (région vide de charges). Il peut se déplacer uniquement dans la direction (Oy) avec une énergie potentielle :

$$E_p(y) = -\frac{1}{2} \frac{qV_0}{a^2} y^2$$

Le poids est négligé, il n'y a pas de frottements. On donne : $V_0 = 2,00 \text{ V}$ et $a = 3,00 \text{ mm}$

- ① Établir l'équation différentielle du mouvement de l'électron selon l'axe (Oy).
- ② De quel type de mouvement s'agit-il ? Déterminer la fréquence des oscillations de l'électron. A.N.

1 Mouvement d'un oscillateur harmonique

→ énoncé p. 22

- 1 Pour vérifier si la fonction proposée est bien solution de (E), on calcule ses dérivées temporelles que l'on remplace dans (E) :

$$x(t) = x_{eq} + X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

donne : $\dot{x}(t) = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

ce qui conduit bien à (E) :

Si $X'_m < 0$ on peut se ramener à :

donc il suffit de prendre :

et $\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$$

$$x(t) = x_{eq} + X'_m \cos(\omega_0 t + \varphi') = x_{eq} + (-X'_m) \cos(\omega_0 t + \varphi' + \pi)$$

$$X_m = (-X'_m) \text{ et } \varphi = \varphi' + \pi \text{ pour avoir toujours : } X_m > 0$$

- 2 D'après la trigonométrie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = x_{eq} + X_m \sin(\omega_0 t + \psi) = x_{eq} + X_m \cos(\omega_0 t + \psi - \pi/2),$$

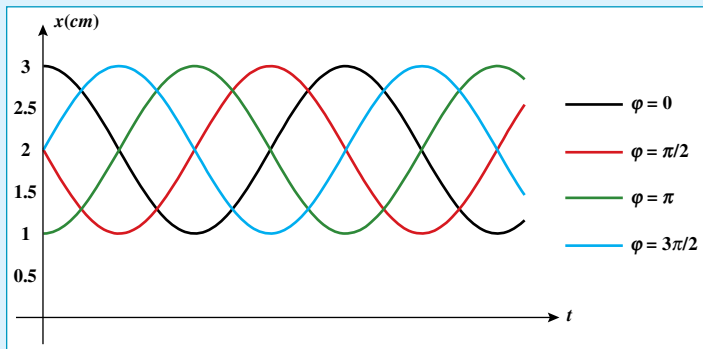
donc par identification avec la forme de solution vue en 1 il vient : $\varphi = \psi - \pi/2$ ou $\psi = \varphi + \pi/2$

- 3 Toujours à l'aide de la trigonométrie, on a pour toute date t :

$$x(t) = x_{eq} + X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = x_{eq} + X_m [\cos(\varphi) \cos(\omega_0 t) - \sin(\varphi) \sin(\omega_0 t)]$$

Alors : $\begin{cases} A = X_m \cos(\varphi) \\ B = -X_m \sin(\varphi) \end{cases}$ ou encore, avec $A \neq 0$: $\begin{cases} X_m = \sqrt{A^2 + B^2} > 0 \\ \tan(\varphi) = \frac{-B}{A} \end{cases}$

- 4 Pour les courbes ci-dessous on a pris $X_m = 1 \text{ cm}$ et $x_{eq} = 2 \text{ cm}$. On constate que, plus la phase à l'origine φ augmente, plus les maxima se décalent vers une date antérieure : φ traduit un décalage temporel.



2 Étude expérimentale du pendule simple

→ énoncé p. 22

- 1 La courbe peut correspondre à un oscillateur harmonique car l'évolution temporelle de l'angle θ au cours du temps semble sinusoïdale (amplitude constante et oscillations périodiques), de moyenne nulle.
- 2 Si l'on choisit une expression de l'angle sous la forme : $\theta = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ par lecture graphique, on obtient directement l'amplitude θ_m , la période T_0 et la phase à l'origine φ :

$$\theta_m = 0,340 \text{ rad}$$

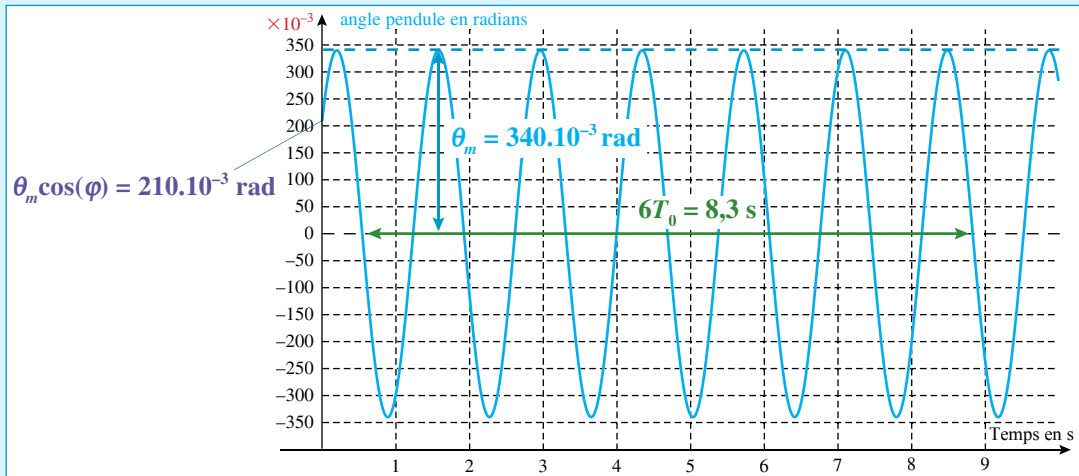
$$T_0 = 1,4 \text{ s}$$

$$\varphi = -\arccos(210/340) = -0,91 \text{ rad}$$

On calcule alors :

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = 0,72 \text{ Hz}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 4,5 \text{ rad.s}^{-1}$$



La formule théorique donne : $T_0 = 1,375$ s, le résultat est donc cohérent (écart de moins de 2 %).

Bien comprendre

- Il est toujours plus précis de mesurer plusieurs périodes, et de le faire au niveau des zéros de la fonction, plus faciles à repérer précisément que les extrema.
- On sera attentif à l'échelle d'un graphique à exploiter (ici par exemple le facteur 10^{-3} en ordonnée).
- Pour obtenir le signe de la phase à l'origine on vérifie l'évolution de la fonction, car la valeur lue peut correspondre aussi bien à 0,91 rad qu'à $-0,91$ rad. L'évolution ultérieure de la fonction cosinus (croît vers le maximum) permet de trancher en faveur d'une valeur négative de la phase à l'origine.

- ③ La seconde courbe expérimentale montre un mouvement oscillant dont l'amplitude diminue au cours du temps : il ne s'agit plus d'un oscillateur harmonique pur. La différence principale avec l'enregistrement précédent est la décroissance exponentielle de l'amplitude θ_m . Pour exploiter correctement cette acquisition, il faudrait prendre en compte la présence de frottements entre le pendule et l'air (frottement de type fluide), ce qui sera étudié aux chapitres 9 et 13.

3 Étude énergétique du pendule simple

→ énoncé p. 23

- ① Les paramètres pertinents qui interviennent dans le mouvement d'oscillation du pendule simple sont : ℓ , m , g . Par analyse dimensionnelle on pose *a priori* :

$$\omega_0 = K \ell^a m^b g^c \text{ où } K \in \mathbb{R}, \text{ nombre sans dimension avec : } [\omega_0] = [\ell^a m^b g^c]$$

$$\text{Soit : } T^{-1} = L^a M^b (L.T^{-2})^c \quad \text{ou encore : } T^{-1} = L^{a+c} M^b T^{-2c}$$

$$\text{Par identification : } \begin{cases} a = -1/2 \\ b = 0 \\ c = 1/2 \end{cases} \quad \text{il vient : } \omega_0 = K \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R} \quad \text{La théorie donne } K = 1.$$

Bien comprendre

Un dispositif présente toujours un nombre limité de paramètres. Les grandeurs qui vont caractériser son évolution temporelle ne peuvent dépendre que de ces paramètres. On cherche alors une relation homogène qui donne la grandeur souhaitée, ici une pulsation caractéristique, qui ne peut que s'exprimer en fonction d'une puissance quelconque de ces paramètres. Ce raisonnement a ses limites. En effet, l'expression attendue peut contenir des coefficients numériques, que la méthode ci-dessus ne permet pas de déterminer, car ils sont sans dimension.