

PCSI

PHYSIQUE

**1 DEVOIR CORRIGÉ
PAR SEMAINE**



*avec copies
& corrigés commentés*

Hugo Rondin-Khouya
Malik Kourdi



PCSI

PHYSIQUE

**1 DEVOIR CORRIGÉ
PAR SEMAINE**



Hugo RONDIN-KHOUYA

Professeur agrégé au lycée Galilée de Gennevilliers,
khôlleur au lycée Chaptal de Paris

Malik KOURDI

Professeur agrégé au lycée Rosa Parks de Montgeron



Conception graphique couverture : Nathalie FOULLOY

Conception graphique intérieur et mise en pages : Lise GARREAU

ISBN 9782340-116160

Dépôt légal : juin 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Remerciements

Nous remercions la maison d'édition Ellipses et plus particulièrement Manon SAVOYE et Thaïs LOISEL pour la confiance qu'elles nous ont donné.

Nous tenons également à remercier tous nos professeurs de l'agrégation de l'ENS Montrouge, en particulier Erwan ALLYS, Agnès MAÎTRE et Arnaud RAOUX qui nous ont énormément inspiré tout au long de notre préparation au concours durant l'année scolaire 2023/2024. En effet, certains sujets sont inspirés de nos manipulations de montage réalisées grâce au matériel de l'ENS, nous en profitons pour remercier Éric GUINEVEU sans qui ces manipulations n'auraient été possibles.

Nous remercions Boris CHENAUD, Yohann SCRIBANO (professeurs à l'université de Montpellier) et Françoise DEBU (professeure de physique en PSI au lycée Michelet) qui nous ont poussé à passer le concours de l'agrégation alors que nous doutions de nos capacités il y a de cela quelques années. Sans eux, nous n'en serions pas là aujourd'hui.

Des élèves de la PCSI1 du lycée Michelet (promotion 2024/2025) ont testé certains sujets. Des extraits de leurs productions sont présents dans ce livre. Nous remercions Joseph BULA, Clément ESNAULT, Clément BROSSARD, Pierre GUIMBERTAUD et Clément VERDONI.

Enfin, nous voulons remercier particulièrement les personnes qui ont participé à l'élaboration de cet ouvrage. Par ordre de relecture : Erwan ALLYS, Cyriaque AMEREIN et Baptiste CORRÈGE.

Bon travail et bon courage!

Avant-propos

Réussir aux concours de CPGE exige en amont une préparation intense et efficace. Dès la première année de PCSI, il est donc nécessaire d'acquérir des techniques de raisonnement ainsi que des techniques calculatoires qui permettront d'aborder sereinement la deuxième année dans l'optique de réussir par la suite les concours.

Les domaines étudiés en physique cette année sont vastes, et touchent à de nombreuses notions. Il faut donc s'y pencher scrupuleusement de telle manière à ne pas accumuler de retard en deuxième année, car tout ira plus vite et les contenus travaillés seront bien plus techniques. Une année de PCSI se découpe en deux semestres d'environ quinze semaines chacun, ce qui constitue en tout trente semaines. En ce qui concerne la progression en physique, il faut garder à l'idée qu'une nouvelle notion clef est abordée toutes les semaines.

Cet ouvrage a donc pour objectif d'accompagner l'étudiant semaine après semaine en lui proposant en première partie 30 sujets thématiques type concours dont les questions sont accessibles dès la classe de PCSI. Ils sont pour la plupart largement inspirés et réadaptés de sujets déjà tombés aux écrits. La difficulté des questions proposées dans les sujets est graduelle : des parties proches du cours auxquelles s'ensuivent des parties plus techniques. Certains sujets proposent des développements certes hors-programme (de niveau PC/PC* ou PSI/PSI*), mais très guidés, qui permettent une première approche de ce qui attend les étudiants en deuxième année.

La deuxième partie du livre propose des corrections pourvues/agrémentées de rappels de cours, de conseils de méthodologie, et parsemées de quelques copies d'élèves commentées. Les quinze premières corrections sont amplement détaillées, car nous estimons que lors du premier semestre, l'étudiant de PCSI doit parfaire sa rédaction et sa technique de calcul. Les quinze dernières corrections sont quant à elles plus succinctes, tout en présentant les étapes charnières du raisonnement et des calculs attendus. En effet, nous estimons qu'à cette étape de l'année, l'étudiant doit avoir acquis de bonnes compétences de rédaction et n'a plus nécessairement besoin d'être guidé sur toutes les étapes de calculs.

Si l'étudiant maîtrise à la perfection tous les points abordés dans ce livre, les bases de PCSI seront parfaitement acquises, et il aura également de l'avance pour certaines notions étudiées en classe de PC/PC* ou en classe de PSI/PSI*.

Les corrections du livre sont accompagnées des éléments suivants :



Le rappel de cours :

| Rappelle brièvement un ou plusieurs points importants du cours de PCSI.



Le point méthode :

| Rappelle des points de méthodologie pour consolider le raisonnement.



L'erreur à ne pas faire !

| Indique la/les faute(s) à ne surtout pas commettre.



Un exemple de copie d'élève commentée :

| Donne la réponse d'un élève. Des commentaires sur la production s'en suivent.



Remarque :

| Complète la réponse par un propos que nous jugeons utile de partager.

Sommaire

| | |
|---|---|
| Méthodologie de travail pour réussir son année de PCSI..... | 9 |
|---|---|

Devoirs

| | | | |
|-------------------|----|-------------------|-----|
| ■ Devoir 1 | 12 | ■ Devoir 16 | 69 |
| ■ Devoir 2 | 17 | ■ Devoir 17 | 72 |
| ■ Devoir 3 | 20 | ■ Devoir 18 | 77 |
| ■ Devoir 4 | 24 | ■ Devoir 19 | 81 |
| ■ Devoir 5 | 27 | ■ Devoir 20 | 84 |
| ■ Devoir 6 | 31 | ■ Devoir 21 | 89 |
| ■ Devoir 7 | 35 | ■ Devoir 22 | 93 |
| ■ Devoir 8 | 38 | ■ Devoir 23 | 97 |
| ■ Devoir 9 | 42 | ■ Devoir 24 | 101 |
| ■ Devoir 10 | 45 | ■ Devoir 25 | 104 |
| ■ Devoir 11 | 49 | ■ Devoir 26 | 107 |
| ■ Devoir 12 | 52 | ■ Devoir 27 | 110 |
| ■ Devoir 13 | 56 | ■ Devoir 28 | 115 |
| ■ Devoir 14 | 60 | ■ Devoir 29 | 118 |
| ■ Devoir 15 | 66 | ■ Devoir 30 | 122 |

Corrigés

| | | | |
|------------------------------|-----|------------------------------|-----|
| ■ Corrigé du devoir 1 | 128 | ■ Corrigé du devoir 16 | 249 |
| ■ Corrigé du devoir 2 | 137 | ■ Corrigé du devoir 17 | 254 |
| ■ Corrigé du devoir 3 | 143 | ■ Corrigé du devoir 18 | 266 |
| ■ Corrigé du devoir 4 | 149 | ■ Corrigé du devoir 19 | 273 |
| ■ Corrigé du devoir 5 | 157 | ■ Corrigé du devoir 20 | 279 |
| ■ Corrigé du devoir 6 | 166 | ■ Corrigé du devoir 21 | 286 |
| ■ Corrigé du devoir 7 | 176 | ■ Corrigé du devoir 22 | 294 |
| ■ Corrigé du devoir 8 | 187 | ■ Corrigé du devoir 23 | 303 |
| ■ Corrigé du devoir 9 | 194 | ■ Corrigé du devoir 24 | 309 |
| ■ Corrigé du devoir 10 | 202 | ■ Corrigé du devoir 25 | 314 |
| ■ Corrigé du devoir 11 | 215 | ■ Corrigé du devoir 26 | 319 |
| ■ Corrigé du devoir 12 | 223 | ■ Corrigé du devoir 27 | 326 |
| ■ Corrigé du devoir 13 | 229 | ■ Corrigé du devoir 28 | 335 |
| ■ Corrigé du devoir 14 | 236 | ■ Corrigé du devoir 29 | 341 |
| ■ Corrigé du devoir 15 | 244 | ■ Corrigé du devoir 30 | 351 |

Méthodologie de travail pour réussir son année de PCSI

L'entrée en classe préparatoire scientifique est une étape importante dans le parcours d'un étudiant. Le rythme de travail s'intensifie, les notions deviennent plus subtiles et les exigences augmentent sensiblement. Cette transition peut impressionner, mais elle est tout à fait accessible à condition d'adopter dès le départ des méthodes de travail efficaces et régulières.

Le cours constitue le socle fondamental du travail en classe préparatoire. Il ne s'agit pas seulement de le relire, mais de se l'approprier : définitions, hypothèses, résultats essentiels et méthodes doivent être parfaitement identifiés. Un bon indicateur de réussite est de savoir refaire les démonstrations exigées au programme de colle. Une relecture régulière est alors indispensable, il faut apprendre et maîtriser chaque cours le soir même de la journée durant laquelle il a été dispensé.

Les exercices jouent un rôle central dans l'apprentissage : ils permettent de comprendre comment le cours s'applique concrètement. Il est indispensable de chercher un exercice seul, même brièvement, avant de consulter une correction. En cas de difficulté, le retour au cours est souvent plus formateur qu'une lecture immédiate de la solution. Chaque exercice doit permettre d'identifier clairement les notions mises en jeu et les méthodes associées. Dans la mesure du possible, vous devez refaire les exercices « classiques » afin d'améliorer votre rapidité lors des devoirs.

La régularité du travail est un facteur déterminant de réussite en PCSI car tout va très vite et on peut facilement être submergé. Il est préférable de travailler tous les jours plutôt que de concentrer des efforts plus intenses sur de courtes périodes. La compréhension des notions se construit progressivement et nécessite du temps. Par ailleurs, cette régularité doit être appliquée à toutes les matières. Ainsi, vous serez préparés à l'approche d'un devoir surveillé sans pour autant accumuler du retard dans d'autres matières.

Une bonne organisation personnelle est alors essentielle. Disposer de supports de cours clairs et planifier ses révisions permettent de travailler plus efficacement. Il est tout aussi important de préserver une hygiène de vie équilibrée : un sommeil suffisant, une alimentation correcte et des temps de repos réguliers conditionnent directement la concentration et l'efficacité intellectuelle.

Enfin, la classe préparatoire doit être perçue comme une progression personnelle, et non comme une compétition permanente. Les rythmes d'apprentissage diffèrent d'un étudiant à l'autre. Ce qui importe est la capacité à analyser ses erreurs, à ajuster sa méthode de travail et à persévérer. La rigueur, la régularité et la constance sont les véritables clés de la réussite sur la durée. En conclusion, tout est à votre portée à condition d'y accorder le temps nécessaire et de croire en vous.

DEVOIRS



Optimisation de propriétés physiques de fibre optique



Objectifs du sujet :

- ▷ Retrouver la dimension d'une grandeur physique et être capable de déterminer une relation physique grâce à l'analyse dimensionnelle.
- ▷ Utiliser les lois de SNELL-DESCARTES.
- ▷ Connaître les questions types de l'exercice classique de la fibre optique.

▷ Les fibres optiques, telles que nous les connaissons aujourd'hui, sont pour la plupart composées de deux matériaux solides tels que le verre. Cependant, ces fibres sont assez fragiles. En réponse à cela, des chercheurs de l'*Empa* ont développé une fibre optique dont le cœur est composé de glycérine au lieu de verre. Elle peut transmettre des données de manière tout aussi fiable que la fibre de verre.

A) Analyse dimensionnelle de la viscosité de la glycérine

▷ La glycérine est un liquide visqueux. La viscosité (dynamique) d'un fluide se note généralement η . Plus η est élevé, plus le liquide est visqueux. On cherche, à partir de l'analyse dimensionnelle de l'équation de NAVIER-STOKES la dimension de η .

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right] = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta \Delta \vec{v}.$$

NB : Des précisions sur la signification des termes de cette équation sont données en annexe.

- Q 1.** À l'aide de l'analyse dimensionnelle, déterminer la dimension de η .
- Q 2.** La force de viscosité $\overrightarrow{F}_{\text{visc}}$ exercée par un fluide visqueux sur une boule de rayon R se déplaçant en son sein dépend de la viscosité dynamique η , du rayon R de la boule ainsi que de sa vitesse \vec{v} . La constante adimensionnée devant l'expression cette force sera prise égale à -6π . Déterminer l'expression de $\overrightarrow{F}_{\text{visc}}$.

B) Détermination de l'indice optique à l'aide d'un réfractomètre d'Abbe

▷ Un réfractomètre d'ABBE comprend deux prismes en verre identiques, d'indice $N = 1,73$, où la base est en forme de triangle rectangle dont l'un des angles est noté $A = 30^\circ$ (cf. schéma). Entre ces prismes est intercalé un film de glycérine d'indice n_G que l'on cherche à déterminer. L'indice optique de l'air sera noté $n_A = 1,00$.

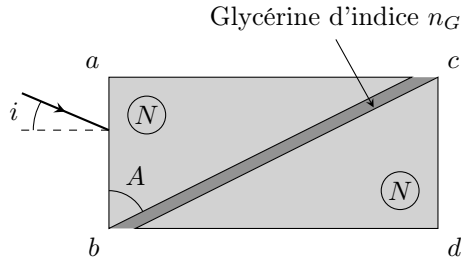


FIGURE 1 – Schéma du réfractomètre d'ABBE

- Q 3.** Reproduire sur votre copie le schéma et y faire figurer la marche du rayon incident, en supposant que celui-ci ressort par la face cd .
- Q 4.** En notant r et r' les angles de réfraction et d'incidence respectivement au niveau de l'interface air/verre de l'entrée et de l'interface verre/glycérine, déterminer une relation entre A , r et r' .
- Q 5.** Préciser le phénomène physique qui se produit si l'on observe une absence de rayon lumineux transmis par la face cd .
- Q 6.** En supposant que le rayon lumineux "disparaît subitement" lorsque $i = 57^\circ$, déterminer, en utilisant la loi de SNELL-DESCARTES de la réfraction, n_G en fonction de N , A et i . En déduire la valeur numérique de l'indice optique n_G de la glycérine.
- Q 7.** Indiquer quelle est la limite de mesure d'un tel dispositif.

Dans la suite du sujet, on prendra $n_G = 1,47$.

C) Étude de la fibre à saut d'indice

▷ La fibre à saut d'indice que nous allons étudier (voir figure 2) est formée d'un cœur de glycérine cylindrique d'axe (Ox) normal au dioptré air-cœur, de diamètre a , homogène et isotrope, d'indice de réfraction $n_G = 1,47$. La fibre est de longueur L . Le cœur est entouré d'une gaine en plastique homogène et isotrope, d'indice de réfraction n_P , légèrement inférieur à n_G : $n_P = 1,45$. En raison de la symétrie de révolution de la fibre autour de l'axe (Ox) , on se restreint à une étude dans le plan (xOy) . La célérité c de la lumière dans le vide sera notée c . L'indice optique de l'air est noté n_A et on prendra $n_A = 1,00$.

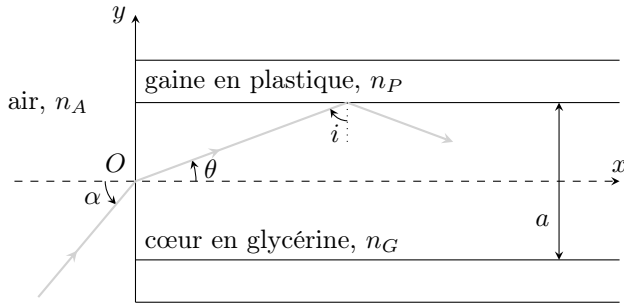


FIGURE 2 – Schéma d'une fibre optique à saut d'indice

- Q 8.** Indiquer pour quelle raison la fibre optique développée par les chercheurs de l'*Empa* présente un réel avantage par rapport à la fibre optique en verre usuelle.
- Q 9.** Un rayon lumineux monochromatique se propageant dans l'air, situé dans le plan (xOy) , pénètre dans le cœur de la fibre en O avec un angle d'incidence α . Montrer que le rayon reste dans le cœur si l'angle α est inférieur à un angle α_L appelé angle d'acceptance de la fibre optique dont vous donnerez l'expression en fonction de n_G et n_P .
- Q 10.** Calculer la valeur de α_L .
- Q 11.** Quel est le rayon qui traverse le plus rapidement la fibre? Exprimer, en fonction de L , c et n_G la durée de parcours T_1 de ce rayon.
- Q 12.** Quel est le rayon qui met le plus de temps à traverser la fibre? Exprimer en fonction de L , c , n_G et n_P la durée de parcours T_2 de ce rayon.
- Q 13.** En déduire l'expression de l'intervalle de temps $\delta T = T_2 - T_1$ en fonction de L , c , n_G et n_P . On posera $2\Delta = 1 - \left(\frac{n_P}{n_G}\right)^2$ avec $\Delta \ll 1$. Dans ces conditions, exprimer δT en fonction de L , c , n_G et Δ . Calculer la valeur de δT pour $L = 10$ km.

▷ On injecte à l'entrée de la fibre une impulsion lumineuse de durée τ_e , représentée ci-dessous, formée par un faisceau de rayons ayant un angle d'incidence $\alpha \in [0; \alpha_L]$.

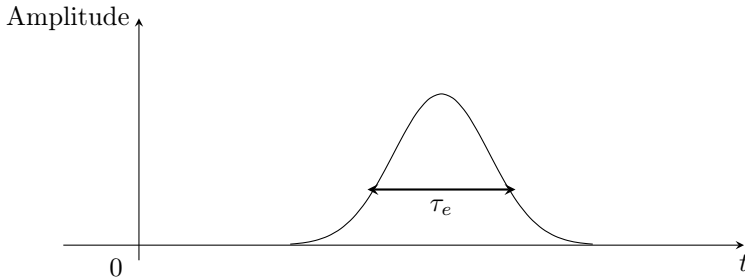


FIGURE 3 – Impulsion en entrée de la fibre optique.

- Q 14.** Reproduire la figure ci-avant. Représenter l’allure de l’impulsion en sortie de fibre. Préciser sa durée approximative τ_s . On négligera ici tout phénomène d’absorption de la lumière.
- Q 15.** Le codage binaire de l’information consiste à envoyer des impulsions lumineuses, appelées *bits*, périodiquement avec une fréquence f . En supposant τ_e négligeable devant δT , quelle est la fréquence f_{\max} de transmission qui empêche le recouvrement des impulsions à la sortie de la fibre ?
- Q 16.** En considérant L_{\max} la longueur maximale de fibre optique permettant d’éviter le recouvrement des impulsions, on définit le produit $B = L_{\max} \times f$ comme étant la bande passante de la fibre optique. Exprimer B en fonction de c , n_G et Δ .
- Q 17.** Expliquer l’intérêt d’introduire cette grandeur. Pour un débit de 100 Mbits par seconde, évaluer et commenter la longueur maximale de fibre optique que l’on peut utiliser pour transmettre le signal.

Données et formulaire

▷ Précisions sur l’équation de NAVIER-STOKES :

— ρ désigne la masse volumique de la particule de fluide étudiée

— \vec{v} est le vecteur vitesse de la particule de fluide étudiée

— \vec{g} est le vecteur champ de pesanteur

— P est le champ scalaire de pression

— $\overrightarrow{\text{grad}}$ est l’opérateur gradient. En coordonnées cartésiennes, l’opérateur gradient s’exprime de la façon suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z.$$

On a donc pour le gradient du champ de pression P :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(P) = \frac{\partial P}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{e}_z.$$

— Δ est l'opérateur laplacien. En coordonnées cartésiennes, l'opérateur laplacien s'exprime de la façon suivante :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

On a donc pour le laplacien du vecteur vitesse \vec{v} :

$$\Delta \vec{v} = \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}.$$



Voir de l'infiniment grand à l'infiniment petit



Objectifs du sujet :

- ▷ Maîtriser les relations de conjugaison.
- ▷ Tracer des rayons lumineux à travers un système optique composé de plusieurs lentilles.
- ▷ Connaître les questions types de l'exercice classique de la lunette astronomique et le microscope.

▷ Le XVII^{ème} siècle marque le développement des outils d'optique notamment avec la lunette astronomique et le microscope : l'Humanité s'apprête à se plonger dans l'observation de l'infiniment grand et de l'infiniment petit. En 1609, le physicien GALILÉE met au point une lunette astronomique lui permettant d'obtenir un grossissement allant jusqu'à $\times 30$. Il s'émerveille alors devant l'immensité de l'Univers et observe les astres du système solaire ainsi que d'autres étoiles. C'est d'ailleurs lui qui met en lumière le fait que Saturne possède des anneaux. Le microscope est également mis en place quelques années avant la lunette astronomique. Ce sujet propose d'étudier ces deux objets optiques modélisés par des assemblages de lentilles minces.

A) Lunette de Galilée : modélisation et observation des lunes de Jupiter

▷ On modélise la lunette de GALILÉE par une association de deux lentilles : une convergente notée \mathcal{L}_1 (objectif) et une divergente notée \mathcal{L}_2 (oculaire). L'objectif et l'oculaire ont respectivement une distance focale $f'_1 = 1\,330$ mm et $f'_2 = -94$ mm. La lunette de GALILÉE a été conçue pour qu'un œil emmétrope n'accomode pas lorsqu'il est placé derrière l'oculaire. On notera respectivement F'_1, F'_2 les foyers images des lentilles $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$, et F_1, F_2 les foyers objets des lentilles $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$

- Q 1. Préciser ce que l'extrait "l'œil n'accomode pas" signifie.
- Q 2. Après avoir redéfini le terme "système optique afocal", indiquer quelle(s) condition(s) le(s) foyer(s) image(s) et/ou objet(s) des lentilles \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 doit/doivent vérifier pour que la lunette de GALILÉE soit afocale.
- Q 3. Déterminer l'encombrement e de la lunette de GALILÉE qui est la distance entre la lentille \mathcal{L}_1 et la lentille \mathcal{L}_2 .
- Q 4. La lunette de GALILÉE est-elle plus ou moins encombrante que la lunette de KEPLER constituée de deux lentilles convergentes ?
- Q 5. Tracer deux rayons lumineux incidents, d'angle d'incidence α par rapport à l'axe optique et poursuivre le tracé de ces rayons dans la lunette et après la lunette, en justifiant les traits de construction.

Q 6. On nomme α' l'angle entre l'axe optique et les rayons émergents. Le grossissement de la lunette de GALILÉE est défini par $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$. Déterminer G en fonction de f'_1 et f'_2 . Faire l'application numérique.

▷ GALILÉE a été le premier, grâce à sa lunette astronomique, à pouvoir distinguer les lunes de Jupiter, dont Io. Le centre de Jupiter noté J se situe à une distance $D = 591 \times 10^6$ km du centre de la Terre noté T . La lune Io est située sur une orbite de rayon $R_I = 0,422 \times 10^6$ km du centre de la planète.

▷ On définit le pouvoir séparateur de l'œil comme la capacité à séparer visuellement deux objets distincts. Si deux objets sont vus sous un angle $\theta < \theta_L = 1'$ d'arc, alors ils ne peuvent être séparés et ces deux objets forment une unique tâche floue. Par définition, $1'$ d'arc $= \frac{1^\circ}{60}$. Pour un astre dont la luminosité est élevée (on ne précisera pas cette notion ici), le pouvoir de résolution peut être affecté. En ce qui concerne Jupiter, on considèrera qu'il vaut $10'$ d'arc.

Q 7. On pointe la lunette de GALILÉE dans la direction (TJ) . Déterminer l'angle α que font les rayons issus de Io avec l'axe optique de la lunette. Faire l'application numérique.

Q 8. Peut-on distinguer à l'œil nu la lune Io?

Q 9. Expliquer pourquoi GALILÉE a réussi à visualiser Io avec sa lunette astronomique.

B) Étude géométrique du microscope optique

▷ Un microscope optique est modélisé par deux lentilles minces convergentes : l'objectif, placé du côté de l'objet, et l'oculaire, placé du côté de l'observateur. Il est réglé pour donner une image à l'infini d'un objet réel AB , perpendiculaire à l'axe optique, A étant placé sur l'axe, légèrement avant le foyer objet de l'objectif. L'image finale est observée par un œil emmétrope placé au voisinage du foyer image de l'oculaire. On modélise l'objectif par une lentille \mathcal{L}_1 convergente de distance focale image f'_1 et l'oculaire par une lentille \mathcal{L}_2 convergente de distance focale image f'_2 . La notice constructeur précise également l'intervalle optique $\Delta = \overline{F'_1 F_2} = 16$ cm.

Q 10. Comment placer le foyer principal objet de \mathcal{L}_2 pour que l'image finale se forme à l'infini? Faire un schéma du dispositif. Placer un objet AB en tenant compte du principe de fonctionnement d'un microscope puis tracer la marche de 3 rayons issus de B en faisant bien apparaître l'image intermédiaire $\overline{A_1 B_1}$.

Q 11. L'indication portée sur l'oculaire ($\times 10$) est le grossissement commercial G_0 , c'est-à-dire le rapport de l'angle α' sous lequel on voit l'image à l'infini

d'un objet à travers l'oculaire seul et l'angle α sous lequel on voit ce même objet (il faut comprendre ici l'image intermédiaire de l'objet observé, qui fait office d'objet pour l'œil situé après l'oculaire) à l'œil nu lorsqu'il est situé à la distance minimale de vision distincte (on prendra $\delta = 25$ cm). Déterminer f'_2 , la distance focale image de l'oculaire.

Q 12. On s'intéresse maintenant à l'objectif seul, modélisé par une lentille \mathcal{L}_1 de distance focale image f'_1 . La valeur absolue du grandissement $\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}$ de l'objet AB par l'objectif est indiquée à ($\times 40$).

Déterminer la distance focale f'_1 de l'objectif.

Q 13. Calculer la distance $\overline{O_1A}$ à laquelle positionner l'objet pour que l'image intermédiaire $\overline{A_1B_1}$ obtenue par l'objectif donne une image à l'infini.

Q 14. Calculer dans ce cas le grossissement commercial du microscope en entier, défini comme étant $G_c = \frac{\alpha'}{\alpha''}$ avec α'' l'angle sous lequel on voit l'objet AB à l'œil nu placé au punctum proximum.



Système de détection de lumière



Objectifs du sujet :

- ▷ Maîtriser la notion de caractéristique d'un dipôle.
- ▷ Réaliser des associations de dipôles.
- ▷ Introduction à la notion de convertisseur analogique-numérique (CAN).

▷ Dans de nombreux dispositifs d'optique moderne, la détection de la lumière repose sur l'utilisation de photodiodes couplées à des systèmes électroniques de traitement du signal. On s'intéresse ici à un système de détection de lumière employé dans un capteur d'illumination automatique.

Ce capteur est composé d'une photodiode : elle génère un courant proportionnel à l'intensité lumineuse reçue. Ce courant alimente un réseau de résistances itératives qui adaptent le signal à envoyer au convertisseur analogique-numérique (CAN). Le CAN numérise cette tension afin d'ajuster en temps réel l'éclairage d'un écran en fonction des conditions de luminosité ambiantes.

On cherche à modéliser le fonctionnement de ce système et à déterminer les caractéristiques de la conversion analogique-numérique en fonction de l'intensité lumineuse reçue par la photodiode.

A) Détection du signal lumineux

▷ Une photodiode est utilisée pour convertir une puissance lumineuse en un courant électrique. Son comportement est modélisé par une caractéristique courant-tension spécifique. On cherche à déterminer sa tension en circuit ouvert, identifier les zones de fonctionnement générateur et récepteur, modéliser son comportement en utilisant une approximation linéaire par morceaux et étudier son association avec une résistance pour analyser les conditions de fonctionnement et la puissance dissipée.

Une photodiode est un dipôle dont la caractéristique courant-tension dépend de la puissance lumineuse reçue. L'équation de la caractéristique est donnée :

$$i(u) = I_0 \left(e^{u/V_0} - 1 \right) - I_P,$$

$$\text{où, } I_0 = 9,0 \text{ } \mu\text{A, } V_0 = 25 \text{ mV, } I_P = kP_L \text{ avec } k = 0,6 \text{ A} \cdot \text{W}^{-1}.$$

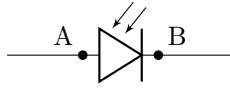


FIGURE 1 – Schéma conventionnel d'une photodiode

- Q 1.** La photodiode reçoit une puissance lumineuse $P_L = 1,3 \text{ mW}$. Déterminer U_{C_0} , la valeur de la tension en circuit ouvert.
- Q 2.** Tracer la caractéristique de la photodiode. Identifier alors la partie de la caractéristique correspond à un comportement générateur de la photodiode. Même question pour le comportement récepteur.
- Q 3.** Dans la suite, on utilise la caractéristique simplifiée donnée ci-dessous. Justifier simplement qu'une telle approximation de la caractéristique est raisonnable.

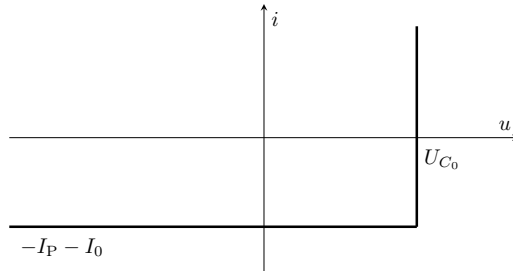


FIGURE 2 – Caractéristique $i = f(u)$ d'une photodiode

- Q 4.** Cette photodiode est connectée à une résistance R_C . Déterminer graphiquement le point de fonctionnement du circuit, pour cela, on traitera les deux cas suivants : $R_C < R_0$ et $R_C > R_0$ avec $R_0 = \frac{U_{C_0}}{I_0 + I_P}$ dont on donnera la valeur numérique.
- Q 5.** Dans les deux cas cités précédemment, déterminer la puissance P fournie par la photodiode en fonction de R_C , U_{C_0} et R_0 .
- Q 6.** Identifier la valeur de R_C pour laquelle $P = P_{\max}$ puis, déterminer la puissance maximale fournie P_{\max} en fonction de R_0 et U_{C_0} .
- Q 7.** Afin d'optimiser le rendement de ce convertisseur, on se place dans le cas où $P = P_{\max}$. Exprimer dans ce cas le rendement η en fonction de P_{\max} et P_L . Calculer ce rendement et commenter le résultat obtenu.

B) Préparation du signal électrique

▷ Le courant produit par la photodiode est injecté dans un quadripôle résistif en T représenté ci-après, qui permet d'adapter l'impédance et d'ajuster la tension du signal avant conversion. On cherche à déterminer la résistance d'entrée de ce quadripôle et la résistance itérative qui permet d'optimiser la transmission du signal. L'étude est ensuite généralisée avec plusieurs quadripôles en cascade, permettant d'observer l'évolution de l'amplification en tension et en courant.

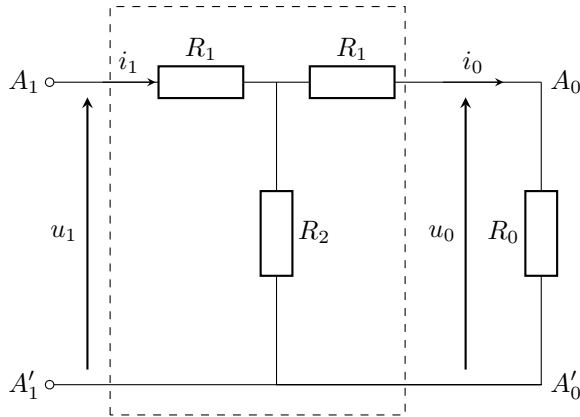


FIGURE 3 – Schéma conventionnel du quadripôle en T

- Q 8.** On définit la résistance d'entrée de ce dipôle par $R_{e1} = \frac{u_1}{i_1}$. Exprimer la résistance d'entrée en fonction de R_0 , R_1 et R_2 .
- Q 9.** On souhaite "adapter l'impédance d'entrée" du quadripôle, c'est à dire que la résistance d'entrée R_{e1} soit égale à la résistance de charge R_0 . Déterminer alors la résistance R_0 vérifiant la condition $R_{e1} = R_0$. Cette valeur particulière de R_0 est appelée "résistance itérative" et on la notera R_i .
- Q 10.** Déterminer l'expression de l'amplification en tension du quadripôle définie par $A_u(1) = \frac{u_0}{u_1}$.
- Q 11.** En déduire le lien entre $A_u(1)$ et l'amplification en courant du quadripôle définie par $A_i(1) = \frac{i_0}{i_1}$ puis, justifier que $A_u(1) < 1$. Ce résultat est-il cohérent ?

C) Conversion analogique-numérique

▷ Le signal ainsi modifié est envoyé dans le CAN. La carte d'acquisition du CAN a une résolution de 8 bits.

Q 12. Combien de valeurs différentes peuvent être affichées ?

Q 13. Pour une tension d'entrée de 5 V, déterminer q , le pas de quantification du CAN : il s'agit de la plus petite valeur de tension que le CAN peut afficher.

Q 14. Expliquer comment le pas de quantification peut occasionner un allumage prématuré ou tardif de l'éclairage automatique.

Technique optimale de charge d'un supercondensateur



Objectifs du sujet :

- ▷ Établir et résoudre des équations différentielles linéaires du 1er ordre coefficients constants dans le domaine de l'électrocinétique.
- ▷ Maîtriser les conceptions énergétiques de l'électrocinétique de PCSI sur des circuits linéaires du 1er ordre.

▷ Les supercondensateurs sont des condensateurs dont la capacité peut atteindre quelques milliers de Farad, ce qui peut être très bénéfique dans certaines utilisations. L'Aéroport Nice Côte d'Azur expérimente depuis peu un service de bus électrique fonctionnant grâce à l'énergie électrique, et se rechargeant à tous les arrêts grâce à leurs supercondensateurs embarqués. Cela permet donc d'éviter la consommation d'énergies fossiles. Cependant, la charge classique d'un condensateur présente un rendement de charge relativement moyen. Ce sujet étudie un moyen d'optimiser ce rendement de charge.

A) Charge classique d'un condensateur

▷ On cherche à charger un condensateur de capacité C à l'aide d'un générateur réel de tension $e(t)$ et de résistance interne R . On note $u(t)$ la tension aux bornes du condensateur et $i(t)$ l'intensité du courant dans le circuit.

Le condensateur est initialement déchargé et le générateur délivre un échelon de tension entre 0 et E à l'instant $t = 0$:

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ E & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

- Q 1.** Déterminer les valeurs de $u(t)$ et $i(t)$ aux instants $t = 0^-$ et $t = 0^+$.
- Q 2.** Déterminer les valeurs de $u(t)$ et $i(t)$ au bout d'un temps très long.
- Q 3.** Pour $t \geq 0$, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$. Veiller à la mettre sous forme canonique et faire apparaître un temps caractéristique τ dont on précisera l'expression en fonction des données du problème.
- Q 4.** En déduire l'expression de $u(t)$ pour $t \geq 0$, et représenter graphiquement $\frac{u(t)}{E} = f\left(\frac{t}{\tau}\right)$ pour $t \geq 0$.
- Q 5.** Déterminer l'expression de $i(t)$ pour $t \geq 0$, et représenter graphiquement $\frac{i(t)}{i_0} = g\left(\frac{t}{\tau}\right)$ pour $t \geq 0$, où il faudra préciser l'expression de i_0 .

- Q 6.** Établir l'expression du temps T à partir duquel la charge du condensateur diffère de moins de 1% de sa charge finale, en fonction de τ et de $\alpha = 0,99$.
Par la suite, on considèrera la charge du condensateur terminée après une durée T .
- Q 7.** Établir l'expression de $\mathcal{E}_C(t)$ de l'énergie emmagasinée par un condensateur en fonction de la tension à ses bornes $u(t)$. En déduire l'énergie $\mathcal{E}_{C,f}$ emmagasinée par le condensateur à la fin de sa charge (on suppose que le temps T de la charge est tel que $e^{-T/\tau} \simeq 0$).
- Q 8.** Établir l'expression de $\mathcal{E}_g(t)$ de l'énergie fournie par le générateur en fonction de C , E et τ . En déduire l'énergie $\mathcal{E}_{g,f}$ fournie pendant le temps de charge T du condensateur (on suppose toujours que le temps T de la charge est tel que $e^{-T/\tau} \simeq 0$).
- Q 9.** Définir puis calculer le rendement η_1 de la charge du condensateur.

B) Charge divisée en N étapes

▷ Le condensateur est à nouveau initialement déchargé et on découpe maintenant la charge en N étapes. À chaque étape, une fois le condensateur chargé, la tension aux bornes du générateur est incrémentée de E/N .

— étape 1 ($k = 1$) : le générateur fournit un échelon de tension E/N entre l'instant $t = 0$ et l'instant T (durée pour que le condensateur soit chargé à 99% de sa charge maximale) ;

— étape 2 ($k = 2$) : à l'instant $2T$, la tension aux bornes du générateur passe à $2E/N$;

— étape k : à l'instant kT , la tension aux bornes du générateur passe à kE/N ;

— étape N ($k = N$) : à l'instant NT , la tension aux bornes du générateur passe à E .

- Q 10.** Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur notée $u_k(t)$ lors de la k -ième étape de la charge, c'est-à-dire dans l'intervalle de temps $[kT, (k+1)T[$.
- Q 11.** En déduire l'expression de $u_k(t)$ à l'étape k en fonction de k , E , N et τ .
- Q 12.** Déterminer l'expression de $i_k(t)$ à l'étape k .
- Q 13.** Établir l'expression de l'énergie $\mathcal{E}_{g,k}$ fournie par le générateur pendant la k -ième étape de la charge en fonction de C , E , k et N .
- Q 14.** Montrer que l'expression de l'énergie totale $\mathcal{E}_{g,\text{tot}}$ fournie par le générateur pendant toute la charge s'écrit sous la forme $\mathcal{E}_{g,\text{tot}} = CE^2 f(N)$ où f est une fonction de N à exprimer.

- Q 15. Établir l'expression de l'énergie $\mathcal{E}_{C,k}$ stockée par le condensateur pendant la k -ième étape de la charge en fonction de C , E , k et N .
- Q 16. Déterminer l'énergie totale emmagasinée par le condensateur $\mathcal{E}_{C,\text{tot}}$ pendant toute sa charge durant les N étapes.
- Q 17. Exprimer enfin le rendement global η_N de la charge en N étapes.
- Q 18. Calculer $\lim_{N \rightarrow +\infty} \eta_N$. Commenter le résultat.

C) Application à un bus de la flotte de l'Aéroport de Nice Côte d'Azur

- Q 19. En analysant le schéma de la figure ci-dessous¹ ainsi que la formule de la capacité d'un condensateur plan dont les armatures ont une surface S , séparées d'une épaisseur e : $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$, expliquer le terme supercondensateur.

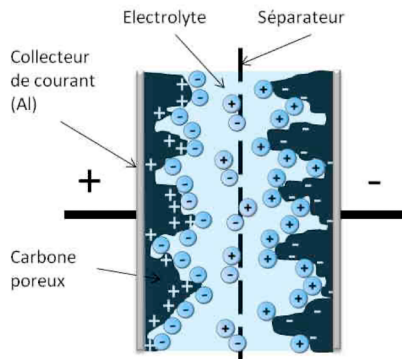


FIGURE 1 – Schéma de principe d'un supercondensateur

- Q 20. Calculer la durée minimale permettant de charger un supercondensateur de capacité $C = 20$ F avec un générateur de résistance interne $R = 0,1 \Omega$ pour un rendement supérieur à $\beta = 95\%$. Et pour un rendement supérieur à $\beta = 99\%$?
- Q 21. En pratique le bus s'arrête au maximum 30 secondes à chaque arrêt. Déterminer le nombre maximal de cycles de charges auquel il faut soumettre et en déduire le rendement maximal escompté.

1. Figure issue de la présentation de Patrice SIMON du cours intitulé "Supercondensateurs : principes et évolutions" enseigné au Collège de France le 02/02/2011



Effets inductifs dans un circuit électrique



Objectifs du sujet :

- ▷ Établir et résoudre des équations différentielles linéaires du 2ème ordre coefficients constants dans le domaine de l'électrocinétique.
- ▷ Découpler une équation différentielle couplée à l'aide de la méthode de la demi-somme et de la demi-différence.

▷ Les bobines, ou inductances, sont des dipôles électriques fréquemment utilisés. Elles permettent de générer des surtensions, ou bien des champs magnétiques. Dans ce sujet, nous proposons d'étudier deux types d'effets inductifs.

▷ On notera les dérivées temporelles d'un scalaire A par la notation suivante : $\frac{dA}{dt} = \dot{A}$, $\frac{d^2A}{dt^2} = \ddot{A}$ etc.

A) Étincelle de rupture aux armatures d'un interrupteur à levier

▷ Les interrupteurs à levier à nu sans protection ne sont pas utilisés dans les salles de TP car jugés trop dangereux : en effet, dans le cadre de circuits électriques comportant une ou plusieurs bobines, des étincelles peuvent survenir au niveau des cosses (armatures de l'interrupteur accueillant le levier). Nous allons modéliser dans cette première partie du problème ce phénomène.

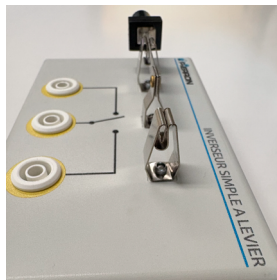


FIGURE 1 – Interrupteur à levier avec vue sur les armatures accueillant le levier

▷ On place une bobine d'inductance L dans un circuit comprenant un générateur de tension constante E et un interrupteur à levier noté K . La résistance totale du circuit est notée R . On prendra $R = 40 \Omega$, $E = 40 \text{ V}$, $L = 4,0 \text{ mH}$. Le régime permanent étant établi, on ouvre brusquement l'interrupteur K à l'instant $t = 0$. L'espace d'air entre les deux cosses de l'interrupteur se comporte alors comme l'isolant d'un condensateur jusqu'au claquage, pour une tension élevée à déterminer ultérieurement dans l'exercice. Avant le claquage, on assimile donc les armatures

de l'interrupteur à un condensateur de capacité $C = 10 \text{ pF}$.

Le champ électrique disruptif de l'air est le champ électrique appliqué tel que l'air, naturellement isolant, devienne conducteur. Il vaut $E_d = 3,0 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}$. Pour rappel, la tension entre les armatures d'un condensateur séparées d'une distance d entre lesquelles règne un champ électrique de norme E vérifie la relation :

$$E = \frac{U}{d}.$$

- Q 1.** Sachant que l'épaisseur entre les armatures est de $e = 0,50 \text{ mm}$, déterminer la tension de claquage V_c de l'air, tension pour laquelle l'air devient conducteur.
- Q 2.** Établir l'équation différentielle de la tension u aux bornes des armatures de l'interrupteur modélisé par un condensateur. Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q .
- Q 3.** Évaluer numériquement Q .
- Q 4.** En déduire la forme générale de la solution en fonction de deux constantes A_1 et A_2 . On exprimera une pulsation caractéristique Ω des variations de la tension ainsi qu'un temps caractéristique d'amortissement τ en fonction de ω_0 et Q .
- Q 5.** Montrer que le temps caractéristique d'amortissement τ de la tension u est très grand devant le temps caractéristique T des variations de u .

Dans la suite, on considérera l'amortissement négligeable.

- Q 6.** Indiquer ce que signifie "l'amortissement est négligeable". Exprimer alors la nouvelle équation différentielle vérifiée par u . Quel nom peut-on donner à ce type d'équation différentielle ?
- Q 7.** En déduire l'expression de u en fonction de deux constantes A_3 et A_4 .
- Q 8.** Déterminer $u(0^-)$, $u(0^+)$, $i(0^-)$ et $i(0^+)$ en fonction des données du problème.
- Q 9.** En déduire les expressions des constantes A_3 et A_4 , où l'on vérifiera que l'une des deux dépend bien de Q , puis l'expression de u .
- Q 10.** Sachant que $Q \gg 1$, simplifier l'expression de u .
- Q 11.** Déterminer puis calculer l'instant t_c auquel se produit l'étincelle.

B) Oscillateurs électriques couplés

▷ On considère le circuit schématisé ci-dessous où l'interrupteur K est ouvert depuis longtemps : le régime permanent est alors établi. Durant ce régime permanent, seul le condensateur de capacité C_2 porte la charge q_0 et le condensateur de capacité C_1 est déchargé. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .

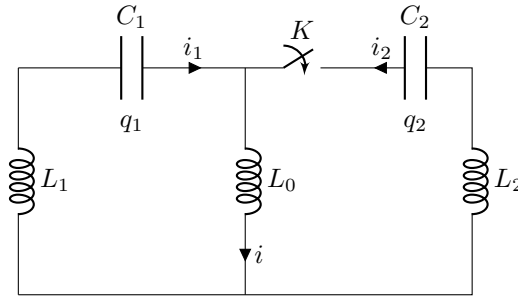


FIGURE 2 – Schéma du circuit électrique avant la fermeture de l'interrupteur K

- Q 12.** Établir les équations différentielles vérifiées par q_1 et q_2 en respectant les choix d'orientation de l'énoncé. Montrer que, dans le cas où $L_1=L_2 = L$ et $C_1=C_2 = C$, elles sont de la forme suivante :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \alpha\ddot{q}_2 + \beta q_1 = 0, \\ \ddot{q}_2 + \alpha\ddot{q}_1 + \beta q_2 = 0, \end{cases}$$

où α et β s'expriment en fonction de L , L_0 et C .

- Q 13.** Les équations précédentes étant couplées (préciser la signification de ce terme), on introduit les variables S et D telles que $S = q_1 + q_2$ et $D = q_1 - q_2$. Déterminer deux équations différentielles : l'une dépendant uniquement de S et de ses dérivées temporelles et l'autre dépendant uniquement de D et de ses dérivées temporelles. Il faudra poser deux grandeurs caractéristiques ω_S et ω_D à exprimer tout d'abord en fonction de α et β , puis en fonction de L_0 , L et C .

- Q 14.** En déduire après résolution de ces équations différentielles que :

$$\begin{cases} q_1(t) = q_0 \sin(\omega_{\text{moy}}t) \sin(\omega_{\text{mod}}t), \\ q_2(t) = q_0 \cos(\omega_{\text{moy}}t) \cos(\omega_{\text{mod}}t), \end{cases}$$

où ω_{moy} désigne la pulsation moyenne et ω_{mod} désigne la pulsation de modulation, toutes deux à exprimer en fonction de ω_S et ω_D .

- Q 15.** Expliquer les termes "pulsation moyenne" et "pulsation de modulation", puis comparer ω_{moy} et ω_{mod} . Commenter.
- Q 16.** Quel dipôle est responsable du couplage ?
- Q 17.** Discuter l'allure des évolutions des charges selon que le couplage est fort ou faible.
- Q 18.** Tracer les représentations graphiques $q_1 = f(t)$ et $q_2 = g(t)$ dans le cadre d'un couplage faible.



Des ressorts pour modéliser des liaisons interatomiques



Objectifs du sujet :

- ▷ Établir et résoudre une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants.
- ▷ Savoir utiliser convenablement l'expression de la force de rappel élastique.
- ▷ Utiliser l'énergie potentielle élastique.

▷ Les ressorts sont des outils de la vie quotidienne notamment utilisés dans les amortisseurs de vélo. L'étude de système microscopique tels que les molécules ou les cristaux peut donner lieu à une modélisation faisant intervenir des ressorts (en restant dans un modèle de physique classique). Ce sujet propose d'étudier quelques systèmes microscopiques faisant intervenir des ressorts.

A) Molécule diatomique de CO

▷ On considère une molécule diatomique de monoxyde d'azote composée d'un atome de carbone C de masse m_C et d'un atome d'oxygène O de masse m_O . On modélise la liaison interatomique par un ressort de raideur k et de longueur à vide a . On se place dans le référentiel barycentrique de la molécule, c'est-à-dire le référentiel dans lequel le centre d'inertie G de la molécule est immobile. On place la molécule selon l'axe (Gz) et on désigne par A_C le centre de masse de l'atome de carbone C et par A_O le centre de masse de l'atome d'oxygène O. On note $\vec{r}_C = \vec{GA}_C = -r_C \vec{u}_z$ et $\vec{r}_O = \vec{GA}_O = r_O \vec{u}_z$ les vecteurs position respectifs des atomes de carbone et d'oxygène. On notera $\vec{r} = \vec{A_C A_O}$ le vecteur distance interatomique. On notera $r_O = \|\vec{r}_O\|$ et $r_C = \|\vec{r}_C\|$.

- Q 1.** Par définition du centre d'inertie G d'un système de masse m composé de sous systèmes de masses m_k , $k \in \mathbb{N}$, on a : $\vec{OG} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^N m_k \vec{OM}_k$ où O désigne l'origine du repère. Sachant que l'on prend l'origine du repère O telle que $O \equiv G$, déterminer la relation entre m_O , m_C , \vec{r}_C et \vec{r}_O .
- Q 2.** Schématiser la situation en faisant apparaître les deux atomes, la liaison interatomique modélisée par le ressort, ainsi que les vecteurs \vec{r}_C , \vec{r}_O et \vec{r} .
- Q 3.** Établir les équations différentielles canoniques vérifiées par r_C et r_O , en faisant apparaître les grandeurs Ω à exprimer en fonction de k , m_C et m_O , ω_C à exprimer en fonction de k et m_C , et ω_O à exprimer en fonction de k et m_O .

Q 4. En déduire que r vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{r} + \Omega^2 r = \Omega^2 a,$$

où $\Omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ avec μ la masse réduite du système à exprimer en fonction de m_C et m_O .

Q 5. Résoudre l'équation différentielle de la question **Q 4** en prenant pour conditions initiales $r(0) = a_1 > a$ et $\dot{r}(0) = v_0$.

Q 6. En déduire les expressions de $r_C(t)$ et $r_O(t)$.

Q 7. Déterminer puis calculer la fréquence d'oscillation de $r(t)$. Faire l'application numérique.

Q 8. On considère que la longueur à vide du ressort modélisant la liaison dans la molécule CO vaut : $a = 113$ pm. Déterminer l'expression littérale de l'énergie E_r qu'il faut apporter pour rompre la liaison interatomique sachant que la rupture de liaison se produit lorsque $\|\vec{r}\| \geq r_{\text{rupture}} = 127$ pm, puis faire l'application numérique en exprimant E_r en J puis en eV.

Q 9. En déduire la valeur de l'énergie de liaison E_ℓ en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ de la molécule de monoxyde de carbone, c'est à dire l'énergie à utiliser pour casser une mole de liaisons CO.

Q 10. En réalité, $E_\ell(\text{CO}) = 1\,077$ $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$. Proposer une explication pour la différence constatée.

B) Modes d'oscillations d'une molécule triatomique de CO_2

▷ On s'intéresse cette fois-ci aux modes d'oscillations d'une molécule de CO_2 . On suppose que la molécule ne tourne pas sur elle-même et que ses atomes restent dans la direction de l'axe (Gz) où G désigne la position du barycentre de la molécule de CO_2 . On repère chaque atome par son déplacement selon l'axe (Gz) par rapport à sa position dans le référentiel barycentrique. On note les déplacements algébriques des atomes de carbone (C), d'oxygène (O_1 et O_2) par les grandeurs algébriques ξ_C , ξ_1 et ξ_2 comme représenté ci-après dans une situation hors-équilibre (ici, $\xi_1 > 0$, $\xi_C > 0$ et $\xi_2 < 0$). Les liaisons interatomiques CO seront toujours modélisées par des ressorts de raideur k et de longueur à vide a .

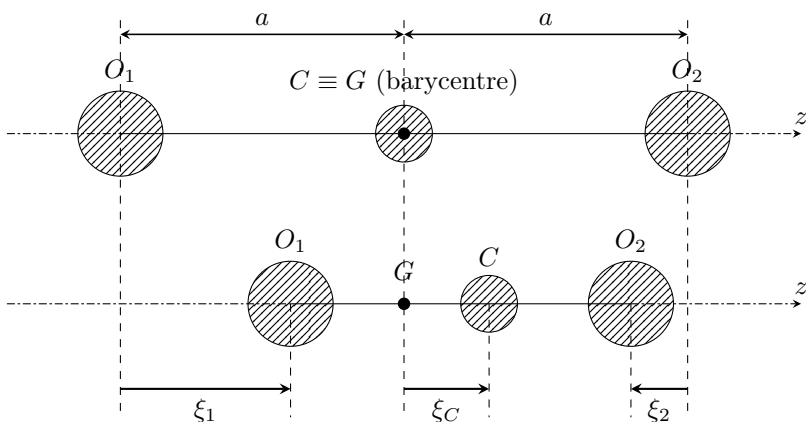


FIGURE 1 – Modèle physique simplifié de la molécule de CO_2

- Q 11.** Déterminer la relation vérifiée par ξ_C , ξ_1 et ξ_2 .
Indication : attention à l'algébrisation de ξ_1 , ξ_C et ξ_2 .
- Q 12.** Établir les équations différentielles vérifiées par ξ_C , ξ_1 et ξ_2 .
- Q 13.** En déduire que ξ_1 vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{\xi}_1 + \Omega^2 \xi_1 = -\omega_C^2 \xi_2,$$

On appelle "mode propre d'oscillation" la manière qu'ont ces trois atomes à osciller selon l'axe (Gz) de façon harmonique.

- Q 14.** Étude du mode symétrique ($\xi_1 = -\xi_2$) : simplifier l'équation différentielle de la **Q 13.** et exprimer la pulsation ω_S de ce mode en fonction des données du problème.
- Q 15.** Étude du mode antisymétrique ($\xi_1 = \xi_2$) : simplifier l'équation différentielle de la **Q 13.** et exprimer la pulsation ω_A de ce mode en fonction des données du problème.
- Q 16.** Déterminer les solutions $\xi_1(t)$ et $\xi_2(t)$ pour les modes symétrique et antisymétrique en considérant que $\xi_1(0) = 0$ et $\dot{\xi}_1(0) = v_0$.
- Q 17.** Schématiser les deux modes propres d'oscillation de la molécule de CO_2 aux instants $t = 0$, $t = \frac{T_S}{4}$, $t = \frac{T_S}{2}$, $t = \frac{3T_S}{4}$ et $t = T_S$ (mode symétrique) et $t = 0$, $t = \frac{T_A}{4}$, $t = \frac{T_A}{2}$, $t = \frac{3T_A}{4}$ et $t = T_A$ (mode antisymétrique).
- Q 18.** Exprimer la fréquence du mode symétrique notée ν_S en fonction de la fréquence du mode antisymétrique notée ν_A , de m_O et m_C . Faire l'application numérique sachant que $\nu_A = 7,042 \times 10^{13}$ Hz.

Données et formulaire

| | |
|--|---|
| Masse d'un atome de carbone | $m_C = 2,0 \times 10^{-26} \text{ kg}$ |
| Masse d'un atome d'oxygène | $m_O = 2,7 \times 10^{-26} \text{ kg}$ |
| Constante de raideur du ressort équivalent | $k = 1,9 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ |
| Conversion J \leftrightarrow eV | $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ |

▷ On notera les dérivées temporelles d'un scalaire A par la notation suivante :

$$\frac{dA}{dt} = \dot{A}, \quad \frac{d^2A}{dt^2} = \ddot{A} \text{ etc.}$$



Étude d'un sismographe



Objectifs du sujet :

- ▷ Établir et résoudre une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants.
- ▷ Exploiter les caractéristiques d'un oscillateur amorti.

▷ Le sismographe vertical, représenté sur figure la ci-dessous, est constitué d'un solide repéré par un point M de masse m suspendu à un ressort dont l'autre extrémité H est liée à un bâti rigide solidaire du sol en vibration. Un dispositif d'acquisition permet d'enregistrer le mouvement du solide par rapport au bâti. On souhaite que ce mouvement reproduise le plus fidèlement possible celui du sol par rapport au référentiel d'étude \mathcal{R} de centre O et d'axe vertical (Oz) supposé galiléen. Le sol est supposé horizontal. La masse est également soumise à une force de frottement visqueux de la forme $\vec{f} = -\beta\vec{v}$ où β est une constante et \vec{v} est la vitesse de M par rapport à H . On notera z la distance HM . À l'instant $t = 0$, $z(0) = z_0$ et $\dot{z}(0) = 0$. L'ensemble des données est rassemblé sur le schéma ci-dessous :

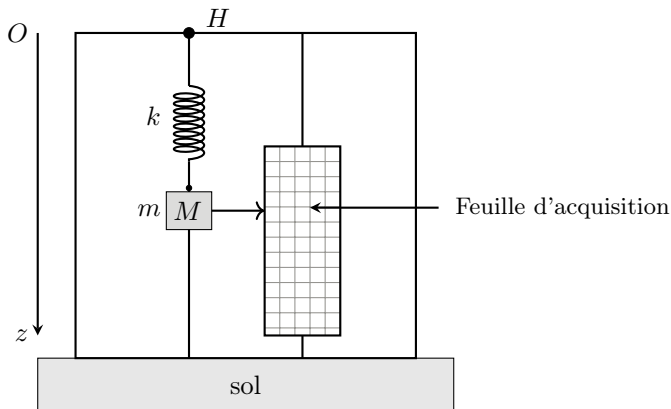


FIGURE 1 – Schéma du sismographe.

- Q 1.** Déterminer l'expression z_{eq} de z à l'équilibre.
- Q 2.** La masse est lâchée en dehors de sa position d'équilibre. Établir l'équation différentielle du mouvement.
- Q 3.** On pose $Z = z - z_{\text{eq}}$. Montrer que l'équation différentielle précédente peut